

Université de ABBAS Laghrour KHENCHELA

***Dynamique de machines  
Tournantes***

***2<sup>ème</sup> année***

***Master***

***LMD***

***Constructions  
Mécaniques***

**B. Meddour**

**2019**

## TABLE DE MATIERES

<b>CHAPITRES</b>	<b>PAGES</b>
<b>CHAPITRE 1</b> Introduction à la dynamique des rotors .....	1
- Introduction.....	1
- Définition.....	1
- Historique.....	3
- Modèles de rotors (Modèle LAVAL/JEFCOTT, Modèle avec paliers flexibles cas isotrope, Modèle avec paliers flexibles cas anisotrope) .....	7
- Caractéristiques d'un rotor (Disque rigide, Arbre flexible, Paliers, Balourd).....	8
<b>CHAPITRE 2</b> Modèle d'un rotor simple .....	17
- Représentation d'un rotor simple.....	17
- Mise en équations.....	17
- Exemple d'application (Modèle symétrique, Fréquences propres, Diagramme de Campbell, Réponse aux forces d'excitation).....	18
- Modèle dissymétrique et amorti .....	26
<b>CHAPITRE 3</b> Modélisation des rotors par éléments finis.....	29
- Introduction.....	29
- Expressions des énergies.....	29
- Formulation matricielle.....	30
<b>CHAPITRE 4</b> Vibrations en torsion des rotors .....	35
- Introduction.....	35
- Modélisation du problème (Modèle avec masses concentrées et Modèle continu)....	35
<b>CHAPITRE 5</b> Influence des paliers sur les vibrations des rotors.....	47
- Paliers.....	47
- Influence des paliers sur les vibrations des rotors.....	48
<b>CHAPITRE 6</b> Equilibrage des rotors.....	54
- Introduction.....	54
- Le balourd.....	54
- Types de balourds.....	54
- Equilibrage d'un rotor.....	55

## **INTRODUCTION**

*Ce polycopié est destiné aux étudiants de 3<sup>e</sup> semestre Mastère LMD et aux élèves ingénieurs spécialité Constructions Mécaniques ou autres spécialités telles que maintenance industrielle, fabrications mécaniques,...*

*L'augmentation rapide des vitesses de fonctionnement des machines au cours des dernières décennies a posé de nouveaux problèmes liés aux vibrations des rotors. Les turbogénérateurs, turbines à gaz et à vapeur, arbres tournants, pompes haute capacité, et une multitude de machines spéciales sont soumis à des vibrations pouvant être dangereuses ou nuisibles au fonctionnement des machines tournantes. La discipline baptisée Dynamique des Rotors s'occupe de l'étude des vibrations des machines tournantes. Ce contenu a été scindé en cinq chapitres pour l'étude :*

*Le 1<sup>er</sup> chapitre est consacré à tout ce qui est en rapport avec les rotors commençant par l'historique, définition, différents modèles, éléments d'un rotor et modélisation.*

*Le 2<sup>e</sup> chapitre traite un exemple de modèle simple de rotor avec des données pratiques. C'est l'application du 1<sup>er</sup> chapitre et en même temps il constitue un support essentiel à la compréhension de la modélisation de la dynamique des rotors. Sans oublier de noter que ce chapitre traite uniquement le phénomène du tournoisement (Whirling).*

*Le 3<sup>e</sup> chapitre traitera l'emploi de la méthode des éléments finis pour le calcul dynamique des rotors.*

*Le 4<sup>e</sup> chapitre est consacré aux vibration des rotors en torsion, c'est un complément aux premiers chapitres.*

*Le 5<sup>e</sup> chapitre traite brièvement l'influence des paliers sur les vibrations des rotors.*

*Le 6<sup>e</sup> chapitre est consacré à l'équilibrage des rotors, opération que l'étudiant doit en avoir l'idée principale.*

*Enfin j'adresse mon invitation à tout lecteur ayant des critiques ou des remarques à me contacter par cet email : [samsun66@gmail.com](mailto:samsun66@gmail.com).*

*MEDDOUR B.*

## Chapitre 1 Introduction à la dynamique des rotors

### 1.1. Introduction

L'augmentation rapide des vitesses de fonctionnement des mécanismes et des machines au cours des dernières décennies a posé de nouveaux problèmes aux concepteurs. Les turbogénérateurs, turbines à gaz et à vapeur, arbres tournants, pompes haute capacité, et une multitude de machines spéciales sont soumis à des vibrations émanant des déformations causées par des forces dynamiques. Ces vibrations peuvent être dangereuses d'où la naissance de la discipline de la dynamique des rotors ou machines tournantes.

### 1.2. Définition d'un rotor

Une machine est composée de parties tournant autour des axes fixes soutenues par des paliers, l'ensemble des corps tournant autour d'un même axe avec leurs paliers constituent un rotor (Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4 et Fig. 5). Les parties de la machine qui ne tournent pas sont désignées par la définition générale du stator. Les rotors de machines ont, pendant leur fonctionnement, une grande quantité d'énergie rotative et une faible quantité d'énergie vibratoire. Il est très évident du fait qu'une turbine relativement petite propulse un avion énorme. Pendant le fonctionnement, les rotors subissent des vibrations transversales (flexion), longitudinales (axiale) et de torsion; individuellement ou en combinaison. Le but de la dynamique du rotor en tant que sujet est de garder l'énergie vibratoire aussi petite que possible.

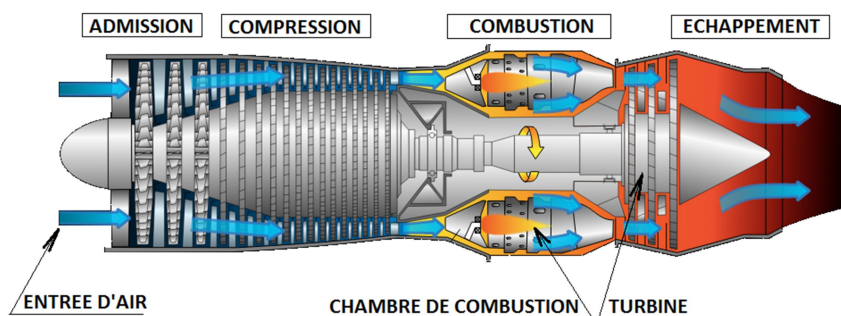


Figure 1. Turbine à gaz.

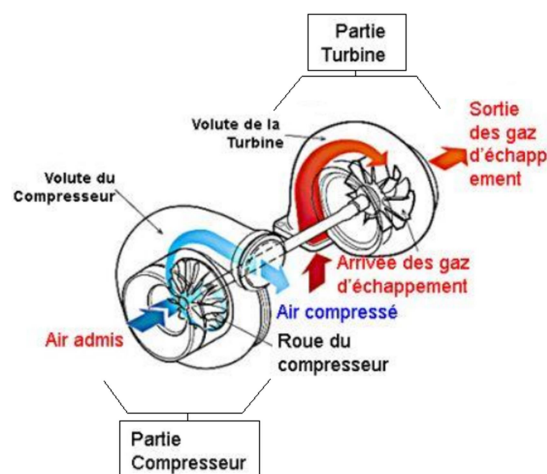


Figure 2. Compresseur.

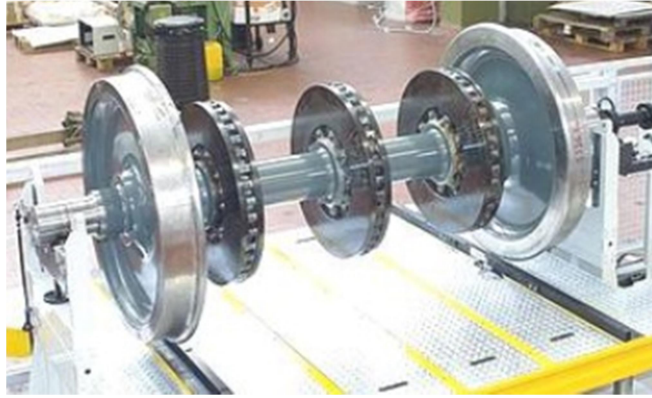


Figure 3. Essieu d'un train.

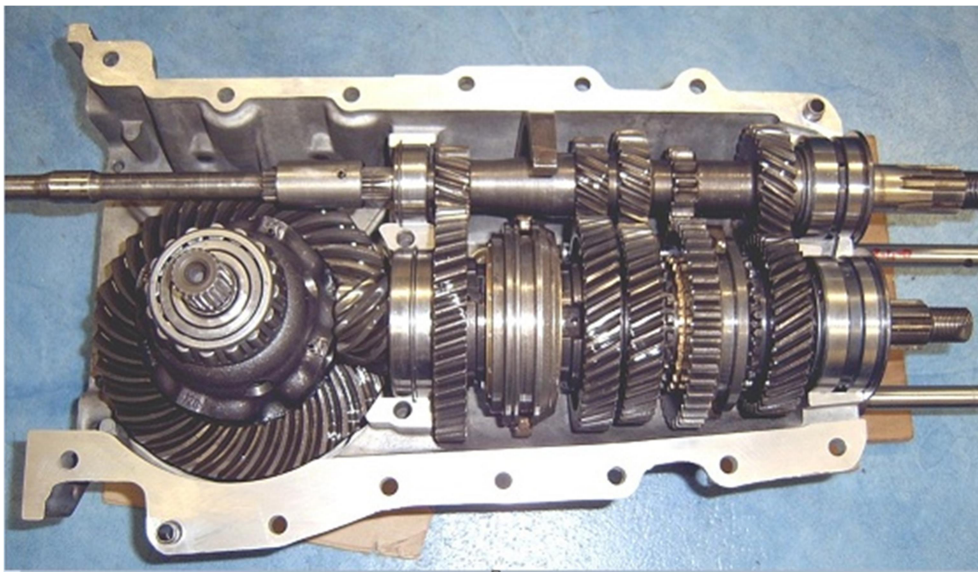


Figure 4. Arbres de transmission.

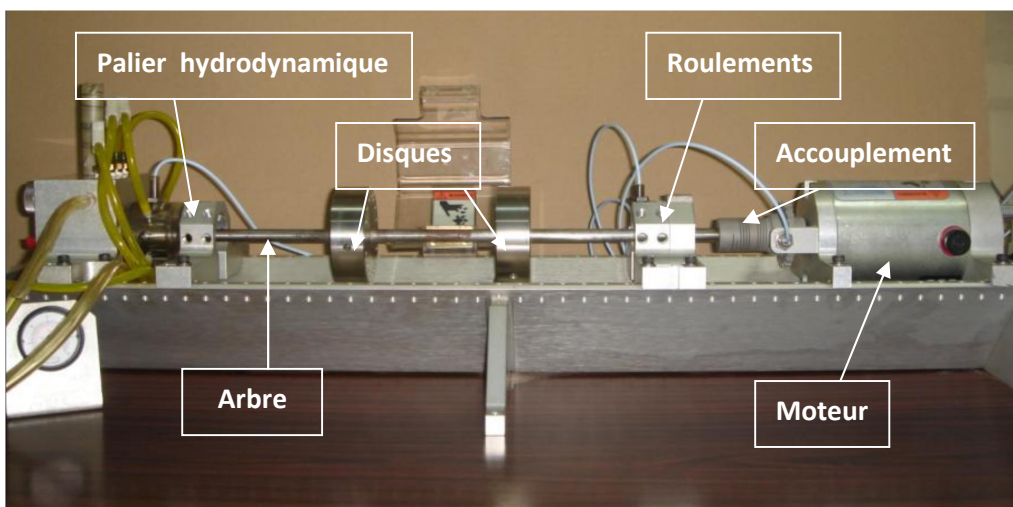


Figure 5. Exemple typique de banc d'essai de paliers de rotor.

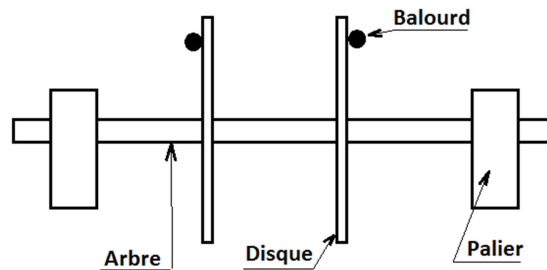


Figure 6. Schéma illustrant les composants d'un rotor.

### 1.3. Historique

La dynamique de rotor a connu un remarquable historique d'évolution, principalement en raison de l'interaction entre sa théorie et sa pratique. Elle a été davantage motivée par sa pratique que par sa théorie. Cette déclaration est particulièrement pertinente pour l'histoire précoce de la dynamique du rotor. La recherche sur la dynamique du rotor s'étend sur au moins 14 décennies d'histoire.

En 1869 Rankine a effectué la première analyse d'un arbre tournant (Fig. 7). Il a prédit qu'au-delà d'une certaine vitesse de rotation, l'arbre fléchit d'une façon considérable et tourne autour de cette forme courbée.

Il a défini cette certaine vitesse comme la vitesse de tournoiement de l'arbre. En fait, on peut montrer qu'au-delà de cette vitesse de tournoiement, la déviation radiale du modèle de Rankine augmente sans limite, ce qui n'est pas vrai en pratique. Cependant, Rankine a ajouté le terme tournoiement (Whirling) au vocabulaire de la dynamique du rotor.

(Fig. 3).

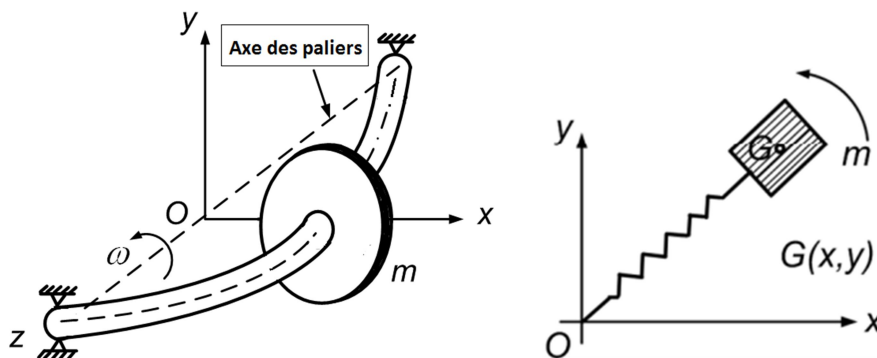


Figure 7. Modèle de Rankine.

Le modèle de Rankine a négligé l'accélération de Coriolis dans son analyse, ce qui a conduit à des conclusions erronées qui ont désorienté les ingénieurs pendant un demi-siècle.

Durant les dernières décennies du 19<sup>ème</sup> siècle la vitesse des rotors développés augmente rapidement, en 1884 Parsons a pu construire une turbine pouvant fonctionner à des vitesses d'environ 18 000 tr/min, soit cinquante fois plus rapide que le moteur alternatif existant à ce temps-là. A son tour l'ingénieur suédois de Laval, en 1883, a pu développer une turbine à impulsion de vapeur à une seule étape (portant son nom) pour des applications marines, cette turbine a réussi à fonctionner à 42 000 tr / min. Laval visait l'autocentrage du disque au-dessus de la vitesse critique, un phénomène qu'il reconnaissait instinctivement. Il a d'abord utilisé un rotor rigide, mais a ensuite utilisé un rotor flexible et a montré qu'il était

possible de fonctionner au-dessus de la vitesse critique en opérant à une vitesse de rotation d'environ sept fois plus grande que la vitesse critique.

Afin de calculer les vitesses critiques des arbres cylindriques avec plusieurs disques et roulements, la théorie générale de Reynolds a été appliquée. L'effet gyroscopique a également été considéré, avec sa dépendance à la vitesse. Dunkerley a constaté, à la suite de nombreuses mesures, la relation connue aujourd'hui par celle de Southwell, par laquelle la première vitesse critique peut être calculée, même pour les cas compliqués. La première phrase de l'article de Dunkerley se lit comme suit: "Il est bien connu que chaque arbre, quelque peu équilibré, lorsqu'il est entraîné à une vitesse particulière, fléchit et, à moins que la déviation ne soit limitée, pourrait même se casser, bien qu'à des vitesses plus élevées, l'arbre. La vitesse particulière ou la vitesse critique dépend de la manière dont l'arbre est porté, sa taille et son module d'élasticité, ainsi que les dimensions, les poids et les positions des poulies qu'il porte". C'était la première utilisation de la vitesse critique à terme pour la vitesse de rotation de résonance.

Les ingénieurs de l'époque étaient regrettamment sous une confusion de concepts en assimilant la vitesse de rotation de Rankine à la vitesse critique de Dunkerley.

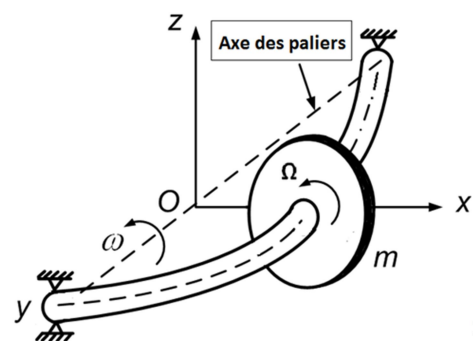
C'est en 1916, en Angleterre, que les choses ont abouti à la fin. Kerr a publié des preuves expérimentales qui montraient qu'une seconde vitesse critique existait, et il était évident pour tout cela qu'une seconde vitesse critique ne pouvait être atteinte que par la traversée sécurisée de la première vitesse critique.

Ce n'est qu'en 1919 que fut la première théorie fondamentale enregistrée de la dynamique du rotor et elle se trouve dans un article classique de Jeffcott. Jeffcott a confirmé la prédiction de Föppl selon laquelle une solution supercritique stable existait et il a étendu l'analyse de Föppl en incluant un amortissement externe (c.-à-d. des forces d'amortissement qui ne dépendent que de la vitesse absolue du rotor, alors que l'amortissement interne provient du taux de déformation de l'arbre). Les excellentes contributions de Jeffcott seront appréciables si on rappelle qu'un arbre souple de masse négligeable avec un disque rigide à mi-portée s'appelle rotor de Jeffcott (Fig. 8). Les paliers sont rigides, et l'amortissement visqueux agit pour s'opposer au mouvement absolu du disque. Le modèle simplifié s'appelle aussi le rotor de Laval.

Les développements réalisés dans la dynamique du rotor jusqu'au début du vingtième siècle sont détaillés dans le livre d'écriture écrit par Stodola en 1924.

Il est moins connu qu'en 1918 Prandtl a été le premier à étudier un rotor Jeffcott avec une section transversale non circulaire (c'est-à-dire une asymétrie élastique dans l'arbre).

Environ une décennie plus tard, l'étude des systèmes d'arbres asymétriques et des systèmes de rotor asymétrique a commencé.



En 1933, Smith a obtenu un travail de pionnier sous la forme de formules simples qui prédisaient que de seuil de la vitesse de rotation pour l'instabilité supercritique variait avec la rigidité des roulements et avec le rapport de l'amortissement visqueux externe à celui interne. La formule d'amortissement a été obtenue indépendamment par Crandall environ 30 ans plus tard.

Au début des années 1920, une instabilité supercritique dans les rotors construits a été rencontrée et, peu de temps après, d'abord montré par Newkirk et Kimball, en 1924, comme une manifestation de l'amortissement interne du rotor (c.-à-d. amortissement entre les composants du rotor). Ensuite, Newkirk et Taylor en 1925 ont décrit une instabilité causée par l'action non linéaire d'un coin d'huile dans un palier lisse, qui a été nommé fouet à l'huile.

En 1933 Baker a pu décrire des vibrations auto-excitées en raison du contact entre le rotor et le stator. En 1937 le chercheur soviétique Nikolai a examiné la stabilité des vibrations transversales et de torsion d'un arbre avec un disque monté au centre et la stabilité d'un arbre avec un disque attaché à l'extrémité libre. Kapitsa en 1939 a noté qu'un arbre flexible pourrait devenir instable en raison des conditions de friction dans ses paliers à glissement. Au milieu du vingtième siècle (1958), Hori réussit à expliquer divers caractéristiques fondamentales du fouet à huile en étudiant la stabilité du mouvement de l'arbre et en prenant en compte l'effet des forces de pression dues aux films d'huile. En 1959 le mécanisme des vibrations dû au tourbillon de vapeur dans les turbines a été expliqué par Thomas et celui produit dans les compresseurs a été expliqué par Alford en 1965. La vibration du rotor creux contenant le fluide était le problème des vibrations induites par le flux. L'instabilité due aux liquides qui remplissaient en partie les cavités intérieures des rotors a été démontrée par Kollmann en 1962.

En 1967 Ehrich a rapporté que le fluide piégé dans les arbres du moteur induit des vibrations asynchrones et a également changé la forme des courbes de résonance. Kuipers en 1964 et Wolf en 1968 ont réussi indépendamment en expliquant l'apparition d'une plage de vitesse instable dans une région postcritique d'un système de rotor contenant du fluide non-visqueux. Dans les années 1980, les effets dynamiques des joints dans les machines de traitement des fluides ont reçu une intense attention. La déstabilisation des rotors due aux joints a été prédite et démontrée par Jenny en 1980 dans un compresseur opérationnel.

Ainsi l'évolution du rotor continue aux des années, à cause de la légèreté les rotors et les vitesses de rotation plus élevées atteintes, des résonances non linéaires telles que les subharmoniques sont apparues et considérées un problème grave. Entre les années 1955 et 1957 Yamamoto a étudié divers types de résonances non linéaires après avoir signalé la résonance subharmonique due aux roulements à billes en 1955 et il a pareillement étudié les résonances combinées. En 1965 Tondl a étudié les résonances non linéaires dues aux films d'huile dans les roulements à billes. Ehrich, en 1966, a signalé des résonances subharmoniques observées dans une turbine à gaz d'avion en raison d'une forte non-linéarité produite par le jeu radial des amortisseurs de film de compression.

Les phénomènes non stationnaires lors du passage à travers des vitesses critiques ont été étudiés depuis que Lewis, cela en 1932, a annoncé sa recherche sur le rotor de Jeffcott. Les phénomènes non stationnaires qui se produisent font partie d'un processus avec une accélération constante (Couple moteur limité) et un autre avec une accélération variable (Couple moteur illimité). En 1952 Natanzon a étudié les vibrations de l'arbre à des vitesses critiques, et Grobov, entre 1953 et 1955, a étudié en général les vibrations de l'arbre résultant de vitesses de rotation variables. L'année 1965 était notable puisque le développement de la méthode asymptotique par Mitropol'skii pour les problèmes non linéaires a considérablement poussé la recherche sur ce sujet.

À partir du début des années 1960, la plupart des efforts portent sur les paliers hydrodynamiques, ce qui a été largement stimulé par Lund en 1964. Le travail de Gunter en 1966 lié aux problèmes de stabilité dynamique du rotor et combiné avec les méthodes Ruhl-Booker et Lund développées respectivement en 1972 et 1974 pour calculer les vitesses critiques amorties, a incité un grand intérêt pour les problèmes de stabilité du rotor. Au milieu des années 1970, les expériences sur l'instabilité dynamique du rotor avec divers compresseurs à haute pression et turbopompes de carburant à haute pression du moteur principal de la navette spatiale ont focalisé une grande attention sur l'influence des forces d'interaction fluide-structure, en particulier les forces dues aux joints liquides et gaz, dans les pompes et les turbines. Les joints d'étanchéité de l'arbre ont un effet similaire à celui des roulements à film fluide. Ils influencent la vitesse critique, peuvent fournir un amortissement ou, d'autre part, provoquer une instabilité. Les joints d'étanchéité ont acquis un rôle important dans leur effet sur la dynamique du rotor.

En 1989 Someya et Tiwari ont obtenu de nombreux résultats numériques et expérimentaux, et la littérature liée à l'identification des paramètres dynamiques du rotor, des roulements et des joints.

Les auteurs Childs en 1993, Gasch et al. en 2002, Tondl en 1965, Yamamoto et Ishida en 2001 ont signalé le phénomène d'auto-excitation. Les vibrations auto-excitées, qui se produisent en raison de forces non conservatrices, conduisent en général à de grandes amplitudes de vibration qui peuvent finalement endommager ou même détruire des machines rotatives. Par conséquent, il est essentiel pendant la phase de conception d'une nouvelle machine de considérer la possibilité d'une auto-excitation et de prendre des mesures contre cet effet. Une approche pour supprimer les vibrations générées par l'auto-excitation, basée sur un phénomène appelé antirésonance (deux modes voisins ayant des effets opposés) qui peuvent se produire dans des systèmes à excitation paramétrique a été décrite par Ecker et Tondl en 2004. L'idée fondamentale de la stabilisation paramétrique a été adoptée en introduisant une rigidité variable dépendant du temps située les supports du palier.

Les forces non conservatrices ont été générées par les paliers du rotor. Ils ont montré l'annulation des vibrations auto-excitées à travers l'excitation paramétrique.

Récemment en 2008, Shaw et Balachandran ont fourni un examen complet de la dynamique non linéaire des systèmes mécaniques, y compris les machines rotatives. Le recherche sur la

dynamique des rotors n'a cessé un jour, elle est aujourd'hui encore l'un des axes de recherche dans le domaine de l'ingénierie mécanique.

### 1.4. Modèles de rotors

#### 1.4.1. Modèle LAVAL/JEFFCOTT

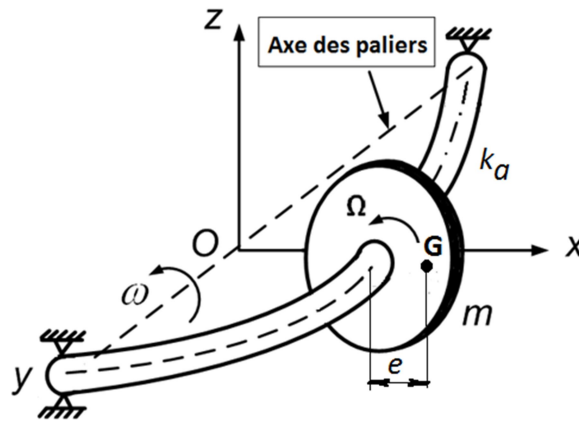


Figure 9. Modèle de LAVAL/JEFFCOTT.

C'est le modèle de base il se compose de:

- un arbre de faible masse et de raideur en flexion  $k_a$
- un disque d'excentricité  $e$  (G centre de gravité)

Et on considère que:

- Les vibrations latérales sont non amorties
- Le modèle est symétrique (les matrices de masse, de l'effet gyroscopique et de rigidité sont symétriques)
- La pesanteur et l'effet gyroscopique sont négligés
- La vitesse de rotation  $\Omega$  est constante
- Les oscillations se font dans le plan perpendiculaire au plan d'équilibre du système

$\vec{F}_c$  : Force d'inertie centrifuge dûe au balourd

$\vec{F}_r$  : Force de rappel dûe à la flexibilité de l'arbre

$e$  : Excentricité du balourd

$R$  : Rayon de l'arbre

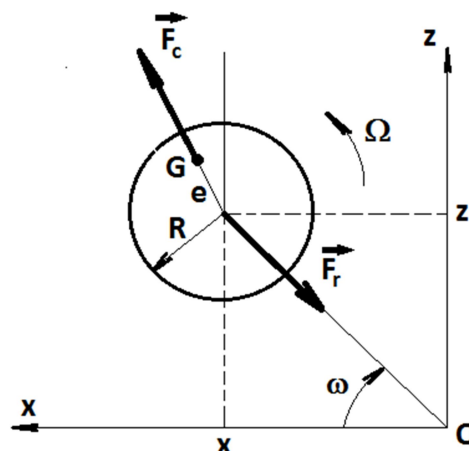


Figure 10. Plan d'oscillations (xoz).

**1.4.2. Modèle avec paliers flexibles cas isotrope**

Reprenons le modèle de JEFFCOTT et considérons les paliers flexibles et isotropes c.à.d. les caractéristiques sont identiques dans les 2 directions Ox et Oz.

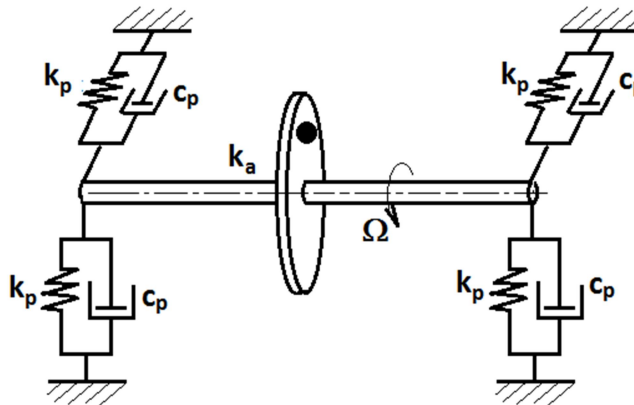


Figure 11. Modèle avec paliers flexibles et isotropes.

Qui pourra être remplacé par l'oscillateur suivant :

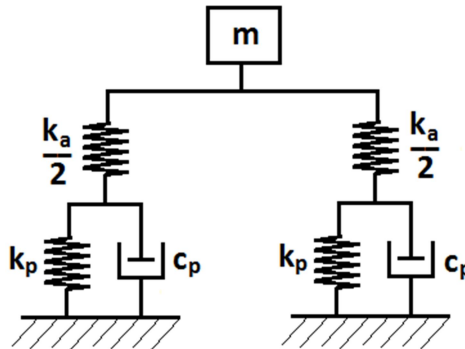


Figure 12. Oscillateur dans chaque direction.

$$k = k_x = k_z = \frac{2k_a \cdot k_p}{2k_a + k_p} \text{ et } c_x = c_z = 2c_p$$

**1.4.3. Modèle avec paliers flexibles cas anisotrope**

$$k_x \neq k_z \text{ et } c_x \neq c_z$$

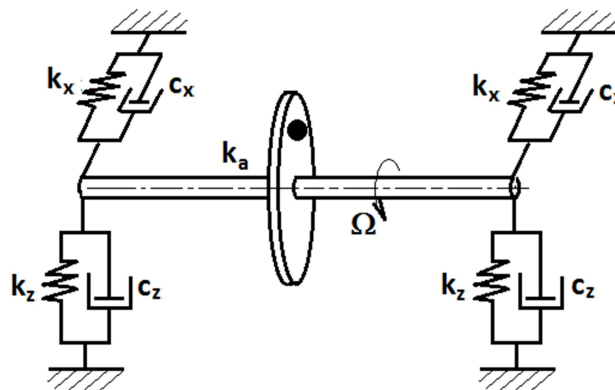


Figure 13. Modèle avec paliers flexibles et anisotropes.

**1.5. Caractéristiques des éléments du rotor**

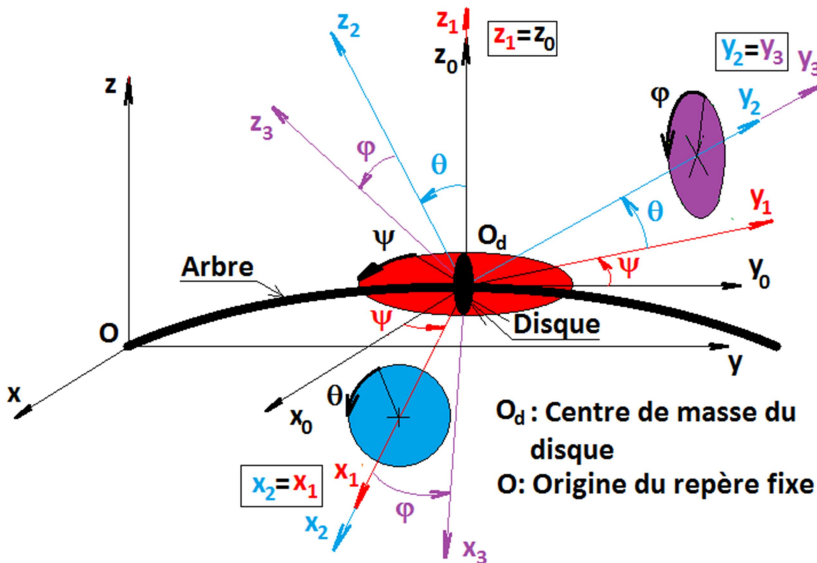
Un rotor est, d'une manière générale, constitué Introduction à la dynamique des rotors comportant un ou plusieurs disques. En outre il comporte un balourd ou il est soumis à une autre source de forces extérieures.

Les équations du mouvement sont obtenues à partir des énergies cinétiques et de déformation des composants du rotor et de l'application de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i$$

**1.5.1. Le disque rigide**

Le disque est habituellement considéré rigide (pas de flexibilité) et donc caractérisé par son énergie cinétique seulement. Pour la déterminer on doit calculer le vecteur de vitesse de rotation. On considère pour cela un repère galiléen R(O,x,y,z) lié au rotor indéformé et un autre repère mobile R'(O<sub>d</sub>,x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>,z<sub>1</sub>) lié au disque.



**Figure 14.** Repère de référence du disque sur l'arbre flexible.

Ainsi pour déterminer l'orientation du disque on effectue les rotations successives suivantes :

- \* La précession  $\psi$  :  
Rotation autour de l'axe  $O_d z_0$  qui fait passer la position de  $(O_d, x_0, y_0, z_0)$  à  $(O_d, x_1, y_1, z_1 = z_0)$
- \* La nutation  $\theta$  :  
Rotation autour l'axe  $O_d x_1$  qui fait passer la position de  $(O_d, x_1, y_1, z_1)$  à  $(O_d, x_2 = x_1, y_2, z_2)$
- \* La rotation propre  $\phi$  :  
Rotation autour de l'axe  $O_d y_2$  qui fait passer la position de  $(O_d, x_2, y_2, z_2)$  à  $(O_d, x_3, y_3 = y_2, z_3)$

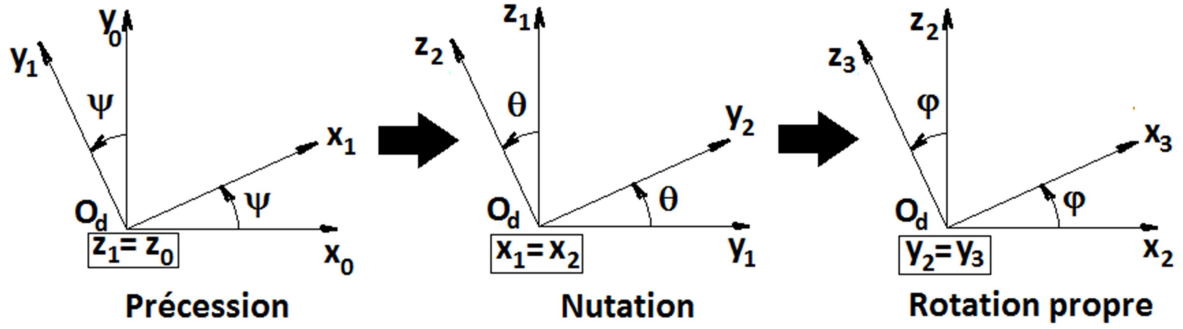


Figure 15. Détails des rotations du disque (Angles d'Euler).

Le vecteur de vitesse de rotation s'écrit:  $\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\phi}\vec{y}_3$  (1)

$\vec{z}_1$ ,  $\vec{x}_2$  et  $\vec{y}_3$  sont les vecteurs unitaire des axes  $(O_d z_1)$ ,  $(O_d x_2)$  et  $(O_d y_3)$ .

On a intérêt à exprimer le vecteur de vitesse de rotation dans le repère  $(O_d, x_3, y_2, z_3)$ . Pour cela on détermine les expressions des vecteurs unitaires  $\vec{z}_1$  et  $\vec{x}_2$  en fonction des vecteurs unitaires du repère  $(O_d, x_3, y_2, z_3)$  à l'aide des représentations donnés sur les figures (Fig. 14 et Fig.15).

$$\vec{x}_2 = \cos\phi \vec{x}_3 - \sin\phi \vec{z}_3 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 &= \sin\theta \vec{y}_2 + \cos\theta \vec{z}_2 = \sin\theta \vec{y}_3 + \cos\theta(\sin\phi \vec{x}_3 + \cos\phi \vec{z}_3) \\ \vec{z}_1 &= \cos\theta \sin\phi \vec{x}_3 + \sin\theta \vec{y}_3 + \cos\theta \cos\phi \vec{z}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Le vecteur vitesse de rotation s'écrit donc :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{x_3} \\ \omega_{y_3} \\ \omega_{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \cos\theta \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \cos\phi - \dot{\theta} \sin\phi \end{pmatrix} \quad (4)$$

Le disque tourne autour de son axe principal à la vitesse constante  $\Omega$  d'où  $\dot{\phi} = \Omega$

En admettant que la flexion de l'arbre est faible et les angles  $\psi$  et  $\theta$  sont petits, on peut faire les approximations  $\cos\theta \approx 1$  et  $\sin\theta \approx \theta$ . l'expression du vecteur vitesse de rotation devient :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ \Omega + \dot{\psi} \theta \\ \dot{\psi} \cos\phi - \dot{\theta} \sin\phi \end{pmatrix} \quad (5)$$

Donc l'énergie cinétique en rotation du disque  $T_d^{rot}$  s'écrit:

$$\begin{aligned} T_d^{rot} &= \frac{1}{2} I_{dx_0} \omega_{x_0}^2 + \frac{1}{2} I_{dy_0} \omega_{y_0}^2 + \frac{1}{2} I_{dz_0} \omega_{z_0}^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{dx_0} (\dot{\psi} \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi)^2 + \frac{1}{2} I_{dy_0} (\Omega + \dot{\psi} \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{dz_0} (\dot{\psi} \cos\phi - \dot{\theta} \sin\phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{dx_0} (\dot{\psi}^2 \sin^2\phi + \dot{\theta}^2 \cos^2\phi + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos\phi \sin\phi) + \frac{1}{2} I_{dy_0} (\Omega^2 + \dot{\psi}^2 \theta^2 + 2\dot{\psi}\theta \Omega) + \\ &\quad \frac{1}{2} I_{dz_0} (\dot{\psi}^2 \cos^2\phi + \dot{\theta}^2 \sin^2\phi - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos\phi \sin\phi) \end{aligned} \quad (6)$$

Où  $I_{dx_0}$ ,  $I_{dy_0}$  et  $I_{dz_0}$  représentent les moments d'inertie du disque par rapport à ses axes principaux d'inertie.

Comme le disque est symétrique on a  $I_{dx_0} = I_{dz_0}$  et le terme  $\dot{\psi}^2 \theta^2$  qui est d'un ordre élevé peut être négligé.

$$T_d^{rot} = \frac{1}{2} I_{dx_0} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{dy_0} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \quad (7)$$

Le centre  $O_d$  du disque est en translation par rapport au repère fixe  $(O, x, y, z)$ . En admettant que le déplacement se fait selon les directions de  $Ox$  et  $Oz$ , il peut être localisé par les coordonnées  $u$  et  $w$ . Avec sa masse égale à  $m_d$ , le disque a son énergie cinétique de translation donnée par :

$$T_d^{trans} = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \quad (8)$$

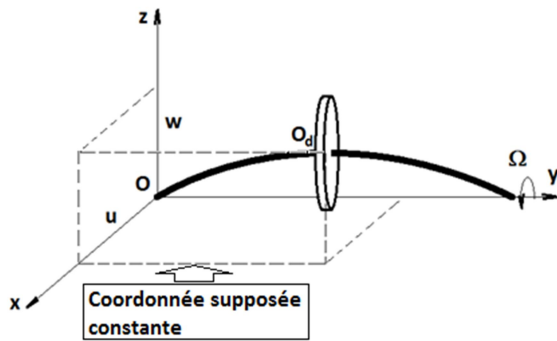


Figure 15. Disque en translation.

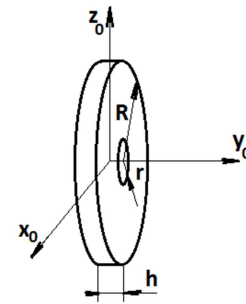


Figure 16. Géométrie du disque.

L'énergie cinétique totale du disque :

$$T_d^{tot} = T_d^{rot} + T_d^{trans}$$

$$T_d^{tot} = \frac{1}{2} I_{dx_0} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{dy_0} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) + \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \quad (9)$$

Les caractéristiques d'inertie du disque se donnent comme suit:

Sa densité volumique est  $\rho_d$

Sa masse  $m_d = \pi h \rho_d (R^2 - r^2)$

Son tenseur d'inertie :

$$I_d = \begin{bmatrix} I_{dx_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_d}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_d}{2} (R^2 + r^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_d}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2) \end{bmatrix}$$

### 1.5.2. L'arbre flexible

L'arbre qui est flexible est considéré comme une poutre de section circulaire et caractérisée par l'énergie cinétique (Rotation et translation) et l'énergie de déformation (Energie potentielle).

Analogiquement au disque considérons une portion élémentaire de l'arbre d'épaisseur  $dy$ , de section droite  $s$ , de masse volumique  $\rho$  et de moment d'inertie quadratique  $I_s$

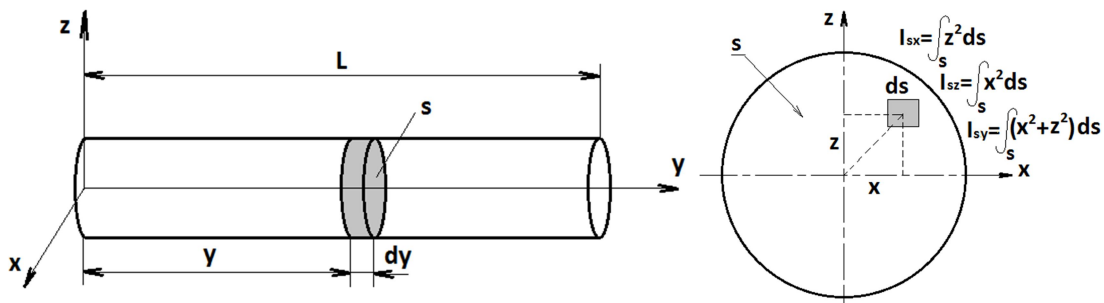


Figure 18. L'arbre flexible.

Dans cette portion de volume représentatif  $V_r = sdy$  considérons une masse élémentaire :  $dm_a = \rho dsdy$  de volume élémentaire  $V_e = dsdy$

Soient  $I_{ax}^{por}$  et  $I_{az}^{por}$  les moments d'inertie de la portion élémentaire de l'arbre:

$$I_{ax}^{por} = \int_{V_r} (y^2 + z^2) dm_a = \rho \left[ \int_s (y^2 + z^2) ds \right] dy = \rho \left[ \int_s z^2 ds \right] dy = \rho I_{sx} dy$$

Comme les moments quadratiques se calculent dans le plan  $xz$  :  $\int_S y^2 ds = 0$

$$I_{az}^{\text{por}} = (y^2 + x^2)dm_a = \rho \left[ \int_S x^2 ds \right] dy = \rho I_{sz} dy$$

Où  $I_{sx}$  et  $I_{sz}$  sont les moments d'inertie quadratiques de la section de la masse élémentaire de l'arbre.

Du fait de la symétrie de la section :  $I_{sx} = I_{sz}$  et  $I_{sx} = I_{sz} = I_s$

$$I_{ay}^{\text{por}} = \int_V (x^2 + z^2)dm_a = 2\rho I_s dy$$

L'énergie cinétique totale de l'arbre de longueur  $L$  s'écrit:

$$T_a^{\text{tot}} = \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s \Omega^2 \int_0^L dy + 2\rho I_s \int_0^L \Omega \dot{\psi} \theta dy$$

$$T_a^{\text{tot}} = \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s L \Omega^2 + 2\rho I_s \int_0^L \Omega \dot{\psi} \theta dy \quad (10)$$

$\frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u} + \dot{w})^2 dy$  : Energie cinétique d'une poutre en flexion.

$\frac{1}{2} \rho I_s \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$  : L'effet secondaire de l'inertie de rotation (poutre de Timoshenko)

$\frac{1}{2} \rho I_s L \Omega^2$  : Terme constant, représente l'énergie de rotation de l'arbre

$2\rho I_s \int_0^L \Omega \dot{\psi} \theta dy$  : Terme de l'effet gyroscopique

L'énergie de déformation de l'arbre se calcule en considérant celui-ci comme une poutre en flexion (On ne tient compte que des contraintes normales de flexion).

Soit la configuration géométrique illustrée par la figure (Fig. 19) où :

- $O_a$  est le centre de la section, en un point  $M(x', z')$  dans le repère  $(O_a, x', y', z')$  lié à la section.
- $u^*$  et  $w^*$  sont les déplacements du centre de la section par rapport au repère  $(O, x^*, y^*, z^*)$
- Le déplacement suivant  $y'$  est supposé négligeable.
- $u$  et  $w$  sont les déplacements du centre de la section par rapport au repère  $(O, x, y, z)$

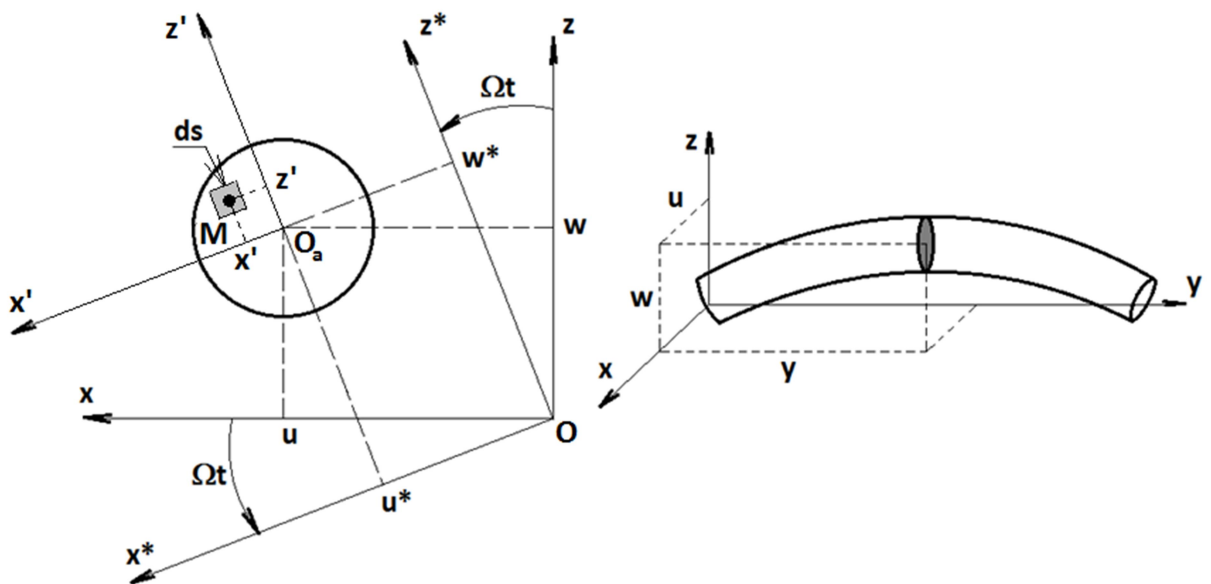


Figure 19. Géométrie de la section droite de l'arbre considéré comme une poutre.

Dans la figure (Fig. 19) la position de l'arbre fléchi peut être assimilée à une flexion composée dans les 2 plans  $x^*Oy^*$  et  $z^*Oy^*$  du repère  $(O, x^*, y^*, z^*)$

D'après la théorie des poutres les flèches  $u^*(y)$  et  $w^*(y)$  sont déterminées comme suit :

Dans le plan  $x^*Oy^*$  :

$$EI_s \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} = -M_z(y) \quad (11)$$

Dans le plan  $y^*Oz^*$  :

$$EI_s \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} = -M_x(y) \quad (12)$$

$E$  : Module de Young

$I_s$  : Moment d'inertie quadratique de la section

$M_z(y)$  : Moment de flexion dans le plan  $x^*Oy^*$  *Introduction à la dynamique des rotors*

$M_x(y)$  : Moment de flexion dans le plan  $y^*Oz^*$

Les contraintes au point  $M(x', z')$  sont :

Dans le plan  $x^*Oy^*$  :

$$\sigma_{yy}^{x'} = \frac{M_z(y)}{I_s} x' = E \varepsilon_{yy}^{x'} \quad (13)$$

Dans le plan  $y^*Oz^*$  :

$$\sigma_{yy}^{z'} = \frac{M_x(y)}{I_s} z' = E \varepsilon_{yy}^{z'} \quad (14)$$

$\sigma_{yy}^{x'}$  et  $\varepsilon_{yy}^{x'}$  : Respectivement la contrainte et la déformation au point  $M(x', z')$  dans le plan  $x^*Oy^*$

$\sigma_{yy}^{z'}$  et  $\varepsilon_{yy}^{z'}$  : Respectivement la contrainte et la déformation au point  $M(x', z')$  dans le plan  $y^*Oz^*$

En combinant les équations (11) et (13) :

$$\varepsilon_{yy}^{x'} = -x' \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} \quad (15)$$

De même :

$$\varepsilon_{yy}^{z'} = -z' \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} \quad (16)$$

Au point M la déformation longitudinale totale s'écrit :

$$\varepsilon_{yy} = -x' \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} - z' \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} \quad (11)$$

L'énergie de déformation de l'arbre :  $U_a = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} dV$

La loi de Hooke permet d'écrire :  $U_a = \frac{1}{2} E \int_V \varepsilon_{yy}^2 dV$

En remplaçant :

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{1}{2} E \int_V \left( -x' \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} - z' \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} \right)^2 dV \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[ x'^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} \right)^2 + z'^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} \right)^2 + 2x'z' \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} \right] ds dy \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \left[ \int_S x'^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} \right)^2 ds + \int_S z'^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} \right)^2 ds + 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} \int_S x'z' ds \right] dy \end{aligned}$$

*Introduction à la dynamique des rotors*

$$= \frac{E}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 \int_S x'^2 ds + \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \int_S z'^2 ds + 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} \int_S x'z' ds \right] dy$$

Avec  $I_{sx} = \int_S z'^2 ds$  ;  $I_{sz'} = \int_S x'^2 ds$  et  $\int_S x'z' ds$  moments d'inertie quadratiques de la section

$$\int_S x'z' ds = 0 \quad (\text{section circulaire symétrique})$$

Alors :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_{sz'} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_{sx'} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (12)$$

Pour exprimer l'énergie de déformation dans le repère fixe (O,x,y,z), on utilise les relations de passage  $u^*$  et  $w^*$  en fonction de  $u$  et  $w$  (sens direct de  $z$  à  $x$ )

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t$$

Sachant que  $I_{sx'} = I_{sz'} = I_s$

Donc l'écriture de l'énergie de déformation sera:

$$U_a = \frac{EI_s}{2} \int_0^L \left[ \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy =$$

$$\frac{EI_s}{2} \int_0^L \left[ \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right.$$

$$\left. - 2 \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} + \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right.$$

$$\left. + 2 \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dy$$

Finalement on aura :

$$U_a = \frac{EI_s}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (13)$$

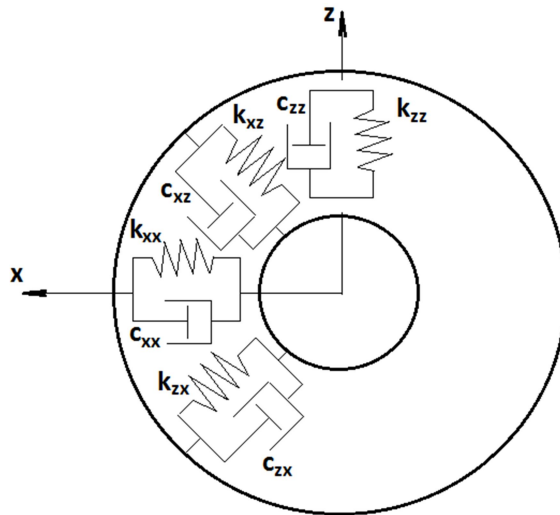
### 1.5.3. Les paliers

En général les paliers considérés comme non rigides (paliers hydrodynamiques), induisent des efforts extérieurs agissant sur l'arbre. Ces efforts sont de natures de raideur ou d'amortissement (Fig. 20).

Les caractéristiques associées à ces efforts sont :

\*  $k_{xx}$ ,  $k_{zz}$ ,  $c_{xx}$ ,  $c_{zz}$  les rigidités et les amortisseurs selon les directions  $x$  et  $z$  de l'arbre.

\*  $k_{xz}$ ,  $k_{zx}$ ,  $c_{xz}$ ,  $c_{zx}$  les rigidités et les amortissements dans une direction ( $x$  ou  $z$ ) mais affectés par l'autre direction. Ils représentent des constantes d'accouplement.



**Figure 20.** Amortissement et raideurs du palier.

Le travail virtuel de ces forces :

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \quad (14)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w$$

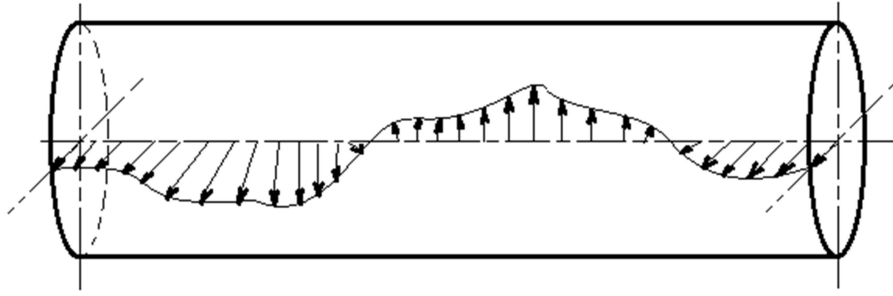
$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$F_u$  et  $F_w$  : Les composantes des forces généralisées.

### 1.5.3. Le balourd

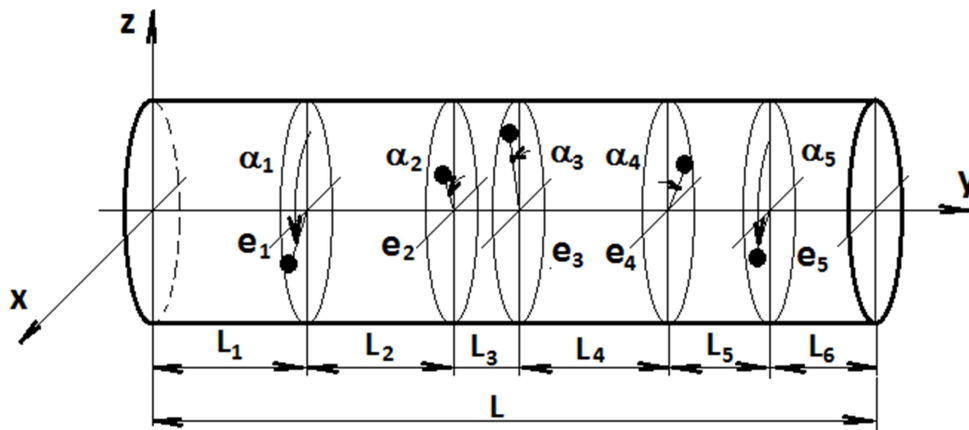
Un balourd est une quantité de matière se trouvant à une distance de l'axe de rotation et provoquant l'apparition des forces d'inertie centrifuges. Pratiquement toute pièce présente un balourd plus ou moins important. Les principales causes sont:

1. Défauts de conception :
  - Tolérance excessive sur la cotation des pièces (excentricité, jeu, etc ...),
  - Asymétrie de rotation (vilebrequin, mandrin, etc ...).
2. Défauts de fabrication :
  - Non homogénéité des matériaux utilisés (soufflure, inclusions, etc ...)
  - Tolérances d'usinage (circularité, concentricité, etc ...).
3. Défauts de montage :
  - Asymétrie du montage des pièces (montage par clavette, goupilles, etc ...),
  - Mauvais montages de pièces nécessitant un jeu.
4. Défauts de service :
  - Usure due à un enlèvement de matière (meule) ,
  - Modification de la masse par dépôt (encrassement, corrosion, etc ...),
  - Influences thermiques.



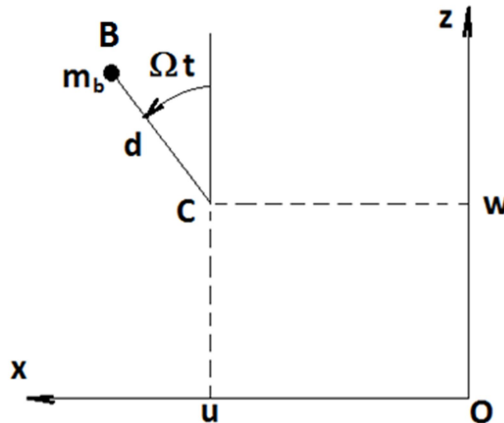
**Figure 21.** Répartition longitudinale du balourd sur un arbre.

En réalité le balourd se répartit le long de l'axe de rotation de l'arbre (Fig. 21). Pour modéliser tel cas on peut utiliser la méthode des masses concentrées (Fig. 22).



**Figure 22.** Répartition longitudinale du balourd modélisée par des masses concentrées.

Dans notre cas le balourd est une masse  $m_b$  se trouvant en un point A dans le plan du disque ( $xOz$ ) à une distance  $d$  de son centre géométrique. *Introduction à la dynamique des rotors* façon que la masse  $m_b$  est animée d'une rotation et d'une translation (Fig. 23).



**Figure 23.** Le balourd.

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} u + d\sin\Omega t \\ 0 \\ w + d\cos\Omega t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_B} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{u} + d\Omega\cos\Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega\sin\Omega t \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique du balourd :

$$T_b = \frac{1}{2}m_b[(\dot{u} + d\Omega\cos\Omega t)^2 + (\dot{w} - d\Omega\sin\Omega t)^2] \quad (16)$$

$$T_b = \frac{1}{2}m_b[\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + d^2\Omega^2 + 2\dot{u}d\Omega\cos\Omega t - 2\dot{w}d\Omega\sin\Omega t] \quad (17)$$

- Le terme  $d^2\Omega^2$  est constant n'a pas d'influence dans les équations de Lagrange (dérivée nulle)

- Le terme  $\frac{1}{2}m_b[\dot{u}^2 + \dot{w}^2]$  une fois ajoutée à l'énergie cinétique totale du rotor fait apparaître la masse du balourd comme négligeable devant la masse du rotor (masses de l'arbre et du disque) donc il est négligeable.

Alors l'expression de l'énergie cinétique du balourd s'écrit:

$$T_b = m_b[\dot{u}d\Omega\cos\Omega t - \dot{w}d\Omega\sin\Omega t] \quad (18)$$

## Chapitre 2 Modèle d'un rotor simple

### 2.1. Représentation du modèle simple

La figure (Fig.1) représente un modèle simple de rotor composé d'un arbre reposant sur des paliers rigides et non rigide, comportant un disque et un balourd. Le référentiel  $(O,x,y,z)$  est un repère galiléen, l'axe du rotor est suivant l'axe  $Oy$  et la vitesse de rotation de l'arbre est constante. Un seul degré de liberté est utilisé pour chaque déplacement dans les directions  $Ox$  et  $Oz$ . Le rotor est supposé en appui sur deux paliers rigides aux deux extrémités avec un palier non rigide situé à une longueur  $l_2$ . Il est constitué :

- d'un arbre de longueur  $L$  et de section circulaire constante ;
- d'un disque symétrique comportant un balourd, situé à  $y=l_1$  ;
- d'un palier non rigide situé à  $y=l_2$

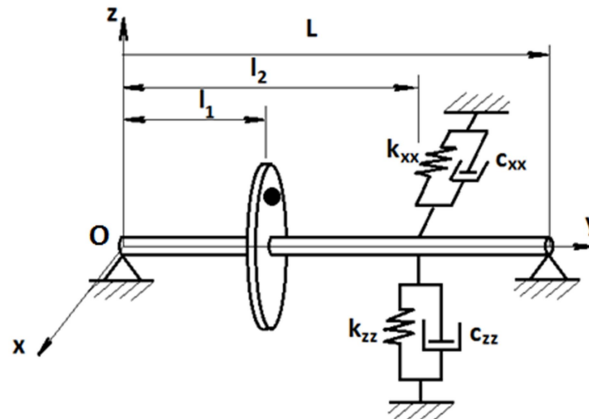


Figure 1. Modèle simple de rotor.

### 2.2. Mise en équations

Les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation et du travail virtuel ont été établies dans le chapitre précédent avec la remarque que le terme constant apparaissant dans l'expression de l'énergie cinétique est systématiquement omis.

Dans ce modèle on utilise la méthode de Rayleigh-Ritz pour séparer les variables. Les expressions des déplacements  $u$  et  $w$  dans les directions  $Ox$  et  $Oz$  s'écrivent après séparation des variables :

$$u(y, t) = f(y) q_1(t)$$

$$w(y, t) = f(y) q_2(t)$$

Où  $f(y)$  est la déformée modale choisie, et  $q_1$  et  $q_2$  sont des coordonnées généralisées indépendantes.

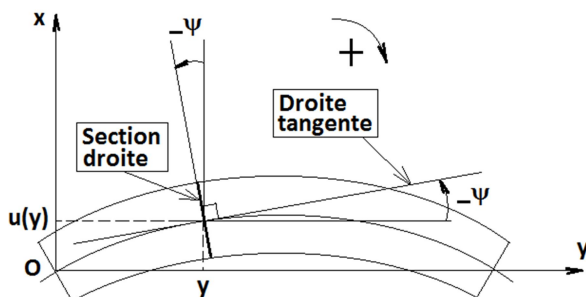


Figure 2a. Approximation de l'angle  $\theta$

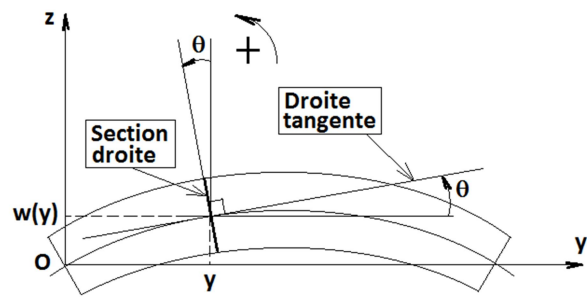


Figure 2b. Approximation de l'angle  $\psi$

Les figures (Fig. 2a et Fig. 2b) montrent les approximations des angles  $\theta$  et  $\psi$

- Figure (Fig. 2a) :

En un point  $(y, u(y))$  la dérivée de  $u(y)$  est la tangente de l'angle  $(-\psi)$ .

$$\operatorname{tg}(-\psi) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}(\psi) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

- Figure (Fig. 2b) :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Comme  $\theta$  et  $\psi$  sont petits on peut faire les approximations suivantes:

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \psi \approx \operatorname{tg}(\psi) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

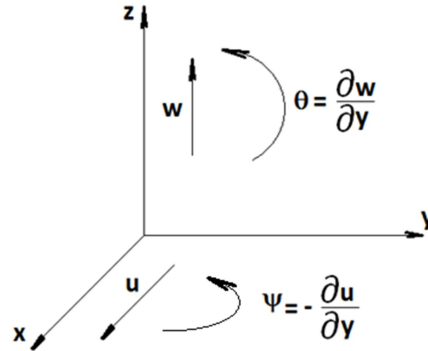


Figure 3. Les angles  $\theta$  et  $\psi$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -q_1 \frac{\partial f(y)}{\partial y} = -q_1 g(y)$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = q_2 \frac{\partial f(y)}{\partial y} = q_2 g(y)$$

Les dérivées secondes s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q_1 \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} = q_1 h(y)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q_2 \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} = q_2 h(y)$$

### 2.3. Exemple d'application

- Disque
  - Rayon intérieur  $R_{d1}=0.05$  m
  - Rayon extérieur  $R_{d2}=0.2$  m
  - Epaisseur  $h=0.05$  m
  - $\rho=7800$  Kg/m<sup>3</sup>
  - $l_1=L/3$
  - Masse  $m_d = \rho\pi(R_{d2}^2 - R_{d1}^2)h = 45.92$  Kg
  - Inerties:  $I_{dx} = I_{dz} = \frac{m_d}{12}(3R_{d1}^2 + 3R_{d2}^2 + h^2)=4,97.10^{-1}$  Kg.m<sup>2</sup>
  - $I_{dy} = \frac{m_d}{2}(R_{d1}^2 + R_{d2}^2)=9.76.10^{-1}$  Kg.m<sup>2</sup>
- Arbre
  - Longueur  $L=0.8$  m
  - Rayon de section droite  $R_a=0.01$  m
  - $\rho=7800$  Kg/m<sup>3</sup>
  - $E=2 \times 10^{11}$  Pa
  - Aire de la section droite  $S = \pi R_a^2=7.85 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>
  - Moment d'inertie quadratique (diamétral)  $I_s = \frac{\pi R_a^4}{4} = 4,90.10^{-6}$  m<sup>4</sup>
- Balourd
  - Masse  $m_b=10^{-4}$  Kg
  - Distance  $d=0.15$ m
- Palier

Raideur  $k_{xx}=0$   $k_{zz}=5 \times 10^5$  N/m

Les fonctions de déplacement sont celles du premier mode d'une poutre, de section constante, en flexion et appuyée aux deux extrémités :

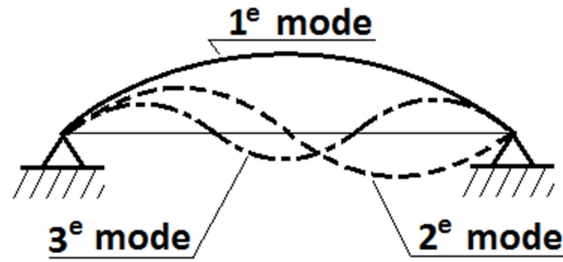


Figure 4. Les 3 premiers modes de vibration.

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{0,4} = \sin 3,925y$$

L'énergie cinétique totale T de l'ensemble mobile composé respectivement de l'arbre, disque et du balourd :

$$T = T_a + T_d + T_b$$

$$T = \left[ \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + 2 \rho I_s \int_0^L \Omega \psi \dot{\theta} dy \right] + \left[ \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + I_{dy'} \Omega \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \right] + m_b [\dot{u} d \Omega \cos \Omega t - \dot{w} d \Omega \sin \Omega t] \quad (1)$$

$$T = 1.225 \int_0^L (q_1^2 \sin^2 3,925y + q_2^2 \sin^2 3,925y) dy + 9,911 \cdot 10^{-2} \int_0^L (q_1^2 \cdot 15,405 \cos^2 3,925y + q_2^2 \cdot 15,405 \cos^2 3,925y) dy - 0,249 \int_0^L 15,405 \Omega q_1 \cos^2 3,925y \cdot q_2 dy + 0,0471 (15,405 q_1^2 \cos^2 3,925l_1 + 15,405 q_2^2 \cos^2 3,925l_1) - 0,976 \cdot 15,405 \Omega q_1 \cos^2 3,925l_1 \cdot q_2 + 22,961 (q_1^2 \sin^2 3,925l_1 + q_2^2 \sin^2 3,925l_1) + 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot \Omega (q_1 \sin 3,925l_1 \cdot \cos \Omega t - q_2 \sin 3,925l_1 \cdot \sin \Omega t)$$

$$T = 18.494 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 5,324 \Omega \dot{q}_1 q_2 + 1.299 \cdot 10^{-5} \Omega [\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t] \quad (2)$$

L'énergie de déformation :

$$U_a = 3.02 \cdot 10^6 (q_1^2 + q_2^2) \quad (3)$$

Le travail virtuel dû à la raideur  $k_{zz}$

$$\delta W = -3.75 \cdot 10^5 q_2 \delta q_2$$

$$F_{q_1} = 0$$

$$F_{q_2} = -3.75 \cdot 10^5 q_2$$

### 2.3.1. Modèle symétrique

Le modèle est dit symétrique si les matrices de masse, de l'effet gyroscopique et de rigidité sont symétriques, comme une raideur suivant la direction Oz du palier hydrodynamique est donnée cela rendra le système d'équations différentielles asymétrique. Pour nous mettre dans le cas symétrique dans cet exemple on considère :

$k_{xx} = 0$  et on prendra  $k_{zz} = 0$  (palier sans amortissement  $c_{zz} = c_{xx} = 0$ )

Le lagrangien :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i}$$

$$\begin{cases} 36.86\ddot{q}_1 + 0.24\Omega\dot{q}_2 + 6.05 * 10^6 q_1 = 1.3 * 10^{-5} \Omega^2 \sin\Omega t \\ 36.86\ddot{q}_2 - 0.24\Omega\dot{q}_1 + 6.05 * 10^6 q_2 = 1.3 * 10^{-5} \Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (4)$$

Qui s'écrit sous la forme générale:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = C\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = C\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (5)$$

Avec :

$$m = 36.86 ; a = 0.24 \text{ et } k = 6.05 * 10^6$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ a & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = C\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin\Omega t \\ \cos\Omega t \end{bmatrix} \quad (6)$$

La 1<sup>e</sup> matrice est la matrice de masse, la 2<sup>e</sup> est la matrice de l'effet gyroscopique et la 3<sup>e</sup> est la matrice de raideur.

### 2.3.2. Détermination des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation

L'étude des solutions homogènes (sans membre gauche) permet de calculer les fréquences naturelles qui permettent de trouver les vitesses critiques à l'aide du diagramme de Campbell. Pour cela on cherche les solutions qui vérifient le système homogène :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} q_{1h} = \overline{A}_1 \cos(\omega t + \Phi_1) \\ q_{2h} = \overline{A}_2 \cos(\omega t + \Phi_2) \end{cases} \quad (8)$$

Qui peut se mettre sous forme complexe :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \exp(j\omega t) \\ q_{2h} = A_2 \exp(j\omega t) \end{cases} \quad (9)$$

Avec  $A_1 = \overline{A}_1 \exp(j\Phi_1)$  et  $A_2 = \overline{A}_2 \exp(j\Phi_2)$

Cette solution complexe est insérée dans le système d'équations (8) :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1h} - a\Omega\dot{q}_{2h} + kq_{1h} = 0 \\ m\ddot{q}_{2h} + a\Omega\dot{q}_{1h} + kq_{2h} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

On aura :

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Le système (10) est linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont  $A_1$  et  $A_2$  avec un paramètre  $\Omega$  selon lequel se discutent les solutions de celui-ci

En utilisant la méthode du déterminant :

\*Si  $\det \neq 0$  on a  $A_1 = A_2 = 0$  alors  $q_{1h} = q_{2h} = 0$  solution à rejeter car elle n'est pas utile .

\*\* Si  $\det = 0$  on a  $A_1 = \frac{0}{0}$  et  $A_2 = \frac{0}{0}$  formes indéterminées ! cela veut dire que les solutions cherchées de  $A_1$  et  $A_2$  sont non triviales.

$$\det = \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

$$m^2\omega^4 - (2km + a^2\Omega^2)\omega^2 + k^2 = 0 \quad (13)$$

(13) est l'équation caractéristique.

\* A l'arrêt ( $\Omega = 0$ ) (13) devient :

$$m^2\omega^4 - 2km\omega^2 + k^2 = 0 \quad (14)$$

Et la solution double 
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15)$$

\*\* En rotation ( $\Omega \neq 0$ ) l'équation (13) présente un discriminant positif donc deux solutions positives :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_0^2}{a^2\Omega^2}}\right)} \quad (16)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_0^2}{a^2\Omega^2}}\right)} \quad (17)$$

Il est aisé de remarquer que :

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$$

N'oublions pas la remarque que (12) permet d'écrire :

$$k - m\omega^2 = a\Omega\omega \quad (18)$$

A chacune des valeurs  $\omega_1$  et  $\omega_2$  correspond un mode :

- 1<sup>e</sup> mode  $\omega = \omega_1$ , les quantités correspondantes :  $A_{11}$ ;  $A_{21}$ ;  $q_{1h1}$  et  $q_{2h1}$

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{ja\Omega\omega_1}{k - m\omega_1^2} = \frac{ja\Omega\omega_1}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} \quad (19)$$

Avec  $\omega_1 < \omega_0$  la quantité  $\omega_0^2 - \omega_1^2$  est positive.

Et d'après (17), (18) s'écrira :

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}}{A_{21}} &= \frac{\overline{A_{11}} \exp(j\Phi_{11})}{\overline{A_{21}} \exp(j\Phi_{21})} = j = \exp(j\frac{\pi}{2}) \\ \frac{\overline{A_{11}}}{\overline{A_{21}}} \exp(j(\Phi_{11} - \Phi_{21})) &= \exp(j\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Ou cela donnera :

$$\overline{A_{11}} = \overline{A_{21}} \quad \text{et} \quad \Phi_{21} = \Phi_{11} - \frac{\pi}{2} \quad (20)$$

D'où l'on peut écrire :

$$q_{1h1} = \overline{A_{11}} \cos(\omega_1 t + \Phi_{11}) \quad (21)$$

$$q_{2h1} = \overline{A_{11}} \cos(\omega_1 t + \Phi_{21}) = \overline{A_{11}} \cos\left(\omega_1 t + \Phi_{11} - \frac{\pi}{2}\right) = \overline{A_{11}} \sin(\omega_1 t + \Phi_{11}) \quad (22)$$

Donc les déplacements  $u(t,y)$  et  $w(t,y)$  s'écrivent :

$$u(t,y) = q_{1h1} f(y) = \overline{A_{11}} \cos(\omega_1 t + \Phi_{11}) \sin \frac{\pi y}{L} \quad (23)$$

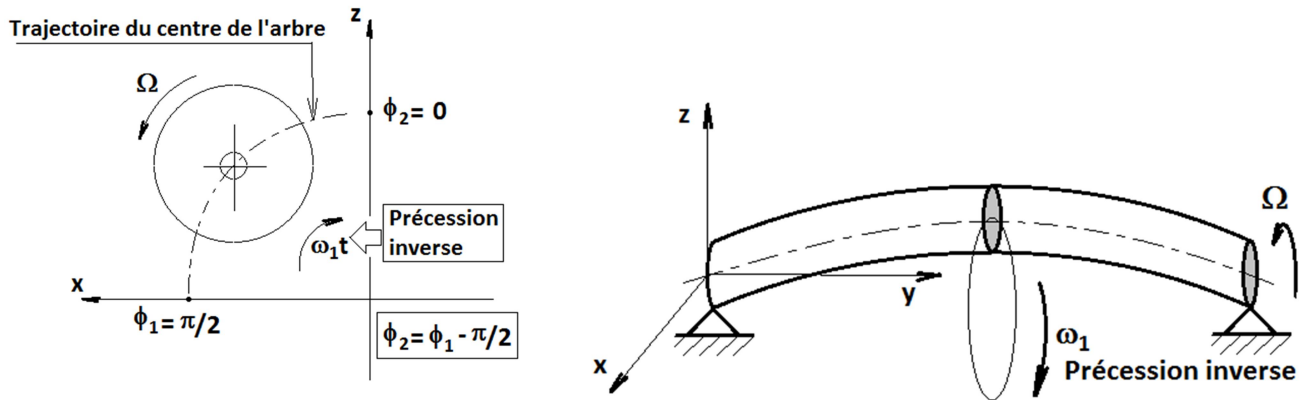
$$w(t,y) = q_{2h1} f(y) = \overline{A_{11}} \sin(\omega_1 t + \Phi_{11}) \sin \frac{\pi y}{L} \quad (24)$$

Le mouvement suivant l'axe Ox est en avance de  $\frac{\pi}{2}$  sur le mouvement selon l'axe Oz mais sont de mêmes amplitudes. Les points se trouvant sur l'axe du rotor décrivent des courbes circulaires allant de Ox vers Oz.

Ces points tournent en sens opposé à celui de la

**Modèle d'un rotor simple**

précession inverse ou rétrograde (Fig. 5).



**Figure 5.** Précession inverse.

- 2<sup>e</sup> mode  $\omega = \omega_2$ , les quantités correspondantes :  $A_{12}; A_{22}; q_{1h2}$  et  $q_{2h2}$

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{ja\Omega\omega_2}{k - m\omega_2^2} = \frac{ja\Omega\omega_2}{m(\omega_0^2 - \omega_2^2)} \quad (25)$$

Avec  $\omega_2 > \omega_0$  la quantité  $\omega_0^2 - \omega_2^2$  est négative.

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = -j \quad (26)$$

Donnant ainsi :

$$\overline{A_{12}} = \overline{A_{22}} \quad \text{et} \quad \Phi_{22} = \Phi_{12} + \frac{\pi}{2} \quad (27)$$

$$q_{1h2} = \overline{A_{12}} \cos(\omega_2 t + \Phi_{12})$$

$$q_{2h2} = \overline{A_{22}} \cos(\omega_2 t + \Phi_{22}) = \overline{A_{22}} \cos\left(\omega_2 t + \Phi_{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\overline{A_{12}} \sin(\omega_2 t + \Phi_{12}) \quad (28)$$

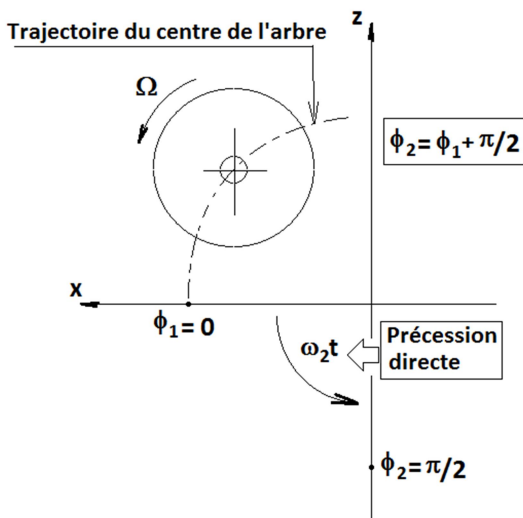
Donc les déplacements  $u(t, y)$  et  $w(t, y)$  s'écrivent :

$$u(t, y) = q_{1h2} f(y) = \overline{A_{12}} \cos(\omega_2 t + \Phi_{12}) \sin \frac{\pi y}{L} \quad (29)$$

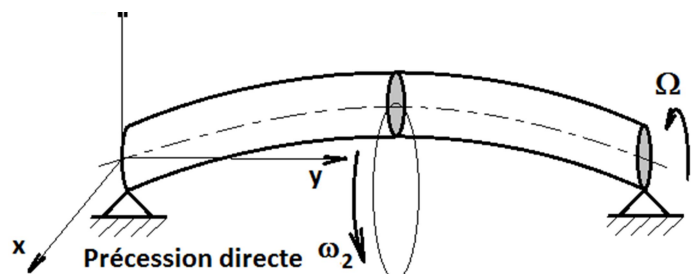
$$w(t, y) = q_{2h2} f(y) = -\overline{A_{12}} \sin(\omega_2 t + \Phi_{12}) \sin \frac{\pi y}{L} \quad (30)$$

Le mouvement suivant Ox est en retard par rapport au mouvement selon Oz de  $\pi/2$ , mais ils ont les mêmes amplitudes. Les points se trouvant sur l'axe du rotor décrivent, d'après Lissajous, décrivent des courbes circulaires allant de Oz vers Ox. Leur rotation a le même

sens que celui de la rotation du rotor. On dit dans cas qu'on a une précession directe (Fig.6)



**Figure6.** Précession directe.



### 2.3.3. Diagramme de Campbell

En utilisant les données du rotor symétrique l'équation caractéristique (13) s'écrit :

$$\omega^4 - (3.02 * 10^3 + 1.24 * 10^{-5} \Omega^2) \omega^2 + 2.29 * 10^6 = 0 \quad (31)$$

\*Les pulsations (fréquences) propres à l'arrêt sont :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_0 = 38.89 \text{ rds/s} \quad (32)$$

\*\* Les pulsations propres en rotation sont :

$$\omega_1 = \sqrt{1512.45 + 6.21 * 10^{-6} * \Omega^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4.87 * 10^8}{\Omega^2}} \right)} \quad (33)$$

$$\omega_2 = \sqrt{1512.45 + 6.21 * 10^{-6} * \Omega^2 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4.87 * 10^8}{\Omega^2}} \right)} \quad (34)$$

Par le diagramme de Campbell (Fig. 7) les fonctions  $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$  et  $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$  sont représentées coupées par les droites  $\omega = \Omega$  (cas synchrone) et  $\omega = s\Omega$  (cas asynchrone avec  $s=0,5$ ) et donnant les points d'intersections A et B pour le premier, C et D pour le deuxième.

Les valeurs des pulsations correspondantes à ces points sont obtenues en substituant  $\omega = s\Omega$  dans (13) :

$$s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - 2kms^2\Omega^4 + k^2 = 0 \quad (35)$$

Les solutions de (34) sont :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (36)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (37)$$

( $m = 36.86$  ;  $a = 0.24$  et  $k = 6.05 * 10^6$ )

Ou en utilisant les pulsations

( $\omega = s\Omega$ ) (35) et (36)

s'écrivent :

$\omega_1$  correspondant aux points A( $s=1$ ) et C( $s=0.5$ )

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (38)$$

Et  $\omega_2$  correspondant aux points B( $s=1$ ) et D( $s=0.5$ )

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (39)$$

Avec

Les vitesses de rotations

critiques :

Pour le point A :  $\Omega_{c1}(1) = 403.82 \text{ rds/s}$

Pour le point B :  $\Omega_{c2}(1) = 406.46 \text{ rds/s}$

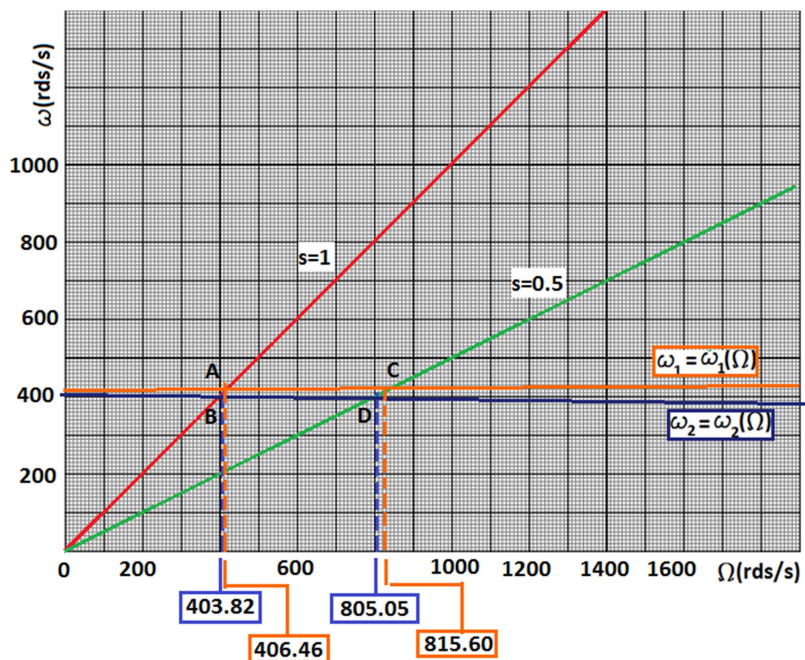


Figure 7. Diagramme de Campbell.

Pour le point C :  $\Omega_{c1}(0.5) = 805.05rds/s$  et pour le point D :  $\Omega_{c2}(0.5) = 815.60rds/s$

### 2.3.4. Réponse aux forces d'excitation

#### 2.3.4.1. Réponse au balourd (force synchrone)

Dans ce cas on considère la force centrifuge du balourd (2<sup>e</sup> membre)

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = C\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = C\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (40)$$

On cherche une solution particulière de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = \overline{A_{e1}} \cos(\Omega t + \Phi_{e1}) \\ q_{2p} = \overline{A_{e2}} \cos(\Omega t + \Phi_{e2}) \end{cases} \quad (41)$$

Qui peut s'écrire sous forme complexe:

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \exp j\Omega t \\ q_{2p} = A_{e2} \exp j\Omega t \end{cases} \quad (42)$$

Avec

$$\begin{cases} A_{e1} = \overline{A_{e1}} \exp j\Phi_{e1} \\ A_{e2} = \overline{A_{e2}} \exp j\Phi_{e2} \end{cases} \quad (43)$$

Qu'on insère dans le système (40) :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1p} - a\Omega\dot{q}_{2p} + kq_{1p} = C\Omega^2 \exp j(\Omega t - \pi/2) \\ m\ddot{q}_{2p} + a\Omega\dot{q}_{1p} + kq_{2p} = C\Omega^2 \exp j\Omega t \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Omega^2 \exp(-j\pi/2) \\ C\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

En utilisant les déterminants du système d'équations (45) :

$$A_{e1} = \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2 \exp(-j\pi/2) & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k - m\Omega^2) \exp(-j\pi/2) + jaC\Omega^4}{(k - m\Omega^2)^2 - a^2\Omega^4}$$

$$A_{e1} = \frac{-jC\Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \quad (46)$$

Et de même pour  $A_{e2}$  on trouve :

$$A_{e2} = \frac{C\Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \quad (47)$$

Comme dans le cas du système homogène, en employant (46) et (47) :

$$\Phi_{e1} = -\frac{\pi}{2} ; \quad \Phi_{e2} = 0 \quad \text{et} \quad A_{e1} = A_{e2} = \frac{C\Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \quad (48)$$

Donc :

$$q_{1p} = A_{e1} \sin\Omega t \quad \text{et} \quad q_{2p} = A_{e2} \cos\Omega t \quad (49)$$

Les points situés sur l'axe du rotor effectuent des orbites avec précession directe.

L'annulation du dénominateur (47) donne la vitesse critique :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m - a}} \quad (50)$$

(50) montre l'unicité de la valeur critique  $\Omega_c$  qui correspondant à  $\Omega_{c2}$  à  $s=1$  le point B (Fig.6) et  $\Omega_c$  rend les déplacements indéfinis.

La réponse au balourd s'exprime comme suit :

$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{1.3 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{1.195 \cdot 10^6 - 11.42 \Omega^2} \quad (51)$$

Avec la valeur de la vitesse critique :

$$\Omega_c = 406.46 \text{ rds/s} \quad (52)$$

Remarquons que la fonction  $A_{e1}(\Omega)$  admet la limite  $\frac{c}{m-a}$  quand  $\Omega$  croit (tend vers l'infini)

Alors :

$$|A_{e1}| = |A_{e2}| = \frac{c}{m-a} = \frac{1.3 \cdot 10^{-5}}{36.62} = 3.54 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (53)$$

Construisons la réponse du balourd  $A_{e1}(\Omega)$  ou  $A_{e2}(\Omega)$  (Fig.7)

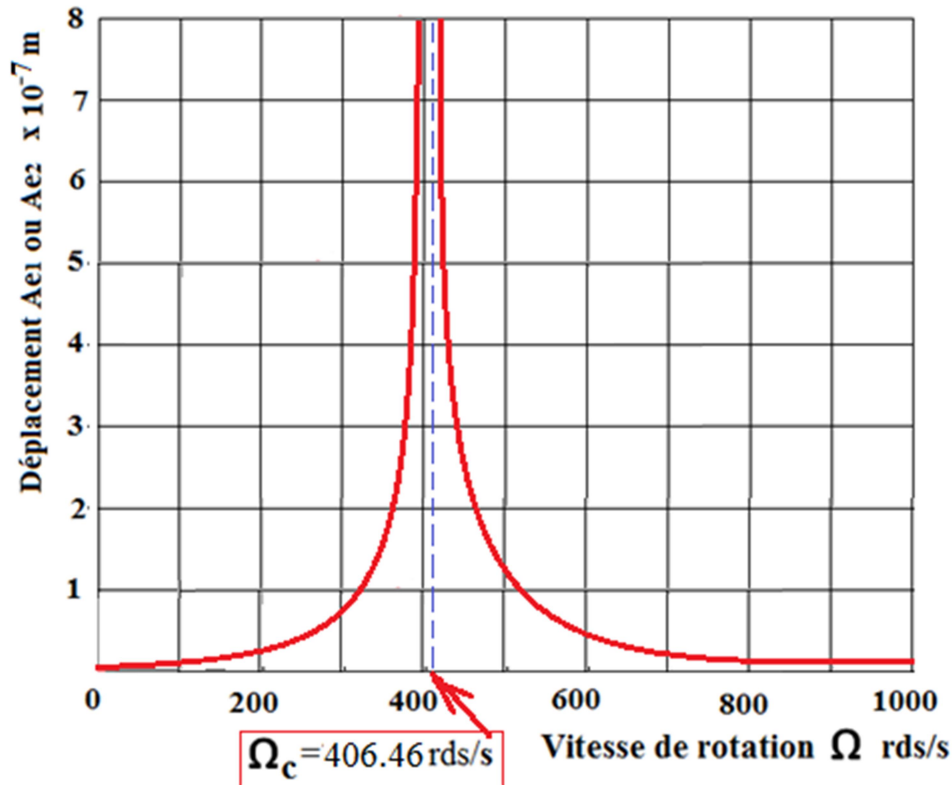


Figure 8. Réponse du balourd.

### 2.3.4.2. Réponse à une force asynchrone

Il se peut que le rotor soit excité, pendant son fonctionnement, par une force asynchrone. C'est une force d'amplitude constante  $F_{00}$  à une vitesse  $s\Omega$  différente de celle du rotor.

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_{00} f(y) \sin(s\Omega t) \\ F_{00} f(y) \cos(s\Omega t) \end{pmatrix} \quad (54)$$

Si le point d'application de la force est situé à une longueur  $l$ :

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_{00} f(l) \sin(s\Omega t) \\ F_{00} f(l) \cos(s\Omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \sin(s\Omega t) \\ F_0 \cos(s\Omega t) \end{pmatrix} ; \text{ avec } F_0 = F_{00} f(l) \quad (55)$$

Le système d'équations différentielles s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F_0 \sin(s\Omega t) \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = F_0 \cos(s\Omega t) \end{cases} \quad (56)$$

La démarche est la même que précédemment :

On cherche une solution particulière de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = \overline{A_{e1}} \cos(s\Omega t + \Phi_{e1}) \\ q_{2p} = \overline{A_{e2}} \cos(s\Omega t + \Phi_{e2}) \end{cases} \quad (57)$$

Qui peu s'écrire sous forme complexe:

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \exp js\Omega t \\ q_{2p} = A_{e2} \exp js\Omega t \end{cases} \quad (58)$$

Avec

$$\begin{cases} A_{e1} = \overline{A_{e1}} \exp j\Phi_{e1} \\ A_{e2} = \overline{A_{e2}} \exp j\Phi_{e2} \end{cases} \quad (59)$$

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1p} - a\Omega\dot{q}_{2p} + kq_{1p} = F_0 \exp j(s\Omega t - \pi/2) \\ m\ddot{q}_{2p} + a\Omega\dot{q}_{1p} + kq_{2p} = F_0 \exp js\Omega t \end{cases} \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} k - ms^2\Omega^2 & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k - ms^2\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \exp(-j\pi/2) \\ F_0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

En utilisant les déterminants du système d'équations (59) :

$$A_{e1} = \frac{\begin{vmatrix} F_0 \exp(-j\pi/2) & -jas\Omega^2 \\ F_0 & k - ms^2\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - ms^2\Omega^2 & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k - ms^2\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{F_0(k - ms^2\Omega^2) \exp(-j\pi/2) + jaF_0\Omega^2}{(k - ms^2\Omega^2)^2 - a^2s^2\Omega^4} =$$

$$\frac{jF_0(-k + ms^2\Omega^2 + as\Omega^2)}{[(k - ms^2\Omega^2)^2 + as\Omega^2][(k - ms^2\Omega^2)^2 - as\Omega^2]}$$

$$A_{e1} = \frac{-jF_0}{k + (as - ms^2)\Omega^2} \quad (62)$$

$$A_{e2} = \frac{F_0}{k + (as - ms^2)\Omega^2} \quad (63)$$

En employant (62) et (63) :

$$\Phi_{e1} = -\frac{\pi}{2} ; \quad \Phi_{e2} = 0 \quad \text{et} \quad A_{e1} = A_{e2} = \frac{F_0}{k + (as - ms^2)\Omega^2} \quad (64)$$

Donc :

$$q_{1p} = A_{e1} \sin(s\Omega t) \quad \text{et} \quad q_{2p} = A_{e2} \cos(s\Omega t) \quad (65)$$

Il apparait comme dans le cas précédent qu'il y'a précession directe pour les points situés sur l'axe du rotor effectuent des orbites circulaires.

La vitesse critique rendant le rotor instable :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{s(m-a)}} \quad (66)$$

#### 2.4. Modèle dissymétrique et amorti

Les rotors qui sont généralement supportés par des paliers hydrodynamiques sont amortis et l'amortissement le plus important est celui de type visqueux.

Le modèle amorti est dissymétrique si  $k_{xx} \neq k_{zz}$  et  $c_{xx} \neq c_{zz}$ .

Considérons un rotor amorti et dissymétrique (avec  $c_{xz} = c_{zx} = k_{xz} = k_{zx} = 0$ )

Si le palier est situé à une distance  $y = y_0$

L'expression du travail virtuel est :

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{zz}w\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w \quad (67)$$

Avec :

$$u(y, t) = f(y)q_1(t) \quad (68)$$

$$w(y, t) = f(y)q_2(t) \quad (69)$$

$$\delta W = -k_{xx}f^2(y_0)q_1\delta q_1 - k_{zz}f^2(y_0)q_2\delta q_2 - c_{xx}f^2(y_0)\dot{q}_1\delta q_1 - c_{zz}f^2(y_0)\dot{q}_2\delta q_2 \quad (70)$$

Donc les forces du palier agissant sont :

$$\begin{pmatrix} F_{q_1} \\ F_{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{xx}f^2(y_0)q_1 - c_{xx}f^2(y_0)\dot{q}_1 \\ -k_{zz}f^2(y_0)q_2 - c_{zz}f^2(y_0)\dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (71)$$

L'application des équations de Lagrange donne :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = -k_{xx}f^2(y_0)q_1 - c_{xx}f^2(y_0)\dot{q}_1 + m.d.\Omega^2\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = -k_{zz}f^2(y_0)q_2 - c_{zz}f^2(y_0)\dot{q}_2 + m.d.\Omega^2\cos\Omega t \end{cases} \quad (72)$$

Le système (71) peut s'écrire :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_{xx}f^2(y_0)\dot{q}_1 + kq_1 + k_{xx}f^2(y_0)q_1 = m.d.\Omega^2\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + c_{zz}f^2(y_0)\dot{q}_2 + kq_2 + k_{zz}f^2(y_0)q_2 = m.d.\Omega^2\cos\Omega t \end{cases} \quad (73)$$

Soit :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = m.d.\Omega^2\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = m.d.\Omega^2\cos\Omega t \end{cases} \quad (74)$$

Avec :

$$k_1 = k + k_{xx}f^2(y_0) \quad \text{et} \quad k_2 = k + k_{zz}f^2(y_0)$$

$$c_1 = c_{xx}f^2(y_0) \quad \text{et} \quad c_2 = c_{zz}f^2(y_0)$$

$$C = m.d$$

Note : k est le coefficient de raideur du rotor simple symétrique.

#### 2.4.1. Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation

Pour déterminer les pulsations propres considérons la forme homogène du système (73) :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = 0 \end{cases} \quad (75)$$

Puisqu'il s'agit d'un amortissement les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \exp(rt) \\ q_{2h} = A_2 \exp(rt) \end{cases} ; \quad r \text{ est complexe} \quad (76)$$

Après insertion dans le système (75) :

$$\begin{bmatrix} mr^2 + c_1r + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + c_2r + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

Le déterminant nul pour avoir les solutions non triviales :

$$m^2r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1m + k_2m + a^2\Omega^2 + c_1c_2)r^2 + (k_1c_2 + k_2c_1)r + k_1k_2 = 0 \quad (78)$$

Les racines de (78) sont de la forme :

$$r_i = -\lambda_i \pm j\omega_i \quad (79)$$

$\omega_i$  : i<sup>ème</sup> pulsation

$\lambda_i$  : i<sup>ème</sup> facteur d'amortissement visqueux

Les solutions de (75) seront de la forme :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \exp(-\lambda_i t) \cos(\omega_i t + \Phi_1) \\ q_{2h} = A_2 \exp(-\lambda_i t) \cos(\omega_i t + \Phi_2) \end{cases} \quad (80)$$

L'équation (76) se résous numériquement et il est recommandé d'écrire les coefficients d'amortissement  $c_{xx}$  et  $c_{zz}$  en fonction d'un coefficient  $\beta$  :

$$c_{xx} = c_{11}\beta \quad \text{et} \quad c_{zz} = c_{22}\beta \quad (81)$$

Et cela pour discuter les racines numériques de (78), les parties imaginaires des racines obtenues correspondent aux pulsations propres  $\omega_i$  qu'on représente sur le diagramme de Campbell.

### 2.4.2. Réponse au balourd

L'étude se fera comme dans les cas précédents, dans ce cas on considère la partie droite du système :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_{xx}f^2(y_0)\dot{q}_1 + kq_1 + k_{xx}f^2(y_0)q_1 = m.d.\Omega^2\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + c_{zz}f^2(y_0)\dot{q}_1 + kq_2 + k_{zz}f^2(y_0)q_2 = m.d.\Omega^2\cos\Omega t \end{cases} \quad (82)$$

L'excitation est harmonique de fréquence  $\Omega$ , donc la solution particulière est de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = \overline{A_{e1}}\cos(\Omega t + \Phi_{e1}) \\ q_{2p} = \overline{A_{e2}}\cos(\Omega t + \Phi_{e2}) \end{cases} \quad (83)$$

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1}\exp j\Omega t \\ q_{2p} = A_{e2}\exp j\Omega t \end{cases} \quad (84)$$

Avec :

$$A_{e1} = \overline{A_{e1}}\exp j\Phi_{e1} \quad \text{et} \quad A_{e2} = \overline{A_{e2}}\exp j\Phi_{e2} \quad (85)$$

En remplaçant (85) dans (82) :

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C.\Omega^2\exp(-j\frac{\pi}{2}) \\ C.\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Les solutions en fonction du déterminant :

$$A_{e1} = \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2\exp(-j\frac{\pi}{2}) & -ja\Omega^2 \\ C\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{vmatrix}} = \frac{-jC\Omega^2(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) + jaC\Omega^4}{(k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega)(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) - a^2\Omega^4} \quad (87)$$

$$A_{e2} = \frac{C\Omega^2(k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega) - aC\Omega^4}{(k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega)(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) - a^2\Omega^4} \quad (88)$$

## Chapitre 3 Modélisation des rotors par éléments finis

### 3.1. Introduction

La méthode des éléments comme méthode numérique a vu une expansion remarquable elle ne traite pas uniquement les problèmes de la mécanique mais aussi ceux d'écoulement de fluides, de transferts de chaleur, d'électromagnétisme,...

Aujourd'hui c'est l'un des outils les plus utilisés en simulation numérique du comportement des structures sous des chargements complexes mécanique qu'il soit, thermique ou couplé.

Les rotors n'échappent pas à cette application. Dans ce chapitre on verra la modélisation des rotors par cette méthode numérique. Le rotor doit être discrétisé en des éléments finis.

### 3.2. Expressions des énergies

Si le système se compose de N éléments les énergies s'écrivent :

- L'énergie de déformation :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (1)$$

- L'énergie cinétique :

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \quad (2)$$

- La fonction de dissipation :

$$R = \sum_{i=1}^N R_i \quad (3)$$

R est la fonction de dissipation (toute résistance au mouvement) se néglige quand la vitesse du rotor est grande.

#### 3.2.1. L'énergie de déformation d'un élément de l'arbre

L'énergie de déformation de l'élément i a pour expression :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^t \sigma dV \quad (4)$$

Soit d le vecteur de déplacement d'un point de l'élément tel que :

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_m \end{bmatrix} = [N(y)] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$d = [N(y)] \delta \quad (6)$$

[N(y)] : Matrice des fonctions de forme

$\delta$  : Vecteur des déplacements nodaux de l'élément.

Le tenseur de déformation se calcule suivant :

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial y} d = \frac{\partial}{\partial y} [N(y)] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_m \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial y} N(y) \right] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

(7) peut s'écrire :

$$\varepsilon = [B(y)] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_m \end{bmatrix} = [B(y)] \delta \quad (8)$$

En faisant appel à la loi de Hooke :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (9)$$

D : Matrice de rigidité du matériau

$$\sigma = D[B(y)]\delta \quad (10)$$

En remplaçant dans (4) :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_V ([B(y)]\delta)^t D[B(y)]\delta dV \quad (11)$$

$$U_i = \frac{1}{2} \delta^t \left[ \int_V B^t D B dV \right] \delta \quad (12)$$

Ecrivons :

$$U_i = \frac{1}{2} \delta^t K \delta \quad (13)$$

Avec :

$$K = \left[ \int_V B^t D B dV \right] \quad (14)$$

K : Matrice de rigidité de l'élément

### 3.2.2. L'énergie cinétique d'un élément de l'arbre

$$T_i = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV \quad (15)$$

$\rho$  : La masse volumique du matériau de l'élément

$v$  : La vitesse d'un point de l'élément de l'arbre

$$v = \frac{d}{dt}(d) = N(y) \frac{d}{dt}(\delta) = N(y) \dot{\delta} \quad (16)$$

$\dot{\delta}$  : Vecteur de vitesses nodales de l'élément.

En remplaçant en (15) :

$$T_i = \frac{1}{2} \int_V \rho (N \dot{\delta})^t N \dot{\delta} dV = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \left[ \int_V \rho N^t N dV \right] \dot{\delta} \quad (17)$$

Soit :

$$M = \left[ \int_V \rho N^t N dV \right] \quad (18)$$

M : Matrice de masse de l'élément de l'arbre

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t M \dot{\delta} \quad (19)$$

#### Remarque :

Le disque étant rigide, son énergie cinétique s'ajoute à celle de l'arbre.

### 3.3. Formulation matricielle

#### 3.3.1. L'élément disque

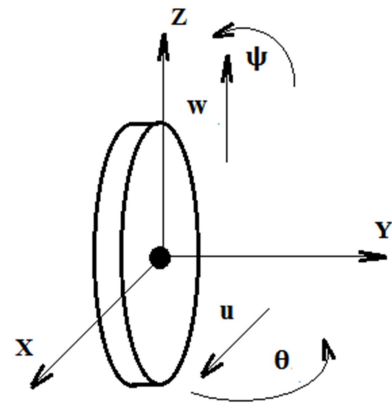
L'élément disque admet un nœud est supposé :

- Symétrique
- Rigide
- De masse  $M_d$ , de moments d'inertie respectifs :  $I_{dx}=I_{dz}$  et  $I_{dy}$

Son énergie cinétique s'écrit :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\theta\dot{\psi}) \quad (20)$$

Le terme  $I_{dy}\Omega^2$  est constant s'annulera en dérivation.



**Figure 1.** L'élément disque composé d'un nœud à 4 degrés de liberté.

L'élément disque ayant un seul nœud l'écriture des vecteurs de déplacement, de vitesse et d'accélération nodaux :

$$\delta = [u \quad w \quad \theta \quad \psi]^t \quad (21)$$

$$\dot{\delta} = [\dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^t \quad (22)$$

$$\ddot{\delta} = [\ddot{u} \quad \ddot{w} \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{\psi}]^t \quad (23)$$

Les 4 degrés de liberté formeront des matrices d'ordre 4\*4.

L'application des équations de Lagrange à l'élément disque :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} - \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix} : \text{Matrice de masse}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix} : \text{Matrice de l'effet gyroscopique}$$

### 3.3.2. L'élément arbre

L'élément fini arbre est supposé :

- Symétrique
- Assimilé à l'élément fini poutre
- De longueur  $l$ , de section  $s$  et de moment d'inertie quadratique  $I_s$
- De 2 nœuds à quatre degrés de liberté
- Le matériau est de masse volumique  $\rho$ , de constantes élastiques  $E$  et  $\nu$

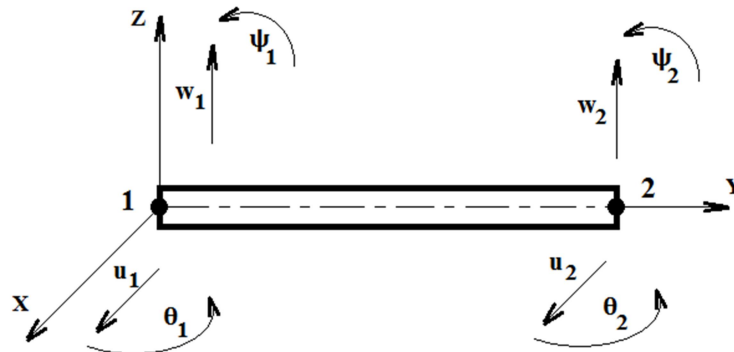


Figure 2. L'élément arbre à 2 nœuds et 4 degrés de liberté.

### 3.3.2. Fonctions d'interpolation

Les déplacements  $u, w, \theta$  et  $\psi$  s'expriment en polynômes de 3<sup>e</sup> degré en  $y$ :

$$u(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \quad (25)$$

La rotation  $\psi$  est obtenue par :

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (26)$$

$$\psi(y) = -a_1 - 2a_2 y - 3a_3 y^2 \quad (27)$$

Les constantes se déterminent par les conditions aux nœuds :

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow u = u_1 \\ y = 0 \Rightarrow \psi = \psi_1 \\ y = l \Rightarrow u = u_2 \\ y = l \Rightarrow \psi = \psi_2 \end{cases} \quad (28)$$

En remplaçant les conditions dans les expressions (25) et (27) on obtient :

$$\begin{cases} a_0 = u_1 \\ a_1 = -\psi_1 \\ a_2 = \frac{3}{l^2}(u_2 - u_1) + \frac{1}{l}(2\psi_1 + \psi_2) \\ a_3 = -\frac{2}{l^3}(u_2 - u_1) - \frac{1}{l^2}(\psi_1 + \psi_2) \end{cases} \quad (28)$$

Le déplacement  $u$  s'écrit :

$$u(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3}\right] u_1 + \left[-y + \frac{2y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2}\right] \psi_1 + \left[\frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3}\right] u_2 + \left[\frac{y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2}\right] \psi_2 \quad (29)$$

Ou :

$$u(y) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^u(y) \delta_i^u \quad (30)$$

La fonction déplacement  $u$  peut s'écrire sous forme matricielle :

$$u(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} & -y + \frac{2y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} & \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3} & \frac{y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ou autrement

$$u(y) = N_u(y) \delta^u \quad (32)$$

$$N_u(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} & -y + \frac{2y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} & \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3} & \frac{y^2}{l} - \frac{y^3}{l^2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$N_u(y)$  : Matrice des fonctions de forme  $\varphi_i^u(y)$

$$\delta^u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$\delta^u$  : Vecteur déplacement dans le plan XOY

En faisant de même pour la fonction déplacement  $w$  :

$$w(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3}\right] w_1 + \left[y - \frac{2y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2}\right] \theta_1 + \left[\frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3}\right] w_2 + \left[-\frac{y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2}\right] \theta_2 \quad (35)$$

$$w(y) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^w(y) \delta_i^w \quad (36)$$

$$w(y) = N_w(y) \delta^w \quad (37)$$

$$N_w(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} & y - \frac{2y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} & \frac{3y^2}{l^2} - \frac{2y^3}{l^3} & -\frac{y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\delta^w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$N_w(y)$  : Matrice des fonctions de forme  $\varphi_i^w(y)$

$\delta^w$  : Vecteur déplacement dans le plan YOZ

De même pour les angles  $\psi$  et  $\theta$  :

$$\psi(y) = \begin{bmatrix} \frac{6y}{l^2} - \frac{6y^2}{l^3} & 1 - \frac{4y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} & -\frac{6y}{l^2} + \frac{2y^2}{l^3} & -\frac{2y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\psi(y) = N_\psi(y) \delta^u = -\frac{dN_u(y)}{dy} \delta^u \quad (41)$$

$$N_\psi(y) = \begin{bmatrix} \frac{6y}{l^2} - \frac{6y^2}{l^3} & 1 - \frac{4y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} & -\frac{6y}{l^2} + \frac{6y^2}{l^3} & -\frac{2y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\theta(y) = \begin{bmatrix} -\frac{6y}{l^2} + \frac{6y^2}{l^3} & 1 - \frac{4y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} & \frac{6y}{l^2} - \frac{6y^2}{l^3} & -\frac{2y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\theta(y) = N_\theta(y) \delta^w = \frac{dN_w(y)}{dy} \delta^w \quad (44)$$

$$N_{\theta}(y) = \left[ -\frac{6y}{l^2} + \frac{6y^2}{l^3} \quad 1 - \frac{4y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} \quad \frac{6y}{l^2} - \frac{6y^2}{l^3} \quad -\frac{2y}{l} + \frac{3y^2}{l^2} \right] \quad (45)$$

### 3.3.3. Ecriture matricielle de l'énergie cinétique de l'élément arbre

L'énergie cinétique de l'arbre :

$$T_a = \frac{1}{2} \rho s \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + 2\rho I_s \int_0^l \Omega \dot{\psi} \theta dy + \rho I_s l \Omega^2 \quad (46)$$

Le terme  $\rho I_s l \Omega^2$  est constant s'annulera en dérivation.

$$T_a = \frac{1}{2} \rho s \int_0^l \left[ \delta^u{}^t N_u{}^t N_u \delta^u + \delta^w{}^t N_w{}^t N_w \delta^w \right] dy + \frac{1}{2} \rho I_s \int_0^l \left[ \delta^u{}^t \frac{d}{dy} N_u{}^t \frac{d}{dy} N_u \delta^u + \delta^w{}^t \frac{d}{dy} N_w{}^t \frac{d}{dy} N_w \delta^w \right] dy + 2\rho \Omega I_s \int_0^l \delta^u{}^t \frac{d}{dy} N_u{}^t \frac{d}{dy} N_w \delta^w dy \quad (47)$$

L'équation (47) peut s'écrire :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta^u{}^t M_1 \delta^u + \frac{1}{2} \delta^w{}^t M_2 \delta^w + \frac{1}{2} \delta^u{}^t M_3 \delta^u + \frac{1}{2} \delta^w{}^t M_4 \delta^w + \Omega \delta^u{}^t M_5 \delta^w \quad (47)$$

$M_1$  et  $M_2$  : Matrices de masse d'ordre 4\*4

$M_3$  et  $M_4$  : Matrices de l'effet secondaire d'inertie en rotation de la section par rapport au diamètre, elles sont d'ordre 4\*4

$M_5$  : Matrice de l'effet gyroscopique elle est d'ordre 4\*4

$$M_1 = \rho s \int_0^l [N_u{}^t N_u] dy \quad (48)$$

$$M_2 = \rho s \int_0^l [N_w{}^t N_w] dy \quad (49)$$

$$M_3 = \rho I_s \int_0^l \left[ \frac{d}{dy} N_u{}^t \frac{d}{dy} N_u \right] dy \quad (50)$$

$$M_4 = \rho I_s \int_0^l \left[ \frac{d}{dy} N_w{}^t \frac{d}{dy} N_w \right] dy \quad (51)$$

$$M_5 = 2\rho I_s \int_0^l \left[ \frac{d}{dy} N_u{}^t \frac{d}{dy} N_w \right] dy \quad (52)$$

Explicitons les matrices :  $M_1, M_2, M_3, M_4$  et  $M_5$

$$M_1 = \frac{\rho s l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & -22l \\ 13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$M_2 = \frac{\rho s l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$M_3 = \frac{\rho I_s}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$M_4 = \frac{\rho I_s}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$M_5 = \frac{\rho \Omega I_s}{15l} \begin{bmatrix} -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

En appliquant les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{dT_a}{d\delta_i} = [M_1 + M_2 + M_3 + M_4] \ddot{\delta} + M_5 \dot{\delta} \quad (58)$$

$\ddot{\delta}$  et  $\dot{\delta}$  vecteurs d'accélération généralisées et vitesses généralisées d'ordre 8\*1

$$\delta = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2]^t \quad (59)$$

Les matrices  $M_1, M_2, M_3, M_4$  et  $M_5$  sont d'ordre 4\*4 et les vecteurs généralisés  $\ddot{\delta}$  et  $\dot{\delta}$  sont d'ordre 8\*1, on a intérêt à remplacer la somme des 4 matrices par la somme de 2 matrices 8\*8 ( $M_c + M_g$ ) telles que :

$$M_c = M_1 + M_2 \quad (60)$$

$$M_g = M_3 + M_4 \quad (61)$$

Et de même remplaçons la matrice gyroscopique  $M_5$  d'ordre 4\*4 par une G 8\*8 telle que:

$$G = M_5 \quad (62)$$

$M_c$  : Matrice globale d'inertie

$M_g$  : Matrice globale d'effet secondaire d'inertie

$G$  : Matrice globale d'effet gyroscopique

$$M_c = \frac{\rho s l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l & 54 & 0 & 0 & 13l \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 \\ -22l & 0 & 0 & 4l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13l & 156 & 0 & 0 & 22l \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & -22l & 0 \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & -22l & 4l^2 & 0 \\ 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$M_g = \frac{\rho I_s}{30} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -3l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$G = \frac{\rho \Omega I_s}{15} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 3l & 0 & 0 & -4l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 3l & 0 & 0 & l^2 & -3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

**Chapitre 4 Vibrations en torsion des rotors**

**4.1. Introduction**

Dans le 1<sup>e</sup> chapitre on a considéré le (Whirling) dû essentiellement au balourd, dans ce chapitre on étudiera les vibrations dues à la torsion de l'arbre. Ce phénomène est très important, il est évident en particulier dans les mécanismes où la transmission de puissance et la vitesse sont élevées.

Les vibrations de torsion sont prédominantes lorsqu'il s'agit de grands disques montés sur des arbres relativement minces (par exemple, le volant d'inertie d'une presse à poinçonner) (Voir Fig. 1)

Les constructeurs doivent s'assurer d'une manière précise que les fréquences de torsion et des fréquences de fluctuation du chargement de torsion ne doivent pas coïncider avec les fréquences propres du rotor

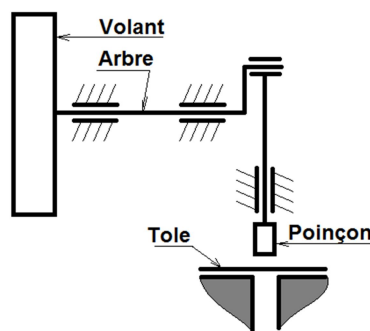


Figure 1. Schéma d'une presse à poinçonner.

**4.2. Modélisation du problème**

**4.2.1. Modèle avec masses concentrées**

**4.2.1.1. Hypothèses**

Du fait des grandes dimensions du disque vis-à-vis à celles de l'arbre, on peut négliger l'effet d'inertie de l'arbre et seule l'inertie du disque est considérée. D'autre part on considère que le disque est rigide et l'arbre est déformable (assimilé à un ressort).

Les forces de frottement aux paliers sont négligeables.

**4.2.1.2. Rotor simple avec un disque**

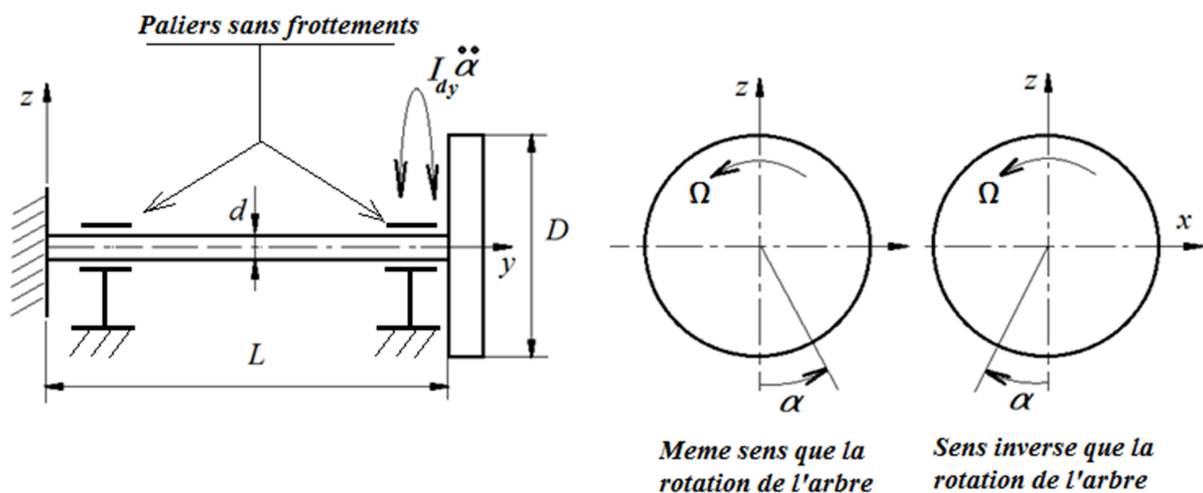


Figure 2. Rotor simple à un disque.

D'après la théorie des poutres (poutre de Timoshenko) le moment de torsion  $M_t$  appliqué à un arbre, de diamètre  $d$  et de longueur  $L$ , est donné par l'expression suivante :

$$M_t = G \frac{\alpha}{L} I_s = k_t \alpha \quad (1)$$

Où :

$G$  : Module d'élasticité transversale

$\alpha$  : Angle de torsion

$I_s$  : Moment quadratique polaire ( $I_s = \frac{\pi d^4}{32}$ )

$I_d$  : Moment d'inertie du disque

$k_t$  : La raideur en torsion de l'arbre  $k_t$  peut être écrite :

$$k_t = G \frac{I_s}{L} \quad (2)$$

La 2<sup>e</sup> loi de Newton permet d'écrire :

$$\sum \text{moments extérieurs} = \ddot{\alpha} I_d$$

$$-k_t \alpha = \ddot{\alpha} I_{dy} \quad (3)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{k_t}{I_{dy}} \alpha = 0 \quad (4)$$

(4) est l'équation du mouvement harmonique d'un système à un degré de liberté celui de la rotation du disque.

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k_t}{I_{dy}} = G \frac{I_s}{L I_{dy}} \quad (5)$$

$\omega_0 = \sqrt{G \frac{I_s}{L I_{dy}}}$  représente la fréquence propre du rotor en torsion

#### 4.2.1.3. Rotor simple avec deux disques

Le système a 2 degrés de liberté (2 disques).

Il est convenable de considérer chaque disque à part :

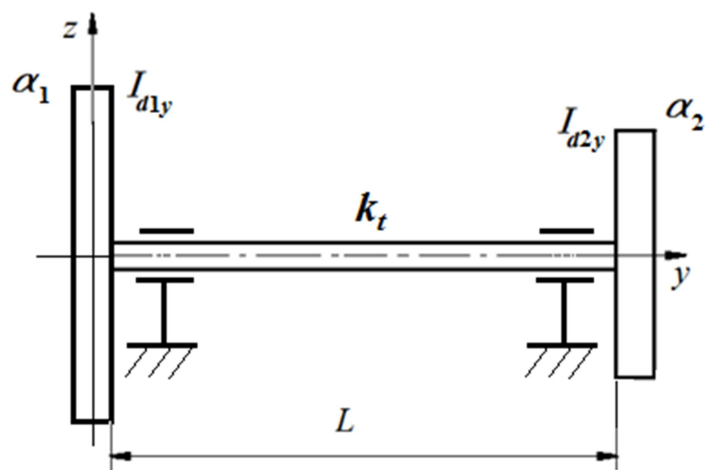


Figure 3. Rotor simple à 2 disques.

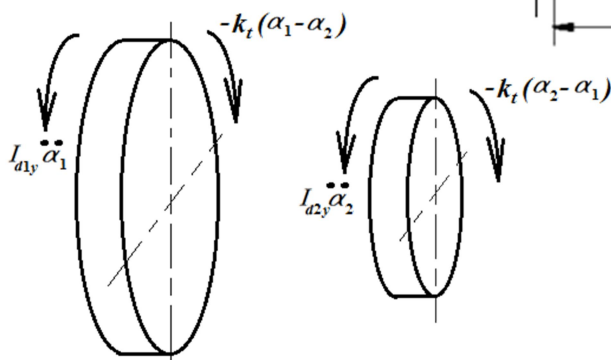


Figure 4. Les deux disques.

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} I_{d1y}\ddot{\alpha}_1 + k_t(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \\ I_{d2y}\ddot{\alpha}_2 + k_t(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} I_{d1y} & 0 \\ 0 & I_{d2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t & -k_t \\ -k_t & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Pour trouver les fréquences propres écrivons :

$$\begin{cases} \alpha_1 = A_1 \sin \omega_0 t \\ \alpha_2 = A_2 \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (8)$$

En remplaçant dans (7) :

$$\begin{bmatrix} -\omega_0^2 I_{d1y} & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 I_{d2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t & -k_t \\ -k_t & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} k_t - \omega_0^2 I_{d1y} & -k_t \\ -k_t & k_t - \omega_0^2 I_{d2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Le système d'équations (10) aura de solution si le déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} k_t - \omega_0^2 I_{d1y} & -k_t \\ -k_t & k_t - \omega_0^2 I_{d2y} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$(k_t - \omega_0^2 I_{d1y})(k_t - \omega_0^2 I_{d2y}) - k_t^2 = 0 \quad (12)$$

$$\omega_0^4 I_{d1y} I_{d2y} - k_t \omega_0^2 (I_{d1y} + I_{d2y}) = 0 \quad (13)$$

Les racines de l'équation (13) s'écrivent :

$$\omega_{01} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_t(I_{d1y} + I_{d2y})}{I_{d1y} I_{d2y}}} \quad (14)$$

- Cas de  $\omega_0 = \omega_{01}$

Le système d'équations (10) donne :

$$A_1 = A_2 \quad (15)$$

Les deux disques tournent dans le même sens avec la même amplitude, cela peut être illustré par la figure (Fig. 5)



Figure 5. Premier mode propre.

- Cas de  $\omega_0 = \omega_{02}$

Cela donne :

$$\left( k_t - \frac{k_t(I_{d1y} + I_{d2y})}{I_{d2y}} \right) A_1 = k_t A_2 \quad (16)$$

D'où :

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{I_{d1y}}{I_{d2y}} \quad (17)$$

L'équation (17) indique que les deux disques tournent dans deux sens contraires et de différentes amplitudes (Fig.6).

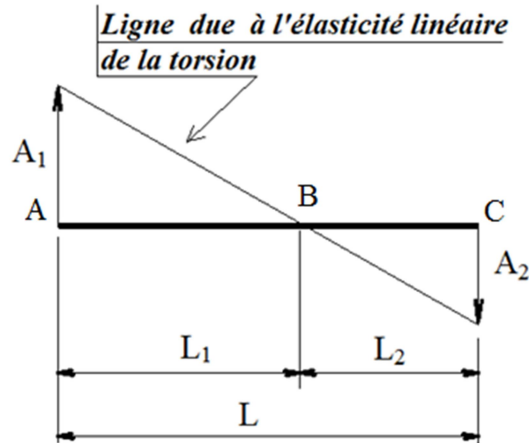


Figure 6. Deuxième mode propre.

Ainsi les deux disques vibrants forment deux systèmes de longueurs respectives  $L_1$  et  $L_2$  (Fig.7) et le point neutre B est appelé **nœud**.

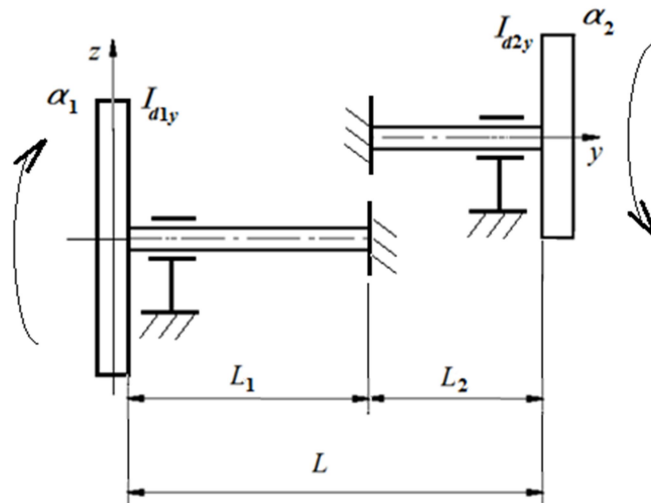


Figure 7. Les deux rotors élémentaires formés.

Du fait que les deux systèmes (les deux rotors formés) oscillent avec la même fréquence propre c.à.d.

$$\omega_{0\text{disque1}} = \omega_{0\text{disque2}} \quad (18)$$

(5) permet d'écrire pour les deux rotors :

$$\omega_{0\text{disque1}}^2 = \frac{k_{t1}}{I_{d1y}} = G \frac{I_s}{L_1 I_{d1y}} \quad (19)$$

$$\omega_{0\text{disque2}}^2 = \frac{k_{t2}}{I_{d2y}} = G \frac{I_s}{L_2 I_{d2y}} \quad (20)$$

(18) donne :

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{I_{d2y}}{I_{d1y}} \quad (21)$$

Récrivons (21) en revenant à (17) :

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{L_2}{L_1} \quad (22)$$

On peut déterminer les longueurs  $L_1$  et  $L_2$  en utilisant (19) et (20) et on obtient un système d'équations :

$$\begin{cases} L_1 = G \frac{I_s}{k_{t1}} \\ L_2 = G \frac{I_s}{k_{t2}} \end{cases} \quad \text{Avec } L_1 + L_2 = L \quad (23)$$

#### 4.2.1.4. Rotor simple avec arbre étagé et un disque

Considérons le rotor avec un arbre étagé (3 segments) (Fig.8) de données respectives  $\{d_1, I_{s1}, L'_1, k'_{t1}\}$  ;  $\{d_2, I_{s2}, L'_2, k'_{t2}\}$  et  $\{d_3, I_{s3}, L'_3, k'_{t3}\}$ , le disque de moment d'inertie  $I_{dy}$

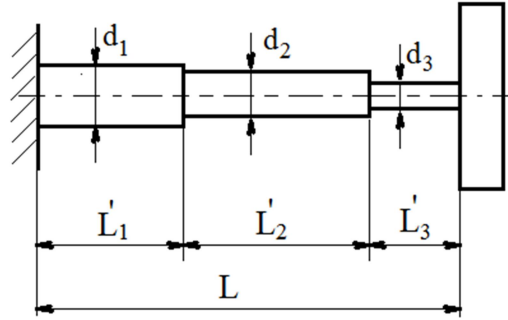


Figure 8. Rotor avec arbre étagé.

L'idée est de ramener l'arbre de la forme étagée à la forme simple (rotor équivalent) (Fig.9), de données suivantes  $\{d_e, I_{se}, L_e, k_{te}\}$

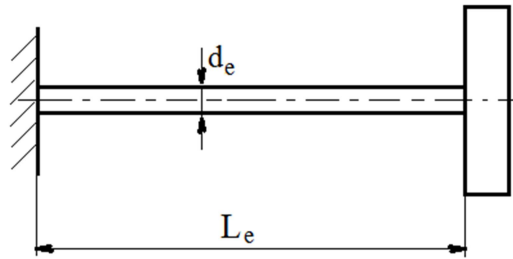


Figure 9. Rotor équivalent.

Les 3 parties de l'arbre étagé forment des ressorts de torsion en série, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{k_{te}} = \frac{1}{k'_{t1}} + \frac{1}{k'_{t2}} + \frac{1}{k'_{t3}} \quad (24)$$

En utilisant l'équation (2) l'équation (24) s'écrit :

$$\frac{L_e}{I_{se}} = \frac{L'_1}{I_{s1}} + \frac{L'_2}{I_{s2}} + \frac{L'_3}{I_{s3}} \quad (25)$$

Si on adopte comme valeur de l'arbre équivalent le diamètre du plus petit diamètre  $d_e = d_3$  alors :

$$I_{se} = I_{s3} \quad (26)$$

On peut calculer la longueur  $L_e$

$$L_e = I_{se} \left[ \frac{L'_1}{I_{s1}} + \frac{L'_2}{I_{s2}} + \frac{L'_3}{I_{s3}} \right] \quad (27)$$

La fréquence propre dans ce cas de type de rotor s'écrit :

$$\omega_0 = \sqrt{G \frac{I_{se}}{L_e I_{dy}}} = \sqrt{\frac{G}{I_{dy} \left[ \frac{L'_1}{I_{s1}} + \frac{L'_2}{I_{s2}} + \frac{L'_3}{I_{s3}} \right]}} \quad (28)$$

4.2.1.5. Rotor avec arbre étagé et deux disques

Il faut en premier déterminer l'arbre équivalent (voir 4.2.1.4) ensuite traiter le rotor comme rotor avec arbre normal et deux disques (voir 4.2.1.3) (Fig.10 et Fig.11)

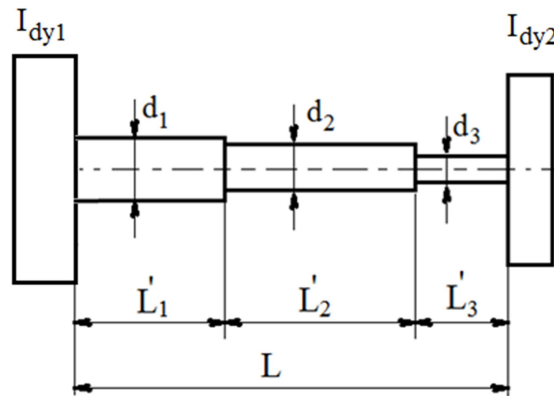


Figure 10. Rotor avec un arbre étagé et deux disques.

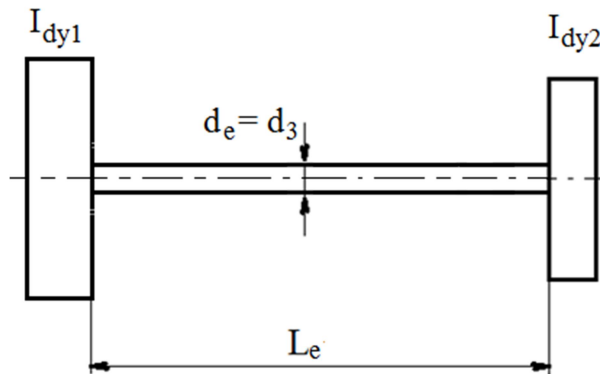


Figure 11. Rotor équivalent.

La fréquence propre du 2<sup>e</sup> mode du rotor équivalent est :

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_{te}(I_{d1y} + I_{d2y})}{I_{d1y}I_{d2y}}} \quad (29)$$

Le diagramme de déplacement des deux disques en 2<sup>e</sup> mode propre dans le cas du rotor équivalent :

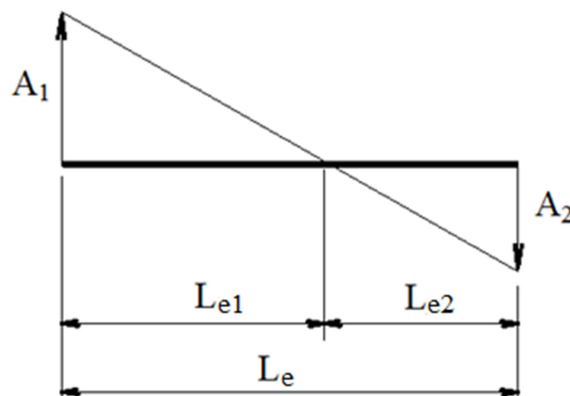


Figure 12. Rotor équivalent en 2<sup>e</sup> mode propre.

L'équation (23) permet d'écrire :

$$\begin{cases} L_{e1} = G \frac{I_{se}}{k_{te1}} \\ L_{e2} = G \frac{I_s}{k_{te2}} \end{cases} \quad \text{Avec } L_{e1} + L_{e2} = L_e \quad (30)$$

Avec :

$$\omega_{0disque1}^2 = \frac{k_{te1}}{I_{d1y}} \quad \text{et} \quad \omega_{0disque2}^2 = \frac{k_{te}}{I_{d2y}}$$

Malheureusement la connaissance de  $L_{e1}$  ou  $L_{e2}$  suffit de définir la position du nœud uniquement sur l'arbre équivalent.

Pour remédier à ce problème introduisons les distances  $m$  et  $n$  pour repérer le nœud sur l'arbre réel et les distances  $m_e$  et  $n_e$  sur l'arbre équivalent (Fig.13 et Fig.14)

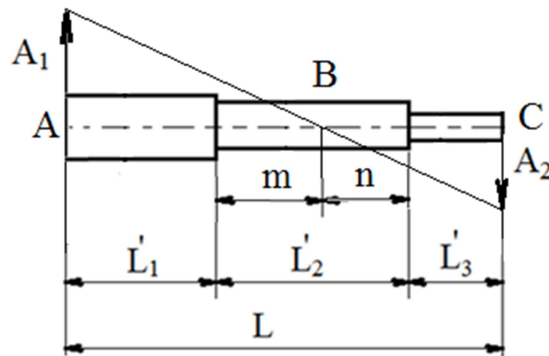


Figure 13. Localisation du nœud sur le rotor réel par  $m$  et  $n$

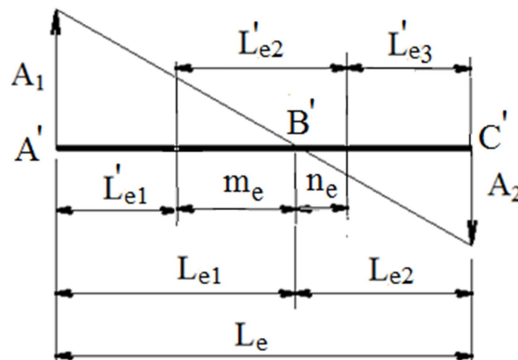


Figure 14. Localisation du nœud sur le rotor équivalent par  $m_e$  et  $n_e$

On admet que le nœud se trouve sur le 2<sup>e</sup> segment  $\{d_2, I_{s2}, L'_2, k'_{t2}\}$

$$L_e = I_{se} \frac{L'_1}{I_{s1}} + I_{se} \frac{L'_2}{I_{s2}} + I_{se} \frac{L'_3}{I_{s3}} \quad (31)$$

Et :

$$L_e = L'_{e1} + L'_{e2} + L'_{e3} \quad (32)$$

(30) et (31) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} L'_{e1} = \frac{I_{se}}{I_{s1}} L'_1 \\ L'_{e2} = \frac{I_{se}}{I_{s2}} L'_2 \\ L'_{e3} = \frac{I_{se}}{I_{s3}} L'_3 \end{cases} \quad (33)$$

Les relations (32) entre dimensions segments équivalents et réels permettent d'écrire :

$$\begin{cases} m_e = \frac{I_{se}}{I_{s2}} m \\ n_e = \frac{I_{se}}{I_{s2}} n \end{cases} \quad (34)$$

Sachant que le moment quadratique polaire  $I_{s2}$  du 2<sup>e</sup> segment apparaît dans (33) puisque le nœud est supposé situé sur le 2<sup>e</sup> segment.

Les équations (33) permettent d'écrire :

$$\frac{m_e}{n_e} = \frac{m}{n} \quad (35)$$

De la figure (Fig.14) on peut tirer :

$$\begin{cases} m_e = L_{e1} - L'_{e1} \\ n_e = L_{e2} - L'_{e3} \end{cases} \quad (36)$$

Il faut rappeler l'équation (18) qui apparaît utile :

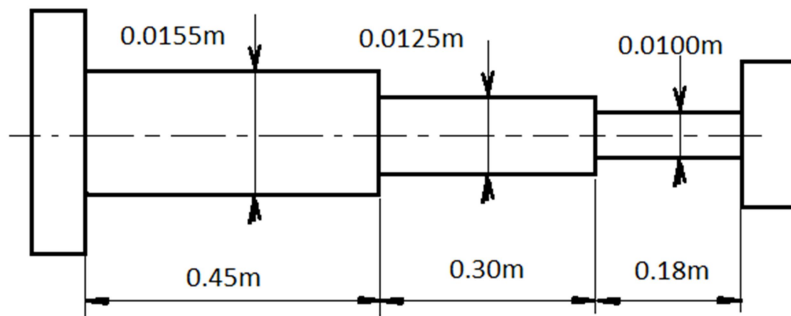
$$\frac{L_{e1}}{L_{e2}} = \frac{I_{d2y}}{I_{d1y}}$$

**Exemple**

$$I_{d1y} = 0.02Kg.m^4$$

$$I_{d2y} = 0.015Kg.m^4$$

Déterminer les fréquences propres et la position du nœud.



**4.2.1.6. Rotor simple avec trois disques**

La démarche est la même que précédemment (Fig.15 et Fig.16).

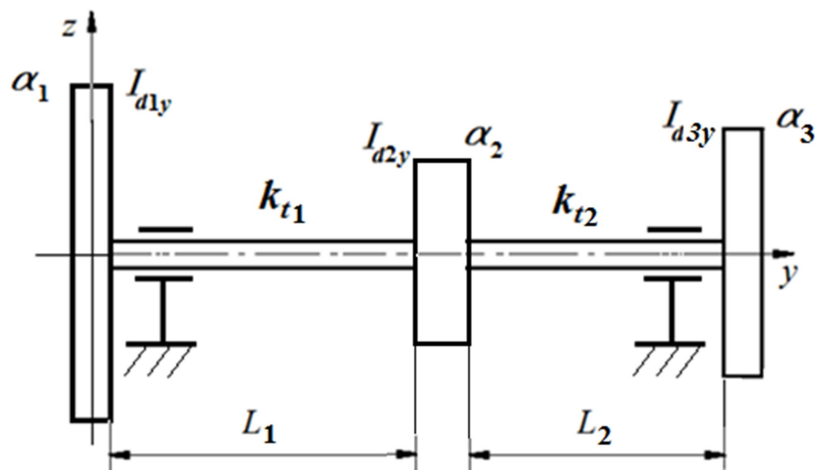


Figure 15. Rotor avec 3 disques

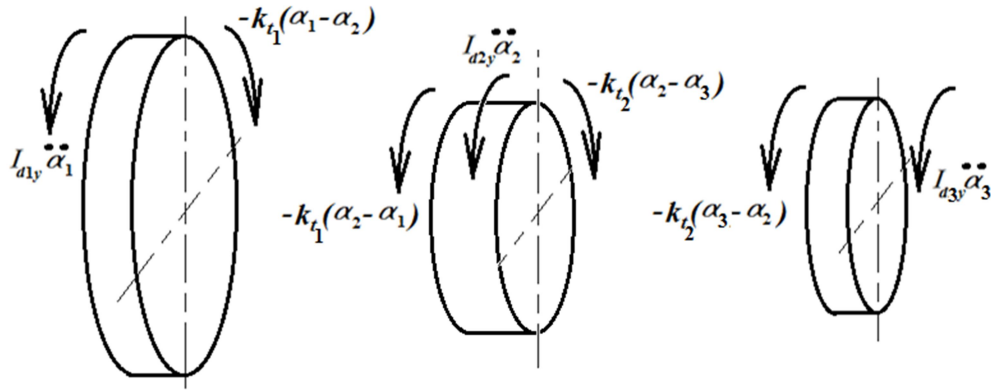


Figure 16. Isolation des trois disques.

Le système d'équations différentielles s'écrit :

$$-\omega_0^2 \begin{bmatrix} I_{d1y} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d3y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{t1} & -k_{t1} & 0 \\ -k_{t1} & k_{t1} + k_{t2} & -k_{t2} \\ 0 & -k_{t2} & k_{t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

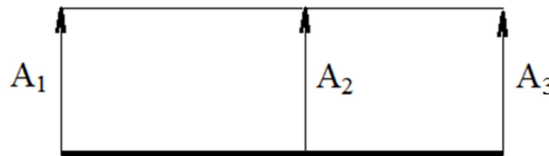
$$\omega_0^2 \left[ \omega_0^4 - \omega_0^2 \left( k_{t1} \frac{I_{d1y} + I_{d2y}}{I_{d1y} I_{d2y}} + k_{t2} \frac{I_{d2y} + I_{d3y}}{I_{d2y} I_{d3y}} \right) - \frac{k_{t1} k_{t2} (I_{d1y} + I_{d2y} + I_{d3y})}{I_{d1y} I_{d2y} I_{d3y}} \right] = 0 \quad (38)$$

Les 3 modes propres obtenus sont :

- $\omega_{01}^2 = 0$

En remplaçant dans le système (37) on obtient :

$$A_1 = A_2 = A_3 \quad (39)$$


 Figure 17. 1<sup>e</sup> mode propre.

- $\omega_{02}^2 =$

$$\frac{1}{2} \left[ k_{t1} \frac{I_{d1y} + I_{d2y}}{I_{d1y} I_{d2y}} + k_{t2} \frac{I_{d2y} + I_{d3y}}{I_{d2y} I_{d3y}} \right] - \sqrt{\frac{1}{4} \left[ k_{t1} \frac{I_{d1y} + I_{d2y}}{I_{d1y} I_{d2y}} + k_{t2} \frac{I_{d2y} + I_{d3y}}{I_{d2y} I_{d3y}} \right]^2 - \left[ \frac{k_{t1} k_{t2} (I_{d1y} + I_{d2y} + I_{d3y})}{I_{d1y} I_{d2y} I_{d3y}} \right]} \quad (40)$$

En remplaçant dans (37) on obtient :

$$(k_{t1} - \omega_{02}^2 I_{d1y}) A_1 - k_{t1} A_2 = 0 \quad (41)$$

L'équation (40) donne :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{k_{t1} - \omega_{02}^2 I_{d1y}}{k_{t1}} \quad (42)$$

Le système (37) donne une 2<sup>e</sup> équation :

$$-k_{t1} A_1 + [(k_{t1} + k_{t2}) - \omega_{02}^2 I_{d2y}] A_2 - k_{t2} A_3 = 0 \quad (43)$$

En remplaçant (41) dans (42) :

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\omega_{02}^4 I_{d1y} I_{d2y} - \omega_{02}^2 [(I_{d1y} + I_{d2y}) k_{t1} + I_{d1y} k_{t2}] + k_{t1} k_{t2}}{k_{t1} k_{t2}} \quad (44)$$

$$\bullet \omega_{03}^2 = \frac{1}{2} \left[ k_{t1} \frac{I_{d1y} + I_{d2y}}{I_{d1y} I_{d2y}} + k_{t2} \frac{I_{d2y} + I_{d3y}}{I_{d2y} I_{d3y}} \right] + \sqrt{\frac{1}{4} \left[ k_{t1} \frac{I_{d1y} + I_{d2y}}{I_{d1y} I_{d2y}} + k_{t2} \frac{I_{d2y} + I_{d3y}}{I_{d2y} I_{d3y}} \right]^2 - \left[ \frac{k_{t1} k_{t2} (I_{d1y} + I_{d2y} + I_{d3y})}{I_{d1y} I_{d2y} I_{d3y}} \right]} \quad (45)$$

Même procédure que pour le 2<sup>e</sup> mode :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{k_{t1} - \omega_{03}^2 I_{d1y}}{k_{t1}} \quad (46)$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\omega_{03}^4 I_{d1y} I_{d2y} - \omega_{03}^2 [(I_{d1y} + I_{d2y}) k_{t1} + I_{d1y} k_{t2}] + k_{t1} k_{t2}}{k_{t1} k_{t2}} \quad (47)$$

Un bon exemple pour voir les diagrammes des 3 modes propres est considéré ci-dessous :

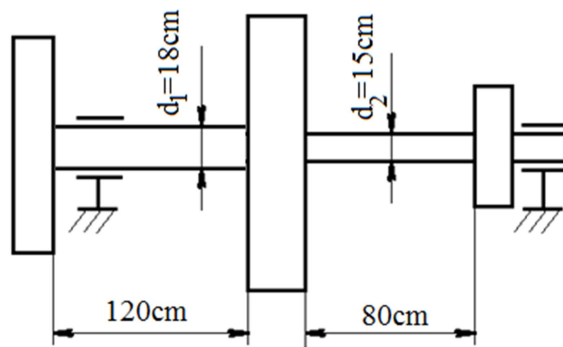


Figure 18. Exemple d'application.

$I_{d1y}$	45 Kg-m <sup>4</sup>
$I_{d2y}$	60 Kg-m <sup>4</sup>
$I_{d3y}$	15 Kg-m <sup>4</sup>
$L_1$	1,2 m
$L_2$	0,8 m
$d_1$	0,18 m
$d_2$	0,15 m
$G$	8,00E+10 Pa
$I_{s1}$	0,00010301 m <sup>4</sup>
$I_{s2}$	4,9676E-05 m <sup>4</sup>

$$k_{t1} = G \frac{I_{s1}}{L_1} = 2620,53 \text{ N/m}$$

$$k_{t2} = G \frac{I_{s2}}{L_2} = 2228,80 \text{ N/m}$$

1) 1<sup>e</sup> mode propre

$$\omega_{01}^2 = 0$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_1} = 1$$

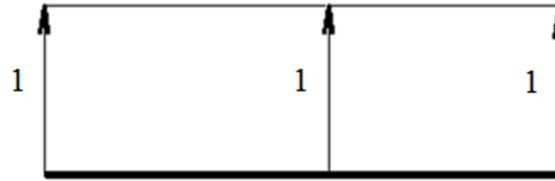


Figure 19. Premier mode.

2) 2<sup>e</sup> mode propre  
 $\omega_{02}^2 = 85.69(\text{rds/s})^2$

$$\frac{A_2}{A_1} = -0.47$$

$$\frac{A_3}{A_1} = -1.11$$

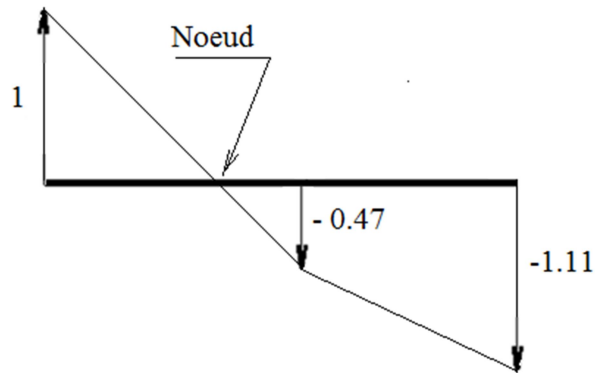


Figure 20. Deuxième mode.

2) 3<sup>e</sup> mode propre  
 $\omega_{03}^2 = 201,95 (\text{rds/s})^2$

$$\frac{A_2}{A_1} = -2.47$$

$$\frac{A_3}{A_1} = 6.87$$

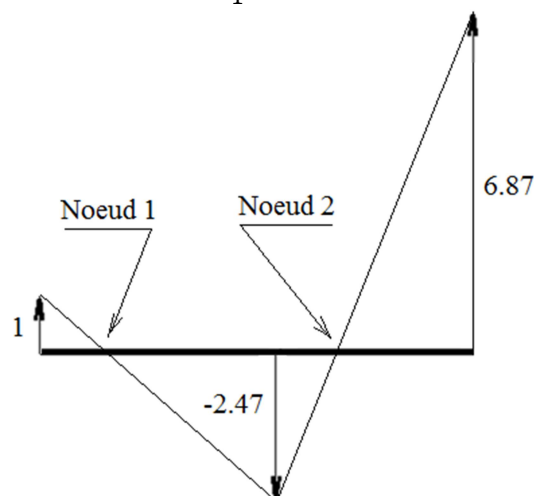
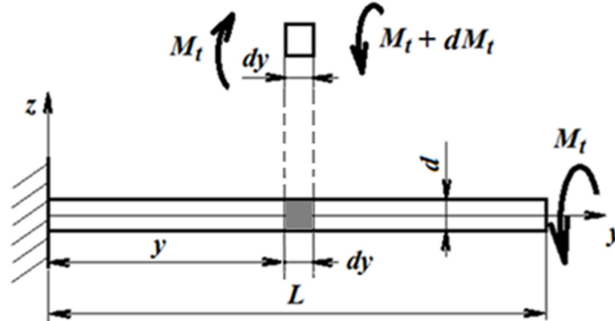


Figure 21. Troisième mode.

#### 4.2.2. Modèle continu

Considérons un arbre uniforme de diamètre  $d = 2R$ , de moment quadratique polaire  $I_s$ , son matériau a une masse volumique  $\rho$ , de moment d'inertie  $I_{ay}$  (Fig.22)



**Figure 22.** Arbre soumis à une torsion.

Soit une partie élémentaire de l'arbre de longueur  $dx$ , la résultante des moments :

$$M_t(y + dy) - M_t(y) = M_t(y) + \frac{\partial M_t}{\partial y} dy - M_t(y) = \frac{\partial M_t}{\partial y} dy \quad (48)$$

Le moment de torsion  $M_t$  s'écrit pour un arbre uniforme :

$$M_t = GI_s \frac{\alpha}{L} = GI_s \frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad (49)$$

$\alpha$  : Angle de torsion

$G$  : Module d'élasticité transversale

L'équation (48) permet d'écrire :

$$\frac{\partial M_t}{\partial y} = GI_s \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \quad (50)$$

Et la 2<sup>e</sup> loi de Newton donne :

$$\frac{\partial M_t}{\partial y} dy = dm \frac{R^2}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = GI_s \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} dy \quad (51)$$

$$\rho dx \pi R^2 \frac{R^2}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = GI_s \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} dy \quad (52)$$

$$\rho \frac{\pi R^4}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = GI_s \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \quad (53)$$

Avec  $I_s = \frac{\pi R^4}{2}$

$$\rho I_s \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = GI_s \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \quad (54)$$

Finalement :

$$\rho \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \quad (55)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \quad (56)$$

L'équation (55) est l'équation des ondes.

Posons :

$$c^2 = \frac{G}{\rho} \quad (57)$$

$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  est la célérité d'onde

En utilisant la méthode de séparation des variables :

$$\alpha(y, t) = f(y)g(t) \quad (58)$$

L'équation (56) s'écrit alors :

$$f \frac{d^2g}{dt^2} = c^2 g \frac{d^2f}{dy^2} \quad (59)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2g}{dt^2} = c^2 \frac{1}{f} \frac{d^2f}{dy^2} \quad (60)$$

Dans l'équation (59) les fonctions sont indépendantes donc la solution de (59) est une constante soit :

$$\frac{1}{g} \frac{d^2g}{dt^2} = c^2 \frac{1}{f} \frac{d^2f}{dy^2} = -\omega^2 \quad (61)$$

$$\begin{cases} c^2 \frac{d^2f}{dy^2} + \omega^2 f = 0 \\ \frac{d^2g}{dt^2} + \omega^2 g = 0 \end{cases} \quad (62)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2f}{dy^2} + K^2 f = 0 \\ \frac{d^2g}{dt^2} + \omega^2 g = 0 \end{cases} \quad (63)$$

Avec  $K = \frac{\omega}{c}$

$f$  et  $g$  sont harmoniques donc la solution de l'équation aux dérivées partielles (60) est :

$$\alpha(y, t) = [A \cos Ky + B \sin Ky][C \cos \omega t + D \sin \omega t] \quad (64)$$

A, B, C et D sont des constantes en considérant les conditions initiales et aux limites.

Dans notre cas à  $y = 0$  on a :  $\alpha(0, t) = 0$

$$[A \cos Ky + B \sin Ky][C \cos \omega t + D \sin \omega t] = 0 \quad (65)$$

$$A \cos Ky = 0 \text{ donne } A = 0 \quad (66)$$

A  $y = L$  (à l'extrémité de l'arbre) il n'y a pas de moment de torsion appliqué :

$$\frac{d\alpha}{dy} = 0 \quad (67)$$

$$\cos KL = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\omega}{c} L = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \quad (69)$$

Les modes propres sont donnés par :

$$\omega_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad n=1,2,\dots \quad (70)$$

Pour  $n = 1$  on a la fréquence du 1<sup>e</sup> mode :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (71)$$

## Chapitre 5 Influence des paliers sur les vibrations des rotors

### 5.1. Paliers

Un palier est un assemblage mécanique dont la fonction est de positionner dans l'espace une pièce en mouvement relatif par rapport au bâti fixe ou en d'autres termes il assure le guidage de la pièce en mouvement. Le terme palier est utilisé surtout pour les pièces tournantes (arbre, galet, roue dentée,...)

Selon le type de mouvement on distingue :

- Palier de translation : La pièce mobile est en translation par rapport à la pièce fixe.
- Palier de rotation : La pièce mobile est en rotation par rapport à la pièce fixe..
- Palier de translation et rotation : La pièce mobile est en rotation et translation par rapport à la pièce fixe..

Selon le contact on distingue deux types de paliers :

- Palier lisse : Le contact entre pièce mobile et pièce fixe est soit direct ou indirect (présence d'un film d'huile). Dans ce type de palier le frottement existant est un frottement de glissement (Fig. 1 et Fig. 2)

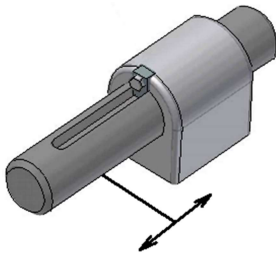


Figure 1. Palier lisse de translation

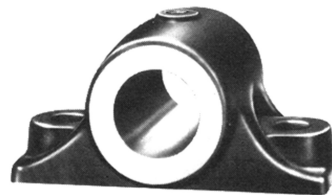


Figure 2. Palier lisse de rotation

- Palier de roulement : Utilisation des roulements (à billes ou à rouleaux), le frottement existant est un frottement de roulement (Fig. 3 ; Fig. 4 et Fig. 5)



Figure 3. Palier de roulement de translation et rotation.



Figure 4. Palier de roulement de rotation.



Figure 5. Palier de roulement de translation.

Dans le cas des machines tournantes les paliers transmettent les efforts des arbres aux parties immobiles.

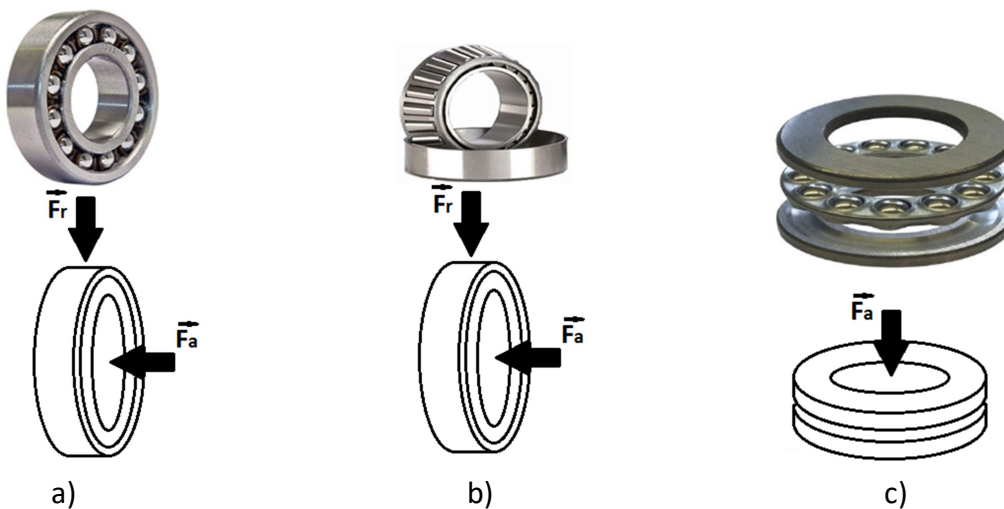
## 5.2. Influence des paliers sur les vibrations des rotors

### 5.2.1. Paliers de roulement

Un roulement est un élément de la machine conçu pour permettre un mouvement désiré en contraignant les autres mouvements et pour réduire les frottements entre les pièces mobiles.

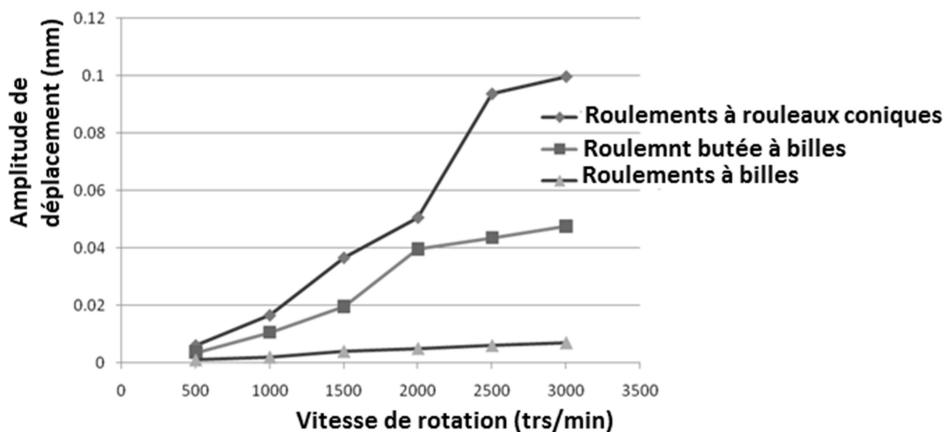
Il existe différents types de roulements, mais la sélection du bon roulement joue un rôle important dans les performances des machines tournantes.

En effet, le fonctionnement efficace et constant de ces machines dépend également du type de roulements choisi et de leurs performances sous vibration, ainsi que de toutes les autres pièces associées telles que l'arbre, le logement, les écrous, les entretoises, etc.



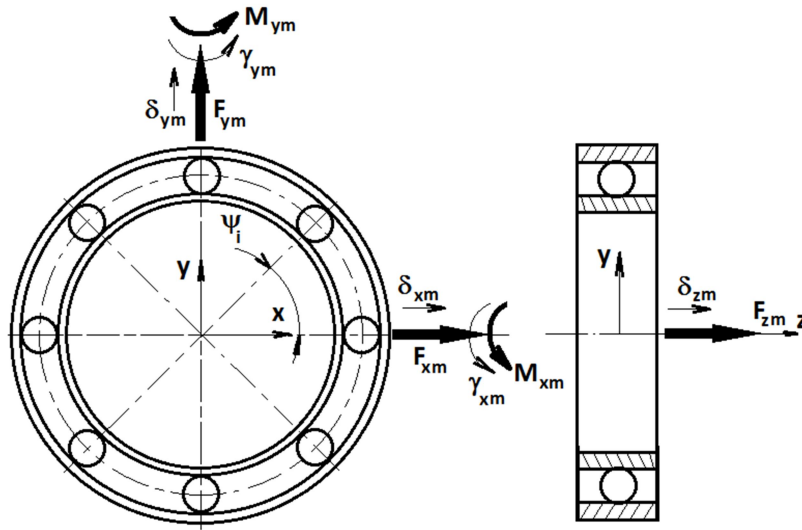
**Figure 6.** Quelques types de roulements ( $F_a$  effort axial et  $F_r$  effort radial): a) A billes à contact radial, b) A rouleaux coniques, c) Butée à billes.

La figure (Fig. 7) montre la variation de l'amplitude de vibration (Whirling) en fonction de la vitesse de rotation pour 3 types de roulements respectivement : roulement à rouleaux coniques, butée à billes et roulement à billes. Lorsque la vitesse de rotation augmente l'amplitude augmente d'une façon attirante pour le roulement à rouleaux coniques moins pour la butée et une augmentation beaucoup moins observée pour le roulement à billes.



**Figure 7.** Amplitudes de vibration pour 3 types de roulements.

Considérons le roulement à bille à contact radial (Fig. 8 et Fig. 9). Sur ce roulement sont appliqués les efforts et les moments moyens auxquels sont associés les déplacements élastiques.



**Figure 8.** Efforts et moments moyens appliqués sur le roulement à billes à contact radial.

$F_{mx}$  : Effort moyen suivant x auquel s'associe le déplacement moyen  $\delta_{mx}$

$F_{my}$  : Effort moyen suivant y auquel s'associe le déplacement moyen  $\delta_{my}$

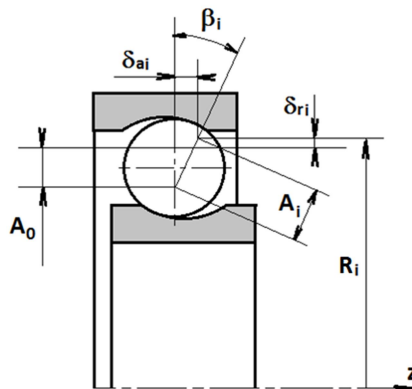
$F_{mz}$  : Effort moyen suivant z auquel s'associe le déplacement moyen  $\delta_{mz}$

$M_{mx}$  : Moment moyen suivant x auquel s'associe l'angle moyen  $\alpha_{mx}$

$M_{my}$  : Moment moyen suivant y auquel s'associe l'angle moyen  $\alpha_{my}$

$\psi_i$  : Angle de position de la  $i^{\text{ème}}$  bille

Pour déterminer la matrice de rigidité (non explicitée dans ce chapitre) du roulement considérons les déplacements pour la  $i^{\text{ème}}$  bille (Fig. 8).



**Figure 9.** Déplacements élastiques sur le roulement à billes à contact radial.

$\beta_i$  : Angle de contact de la  $i^{\text{ème}}$  bille

$\delta_{ai}$  : Déplacement axial

$$\delta_{ai} = \delta_{zm} + R_i(\alpha_{xm} \sin \psi_i - \alpha_{ym} \cos \psi_i)$$

$\delta_{ri}$  : Déplacement radial

$$\delta_{ri} = \alpha_{xm} \cos \psi_i + \alpha_{ym} \sin \psi_i - j_r$$

$R_i$  : Distance du centre de courbure de la gorge du chemin de roulement à l'axe du roulement

$j_r$  : Jeu radial

$A_0$  : Distance de non chargement entre les 2 centres de courbure des gorges du chemin de roulement extérieur et intérieur.

$A_i$  : Distance de chargement entre les 2 centres de courbure des gorges du chemin de roulement extérieur et intérieur

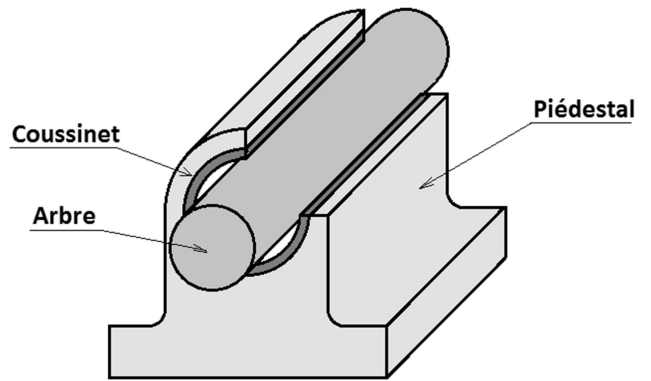
Ces déplacements sont reliés aux efforts appliqués par loi d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} F_{mx} \\ F_{my} \\ F_{mz} \\ M_{mx} \\ M_{my} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & k_{xax} & k_{xay} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} & k_{yax} & k_{yay} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} & k_{zax} & k_{zay} \\ k_{xax} & k_{yax} & k_{zax} & k_{axax} & k_{axay} \\ k_{xay} & k_{yay} & k_{zay} & k_{axay} & k_{ayay} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{mx} \\ \delta_{my} \\ \delta_{mz} \\ \alpha_{mx} \\ \alpha_{my} \end{bmatrix}$$

**5.2.2. Paliers lisses (hydrodynamiques) (Fig. 10)**

Dans ce type de paliers un film d'huile entrainé par le mouvement relatif, sépare les surfaces de contacts (Fig. 11), on distingue :

- Lubrification à basse pression (0.1MPa < p < 50MPa)
- Lubrification à haute pression (50Mpa < p < 3000Mpa)



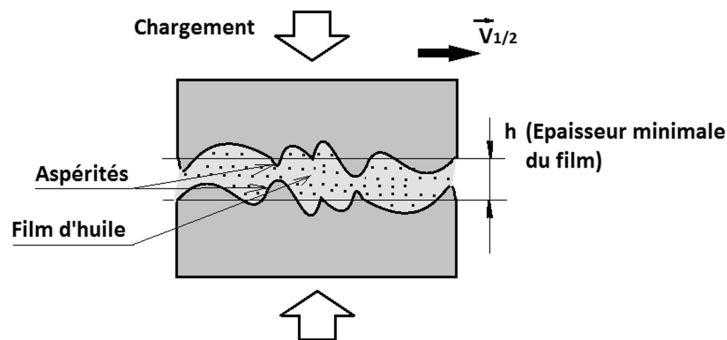
**Figure 10.** Palier lisse.

La figure (Fig. 11) montre les 2 surfaces de contact séparées par un film d'huile, on considère le rapport  $\lambda$  tel que :

$$\lambda = \frac{h}{\kappa}$$

$h$  : Epaisseur minimale du film

$\kappa$  : Rugosité des surfaces



**Figure 11.** Le film d'huile et les surfaces antagonistes.

En général 3 types de régimes de lubrification sont à distinguer pour une pression donnée.

a) Régime limite ( $h \ll \kappa$ ) :

La viscosité de l'huile est insuffisante pour supporter le chargement et cela pour séparer les surfaces de contact. Dans ces conditions le contact métal/métal est établi et une usure du mécanisme est prévue.

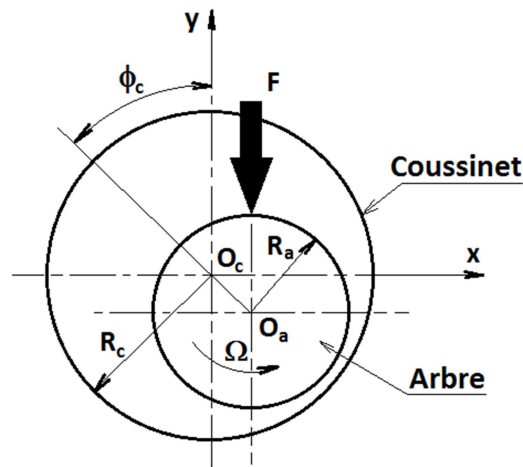
b) Régime mixte ( $h \approx \kappa$ ) :

Dans ce type de régime le film d'huile supporte une partie du chargement. Le frottement provient essentiellement d'effets hydrodynamiques et d'interactions entre les aspérités.

b) Régime hydrodynamique ( $h \gg \kappa$ ) :

C'est dans ce type de régime que l'équilibre entre la charge appliquée et la portance hydrodynamique du film est établi. Une déformation élastique des surfaces peut être causée par les efforts appliqués (régime élastohydrodynamique qui est nuisible).

La figure (Fig. 12) illustre la géométrie du palier hydrodynamique, le déplacement du centre  $O_a$  de l'arbre est conditionnée par la charge exercée et la pression du film d'huile.



**Figure 12.** Représentation de la géométrie du palier hydrodynamique.

$\phi_c$  : Angle de calage

$e = O_c O_a$  : Excentricité

$R_c$  : Rayon du coussinet

$R_a$  : Rayon de l'arbre

La pression dans le film d'huile est déterminée par l'équation aux dérivées partielles de Reynolds :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3 \rho}{\mu K_x} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3 \rho}{\mu K_z} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6 \frac{\partial}{\partial x} (\rho U h) - 12 \rho V$$

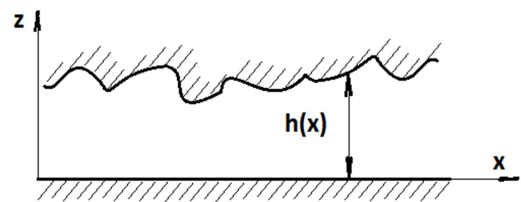
$\rho$  : Masse volumique de l'huile

$\mu$  : Coefficient de viscosité

$p$  : Pression

$K_x$  et  $K_z$  : Coefficients de turbulence dans les directions respectivement x et z

$h$  : Fonction de l'intervalle radial (Fig. 13)



**Figure 13.** Fonction de l'intervalle radial.

$U$  et  $V$  : Respectivement les vitesses circonférentielle et radiale

En général selon son type, un palier peut être représenté par le modèle suivant :

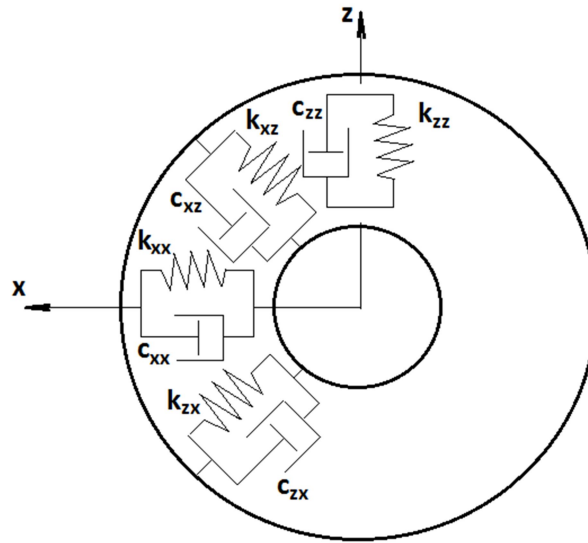


Figure 14. Modèle linéaire d'un palier.

Les matrices de rigidité et d'amortissement du palier s'écrivent :

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{pxx} & k_{pxz} \\ k_{pzx} & k_{pzz} \end{bmatrix} \text{ et } C_p = \begin{bmatrix} c_{pxx} & c_{pxz} \\ c_{pzx} & c_{pzz} \end{bmatrix}$$

On note les déplacements correspondants aux directions x et z du centre de l'arbre  $u_a$  et  $w_a$  et les forces de raideur et d'amortissement y agissant  $F_{ka} = \begin{Bmatrix} F_{kax} \\ F_{kaz} \end{Bmatrix}$  et  $F_{ca} = \begin{Bmatrix} F_{cax} \\ F_{caz} \end{Bmatrix}$  telles que :

$$\begin{Bmatrix} F_{kax} \\ F_{kaz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{pxx} & k_{pxz} \\ k_{pzx} & k_{pzz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} F_{cax} \\ F_{caz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{pxx} & c_{pxz} \\ c_{pzx} & c_{pzz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_a \\ \dot{w}_a \end{Bmatrix}$$

Les équations différentielle sous forme matricielle s'écrit :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F_{paliers}\} + \{F\}$$

[M] : Matrice de masse globale

[K] : Matrice de rigidité globale

[C] : Matrice d'amortissement globale

$\{F_{palier}\}$  : Vecteur des forces des paliers

$$\{F_{paliers}\} = \begin{Bmatrix} F_{kax} \\ F_{kaz} \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} F_{cax} \\ F_{caz} \end{Bmatrix}_i \quad i=1,2,\dots,n \text{ (n paliers)}$$

$\{F\}$  : Vecteur de forces d'excitation

Des études réalisées sur des défauts des paliers lisses tels ont permis de voir l'influence sur les performances des paliers et les vibrations du rotor. Les défauts affectant les paliers lisses vont créer de nouvelles fréquences critiques qui influent sur la stabilité du rotor. Le désalignement provoque une augmentation importante des amplitudes vibratoires ainsi que la portance hydrodynamique du film lubrifiant.

## Chapitre 6 Equilibrage des rotors

### 6.1. Introduction

Les vibrations causées par un balourd peuvent entraîner la détérioration des roulements et un endommagement de la machine, éliminer ces effets est pratiquement impossible car cela dépend de la précision de l'équilibrage, opération qui reste onéreuse réduire les effets de vibrations à un niveau acceptable est nécessaire.

### 6.2. Le balourd

Soit un solide cylindrique dont on considère 3 cas (Fig. 1) :

- Un cylindre normal (Fig. 1a): Le centre de gravité est sur l'axe principal de rotation ( $\Delta$ ). Dans ce cas il n'existe pas de balourd.
- Ajout d'une cannelure (Fig. 1b) : Le centre de gravité se déplace vers la direction de la matière ajoutée et par conséquent le corps acquiert un nouvel axe principal. La rotation autour de l'axe principal précédent engendrera un balourd.
- Suppression de matière (Fig. 1c) : Le centre de gravité se déplace dans le sens contraire de la matière supprimée et on obtient un nouvel axe principal. La rotation autour de l'axe principal précédent engendrera un balourd.

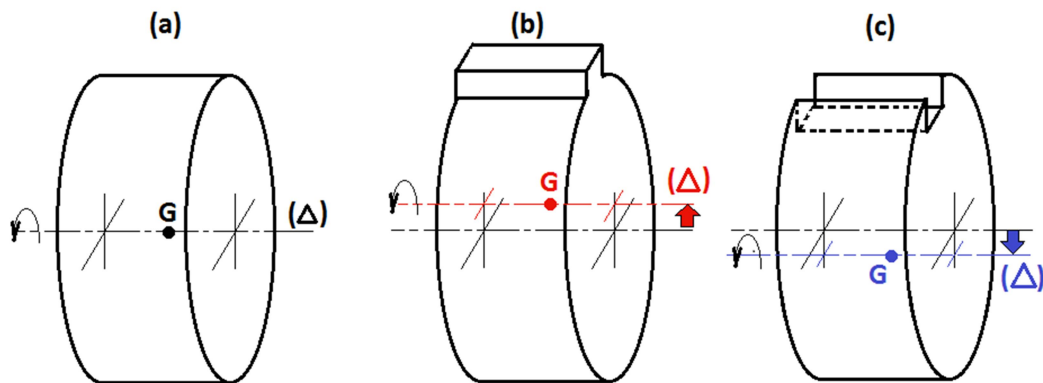


Figure 1. L'axe principal d'inertie dans les 3 cas de la géométrie du solide cylindrique.

### 6.3. Types de balourds

En réalité le balourd se distribue le long du rotor, la résultante de cette distribution peut être assimilée à une ou deux masses.

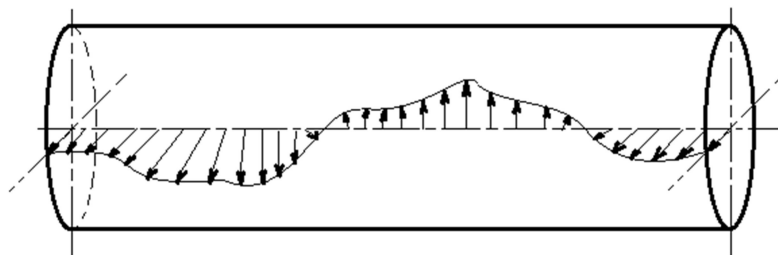


Figure 3. Distribution du balourd.

Selon la répartition de la matière dans un rotor on peut distinguer 3 types de balourds :

#### 6.3.1. Balourd statique

C'est le balourd classique quand il s'agit de définition, il peut être représenté par une masse qui forcera le déplacement du centre de gravité à se déplacer à une nouvelle position. Il est

appelé statique car l'équilibrage se fait dans le plan où se trouve le balourd et la masse d'équilibrage doit être dans ce plan (Fig. 4).

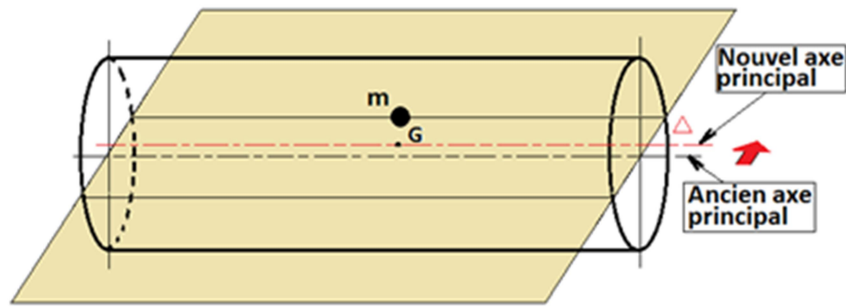


Figure 4. Balourd statique.

### 6.3.2. Balourd couple

Dans ce cas 2 masses égales sont situées dans le même plan mais à  $180^\circ$  entre les deux et éloignées entre elles axialement. Le centre de gravite ne se déplace pas mais le nouvel axe principal est le résultat de la rotation de l'ancien axe principal autour de G. L'équilibrage est réalisé par 2 masses dans le même plan (Fig. 5).

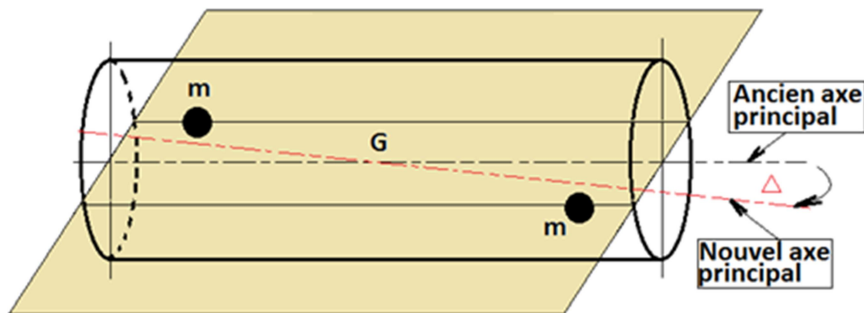


Figure 5. Balourd couple.

### 6.3.3. Balourd dynamique

C'est la combinaison des deux premiers cas (Fig. 6). Les deux plans des deux balourds statique et couple forment un angle ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ). C'est le type de balourd le plus rencontré dans les rotors. L'équilibrage en général est réalisé dans les deux plans.

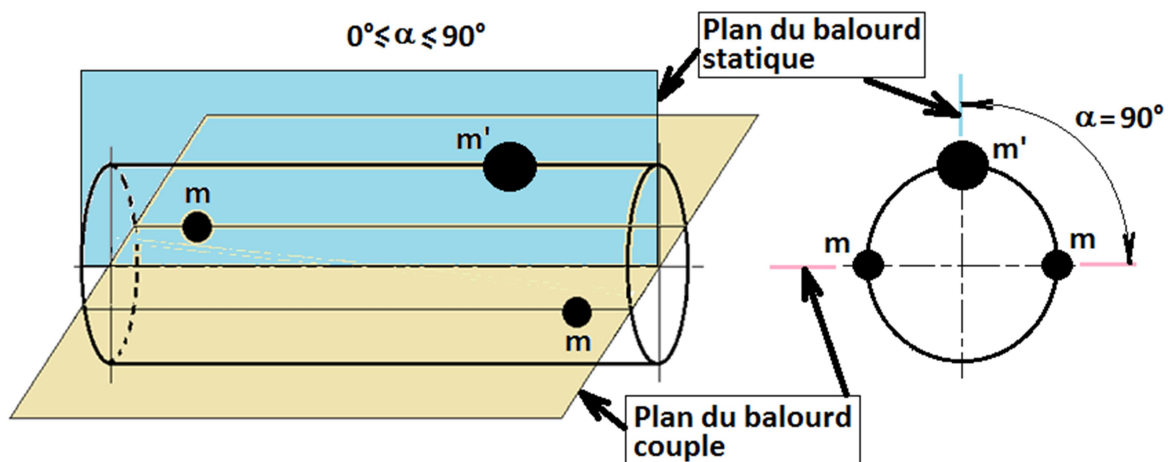


Figure 6. Balourd dynamique.

### 6.4. Equilibrage d'un rotor

La figure (Fig. 7) représente l'opération d'équilibrage d'un rotor d'une turbine d'un réacteur d'un avion :



Figure 7. Equilibrage d'un rotor d'une turbine.

#### 6.4.1. Principe de base d'équilibrage

##### A) Par ajout de matière

La figure (Fig. 8) illustre l'exemple d'équilibrage d'une roue par ajout d'une masselotte.



Figure 8. Equilibrage d'une roue de voiture.

Soit un rotor de masse  $M$  à équilibrer, on suppose que le balourd est connu (Fig. 9):  
Lorsque le rotor est en mouvement le balourd  $G$  développe une force centrifuge :

$$F_G = M\omega^2 e \quad (1)$$

Equilibrer ce balourd est équivalent à dire : placer une masse  $m$  à une distance  $r$ , celle-ci développerait une force centrifuge équilibrante :

$$F_{G'} = m\omega^2 r \quad (2)$$

D'où la relation :

$$Me = mr \quad (3)$$

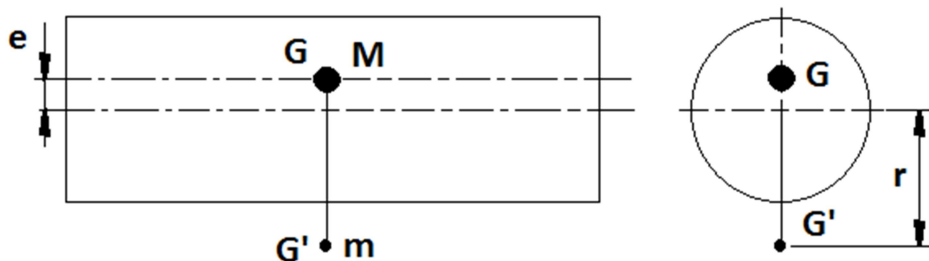


Figure 9. Principe de base d'équilibrage par ajout de matière.

B) Par enlèvement de matière

La figure (Fig. 10) illustre l'exemple d'équilibrage d'un vilebrequin par enlèvement de matière.

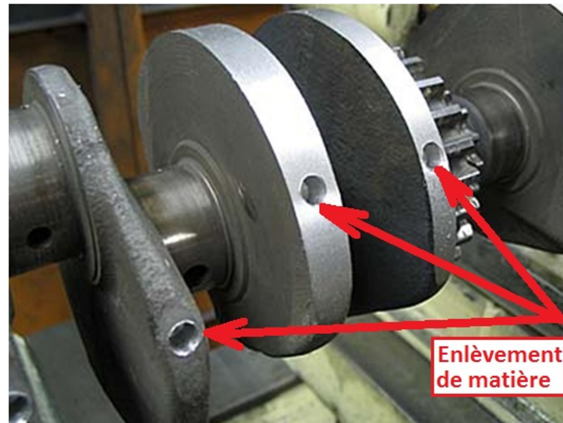


Figure 10. Equilibrage d'un vilebrequin par enlèvement de matière.

Soit un rotor de masse  $M$  à équilibrer, on suppose que le balourd est connu (Fig. 11). Pour emmener le centre de gravité  $G$  sur l'axe de rotation (Le nouveau centre de gravité  $G_0$ ) on enlève une quantité de matière  $m$  à une distance  $r$  (de centre de gravité  $G'$ ).

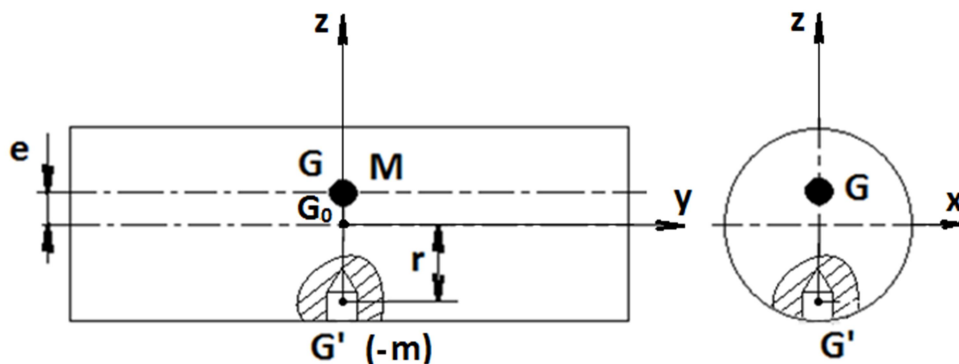


Figure 11. Principe de base d'équilibrage par enlèvement de matière.

D'après la définition du centre de gravité pour ce cas d'équilibrage  $G_0$  dans le repère  $(O,x,y,z)$  :

$$(-m).(-r) + M.e = (M - m).0 = 0$$

Ou :

$$m.r + M.e = 0 \quad (4)$$

$$m = -M \frac{e}{r} \quad (5)$$

Le signe (-) est dû à l'enlèvement de matière.

### 6.3.2. Méthode générale d'équilibrage d'un rotor

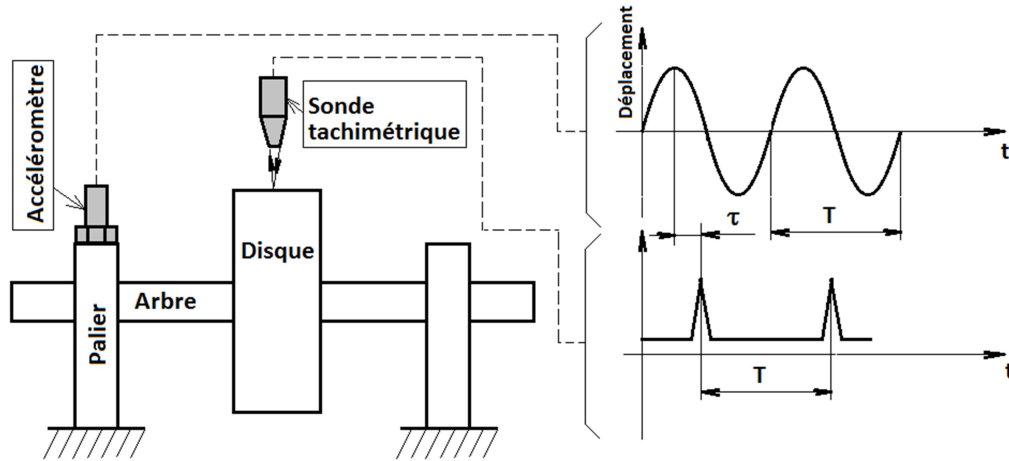
#### A) Matériel utilisé

L'équilibrage d'un rotor se fait sur site ou sur machine :

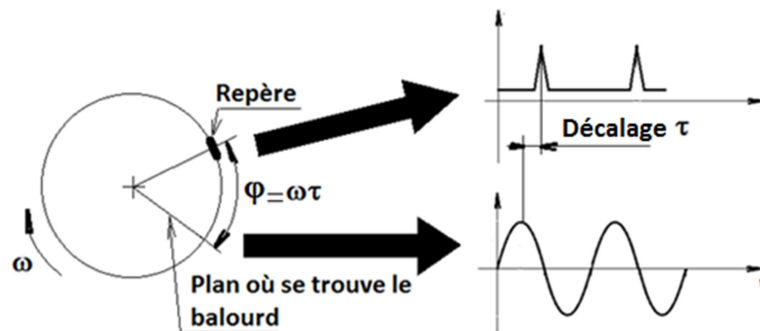
- Sur site : L'équilibrage se fait sans démonter le rotor.
- Sur machine d'équilibrage : On l'utilise lorsque le balourd est la cause d'un endommagement affectant le rotor ou les paliers. Le rotor est démonté pour l'équilibrer.

On utilise l'équipement composé de :

- Sonde tachimétrique : Montée à proximité du disque sur lequel est fixé un repère qui à chaque passage devant la sonde tachimétrique un signal est généré, cela servirait à déterminer le décalage  $\tau$  entre la vibration et le repère.
- Accéléromètre : Servant à générer les réponses au balourd (Déplacement, vitesse ou accélération) (Fig. 8)



**Figure 8.** Equipement de mesure du décalage vibration/repère de rotation. La phase ( $\varphi = \omega\tau$ ) entre le balourd et le repère permet de localiser le balourd (Fig. 9)



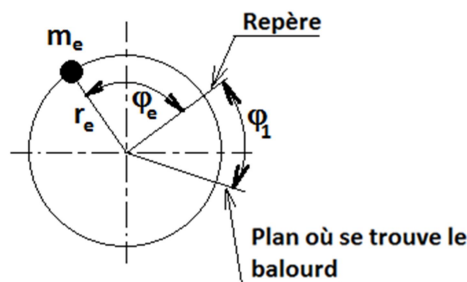
**Figure 9.** Localisation du balourd.

**B) Méthode d'équilibrage dans un plan :**

Les étapes à suivre sont :

**B1-** Lancer le rotor à la vitesse de rotation d'équilibrage et déterminer l'amplitude de vibration  $A_1$  et le déphasage  $\varphi_1$  et arrêter le rotor.

**B2-** Placer la masse  $m_e$  d'essai de valeur prédéfinie à une position  $r_e$  et  $\varphi_e$  sur le cercle où devait se faire la correction en d'autres termes le plan de correction (Fig. 10) et relancer le rotor.



**Figure 10.** Emplacement  $r_e$  et  $\varphi_e$  de la masse d'essai  $m_e$

**B3-** Déterminer l'amplitude de vibration  $A_2$  et la phase  $\varphi_2$  du balourd résultant (Balourd initial et masse d'essai). (Fig. 11)

**B4-** A l'aide du diagramme de Fresnel (construction vectorielle), déterminer la position et la valeur de la masse de compensation  $m_c$  :

Utilisons les vecteurs pour tenir en compte les deux grandeurs **Amplitudes** et **Phases** du balourd, de la masse d'essai et de l'ensemble de ces deux derniers. Soient le vecteur  $\vec{V}_1$  de module  $A_1$  et de phase  $\varphi_1$ , le vecteur  $\vec{V}_2$  de module  $A_2$  et de phase  $\varphi_2$  et le vecteur  $\vec{V}_e$  de module  $A_e$  et de phase  $\varphi_e$  (Fig. 11)

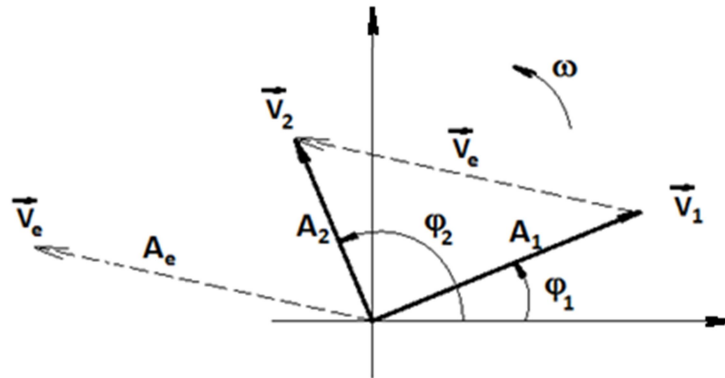


Figure 11. Diagramme de Fresnel.

Considérons la relation :

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_e \quad (6)$$

$$\vec{V}_e = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{V}_c \quad (7)$$

$\vec{V}_c = -\vec{V}_1$  est le vecteur correspondant à la masse de compensation (ou d'équilibrage) avec :

- Module  $\|\vec{V}_c\| = A_1$
- Position  $\varphi_c$  par rapport au vecteur  $\vec{V}_e$  de la masse d'essai (Fig. 12)

Pour déterminer la position de la masse de compensation et  $\varphi_c$  sur le diagramme de Fresnel on transporte le vecteur  $\vec{V}_e$  à l'origine puis on trace le vecteur  $\vec{V}_c = -\vec{V}_1$ , l'angle formé entre  $\vec{V}_c$  et  $\vec{V}_e$  est la position de la masse c.à.d.  $\varphi_c = (\vec{V}_c, \vec{V}_e)$

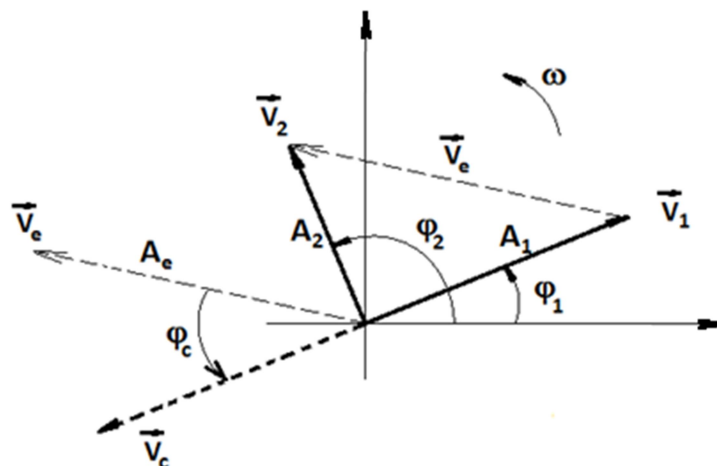


Figure 12. Position de la masse de correction.

Si on admet que la masse est proportionnelle à l'amplitude de vibration :

$$\frac{m_c}{\|\vec{v}_c\|} = \frac{m_e}{\|\vec{v}_e\|} = cte \quad (8)$$

$$\frac{m_c}{A_1} = \frac{m_e}{A_e} \quad (9)$$

Donc la masse de correction s'écrit :

$$m_c = m_e \frac{A_1}{A_e} \quad (10)$$

**B5-** La masse d'équilibrage (compensation)  $m_c$  doit être fixée au même rayon que la masse d'essai  $m_e$  c.à.d. à la distance  $r_e$  .

C) Méthode d'équilibrage dans deux plans :

La méthode est basée sur le même principe que celle dans un plan mais elle est relativement compliquée.

L'équilibrage en deux plans des rotors est le plus fréquent, il est réalisé sur des machines équipées de calculateurs qui rendent l'opération plus aisée (Fig. 13 ; Fig. 14 et Fig. 15).



Figure 13. Machine d'équilibrage de rotor .



Figure 14. Traçage du repère.

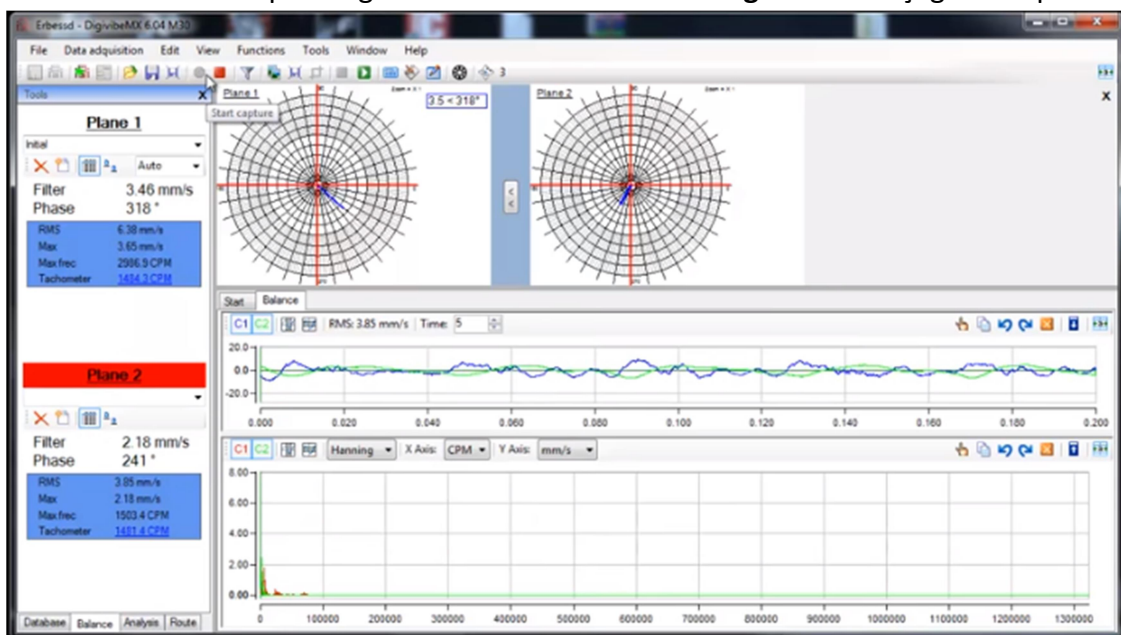


Figure 15. L'interface du logiciel utilisé (équilibrage en 2 plans).

Soit l'exemple de l'équilibrage d'un rotor en 2 plans (Fig. 16) :

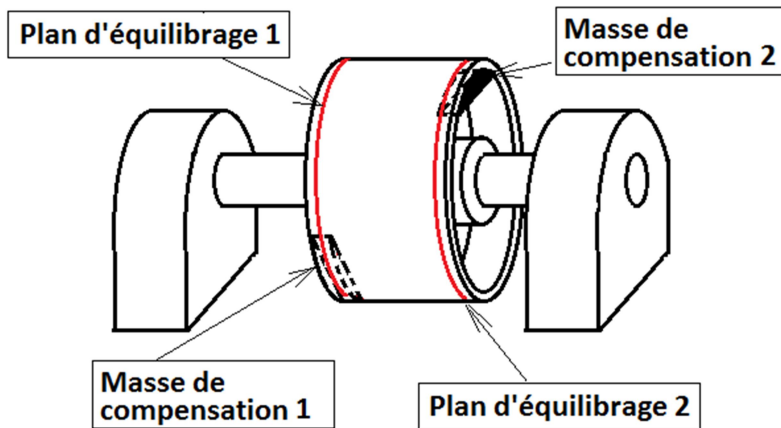


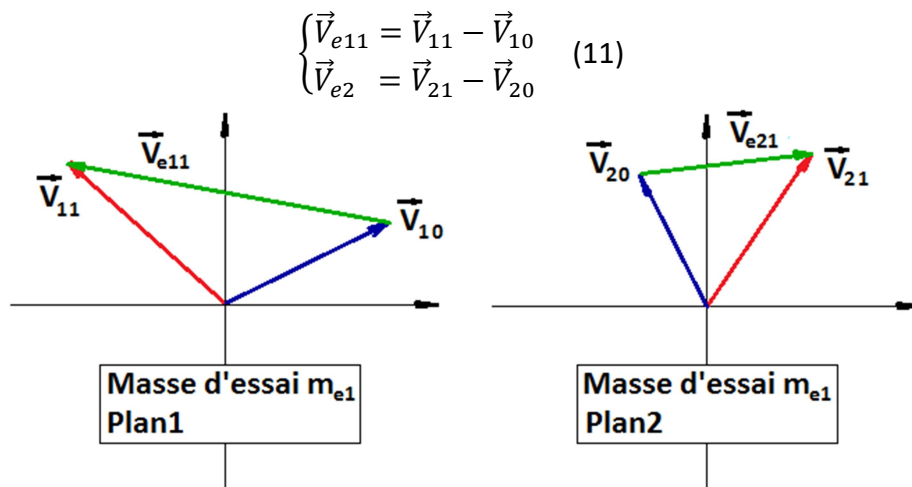
Figure 16. Exemple d'équilibrage d'un rotor en 2 plans.

Procédure :

**C1-** Lancer le rotor sans masse d'équilibrage ou d'essai à la vitesse d'équilibrage, déterminer les vecteurs de balourd initial dans les 2 plans respectivement Plan1 et Plan2 :  $\vec{V}_{10}$  et  $\vec{V}_{20}$ .

**C2-** Arrêter le rotor et monter la 1<sup>ère</sup> masse d'essai  $m_{e1}$  sur le cercle correspondant au plan d'équilibrage Plan1.

**C3-** Lancer le rotor et déterminer les vecteurs des balourds résultants dans les deux plans :  $\vec{V}_{11}$  et  $\vec{V}_{21}$  et par conséquent les vecteurs des balourds effectifs dans les deux plans :  $\vec{V}_{e11}$  et  $\vec{V}_{e2}$



$$\begin{cases} \vec{V}_{e11} = \vec{V}_{11} - \vec{V}_{10} \\ \vec{V}_{e2} = \vec{V}_{21} - \vec{V}_{20} \end{cases} \quad (11)$$

**Figure 17.** Représentation vectorielle pour le cas d'emplacement de la masse d'essai  $m_{e1}$

**C4-** Arrêter le rotor, enlever la masse d'essai  $m_{e1}$  et placer la masse d'essai  $m_{e2}$  sur le cercle correspondant au plan Plan2.

**C5-** Lancer le rotor et déterminer les vecteurs des balourds résultants dans les deux plans :  $\vec{V}_{12}$  et  $\vec{V}_{22}$  et par conséquent les vecteurs des balourds effectifs dans les deux plans :  $\vec{V}_{e21}$  et  $\vec{V}_{e22}$

$$\begin{cases} \vec{V}_{e1} = \vec{V}_{12} - \vec{V}_{10} \\ \vec{V}_{e22} = \vec{V}_{22} - \vec{V}_{20} \end{cases} \quad (12)$$

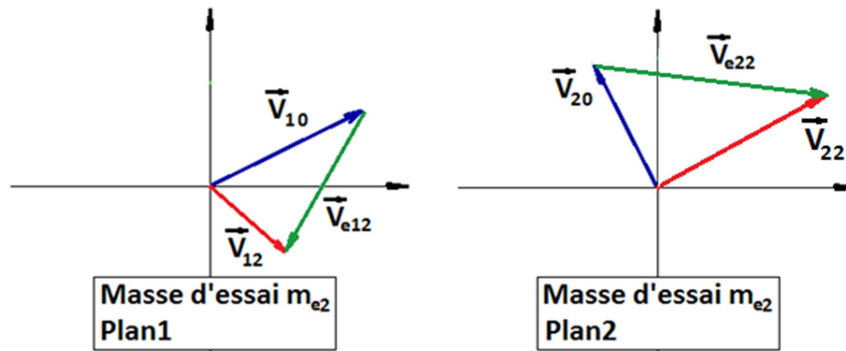


Figure 17. Représentation vectorielle pour le cas d'emplacement de la masse d'essai  $m_{e2}$

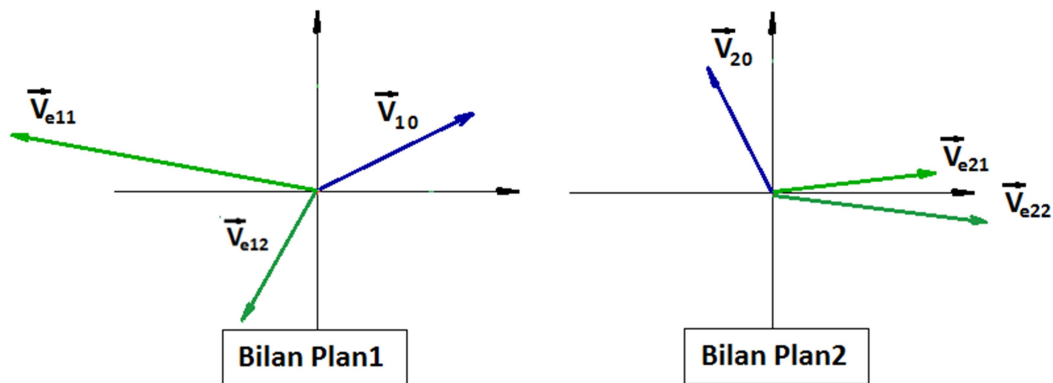


Figure 18. Bilan vectoriel pour les deux cas précédents.

**C6-** Déterminer la masse de compensation et sa position pour chaque plan.

Pour cela travaillons dans le plan complexe et considérons les quantités complexes :  $Z_{10}$ ,  $Z_{20}$ ,  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$  et  $Z_{21}$  tels que :

$$|Z_{10}| = V_{10} \text{ et de phase } \varphi_{10}$$

$$|Z_{20}| = V_{20} \text{ et de phase } \varphi_{20}$$

$$|Z_{11}| = V_{11} \text{ et de phase } \varphi_{11}$$

$$|Z_{22}| = V_{22} \text{ et de phase } \varphi_{22}$$

$$|Z_{12}| = V_{12} \text{ et de phase } \varphi_{12}$$

$$|Z_{21}| = V_{21} \text{ et de phase } \varphi_{21}$$

Et soient à déterminer les vecteurs  $\vec{W}_1$  et  $\vec{W}_2$  auxquels on associe les quantités complexes  $Z_1$  et  $Z_2$  :

$$|Z_1| = W_1 \text{ et de phase } \alpha_1$$

$$|Z_2| = W_2 \text{ et de phase } \alpha_2$$

On cherche  $W_1$  et  $W_2$  qui remplissent les conditions :

$$\begin{cases} Z_1 Z_{e11} + Z_2 Z_{e1} + Z_{10} = 0 \\ Z_1 Z_{e21} + Z_2 Z_{e2} + Z_{20} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Ou :

$$\begin{cases} Z_1(Z_{11} - Z_{10}) + Z_2(Z_{12} - Z_{20}) + Z_{10} = 0 \\ Z_1(Z_{21} - Z_{10}) + Z_2(Z_{22} - Z_{20}) + Z_{20} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Il est à rappeler qu'un nombre complexe  $Z$  de module  $|Z|$  et d'argument  $\varphi$  (ici il s'agit de phase) peut s'écrire :

$$Z = |Z|\cos\varphi + j|Z|\sin\varphi \quad (15)$$

Du système (14) on tire :

$$Z_1 = \frac{-Z_{10} - Z_2(Z_{12} - Z_{10})}{Z_{11} - Z_{10}} \quad (16)$$

$$Z_2 = \frac{Z_{20}(Z_{11} - Z_{10}) - Z_{10}(Z_{21} - Z_{20})}{(Z_{21} - Z_{20})(Z_{12} - Z_{10}) - (Z_{22} - Z_{20})(Z_{11} - Z_{10})} \quad (17)$$

De la forme:

$Z_1 = X_1 + jY_1$  donnera le module  $|Z_1| = W_1$  et la phase  $\alpha_1$

$Z_2 = X_2 + jY_2$  donnera le module  $|Z_2| = W_2$  et la phase  $\alpha_2$

Finalement les masses de compensation s'écrivent :

$$\begin{cases} m_{c1} = W_1 m_{e1} \rightarrow \text{montée à } \alpha_1 \\ m_{c2} = W_2 m_{e2} \rightarrow \text{montée à } \alpha_2 \end{cases} \quad (18)$$

$m_{c1}$  : Masse de compensation dans le plan Plan1

$m_{c2}$  : Masse de compensation dans le plan Plan2

$m_{e1}$  : Masse d'essai dans le plan Plan1

$m_{e2}$  : Masse d'essai dans le plan Plan2

#### D) Exemple d'application

Un équilibrage d'un rotor a été réalisé sur une machine à équilibrer, les pas précédents ont été exécutés et on a recueilli les données suivantes (Tableau ci-dessous):

Les masses d'essai :  $m_{e1} = m_{e2} = m_e = 3g$

$\vec{V}_{ij}$	$V_{ij}(\text{mm/s})$	Phase (°)	Phase (rad)	$X_n$	$Y_m$	$Z_{nm} = X_n + j Y_m$
$\vec{V}_{10}$	6,75	227	3,95	-4,66	-4,88	-4,66-4,88 j
$\vec{V}_{11}$	5,1	125	2,18	-2,92	4,18	-2,92+4,18 j
$\vec{V}_{12}$	4,1	82	1,43	0,58	4,06	0,58+4,06 j
$\vec{V}_{20}$	12,5	365	6,36	12,46	0,96	12,46+0,96 j
$\vec{V}_{21}$	10,2	265	4,62	-0,94	-10,16	-0,94-10,16 j
$\vec{V}_{22}$	11,85	285	4,97	3,02	-11,46	3,02-11,46 j

La relation (17) permet de calculer  $Z_2$  :

$$Z_2 = \frac{Z_{20}(Z_{11} - Z_{10}) - Z_{10}(Z_{21} - Z_{20})}{(Z_{21} - Z_{20})(Z_{12} - Z_{10}) - (Z_{22} - Z_{20})(Z_{11} - Z_{10})}$$

$$Z_2 = 0,0485 - 0,216 j$$

$$W_2 = |Z_2| = \sqrt{(0,0485)^2 + (0,216)^2} = 0,221 \text{ mm/s}$$

La phase correspondante :

$$tg \alpha_1 = -\frac{0,216}{0,0485} = -4,453 \text{ donc } \alpha_1 = -77,3^\circ$$

La relation (16) permet de calculer  $Z_1$  :

$$Z_1 = \frac{-Z_{10} - Z_2(Z_{12} - Z_{10})}{Z_{11} - Z_{10}}$$

$$Z_1 = 0,788 - 0,138 j$$

$$W_1 = |Z_1| = 0,8 \text{ mm/s}$$

$$\alpha_2 = -10^\circ$$

Les masses de compensation :

$$\begin{cases} m_{c1} = 0.8 * 3 = 2.4g \rightarrow \text{montée à } -10^\circ \\ m_{c2} = 0.221 * 3 = 0.7g \rightarrow \text{montée à } -77.3^\circ \end{cases}$$

### **6.3.3. Qualité d'équilibrage d'un rotor**

Idéalement, une machine équilibrée ne présenterait aucun balourd mais pratiquement, en raison des tolérances d'usinage, un équilibrage parfait ne peut jamais être atteint.

Pour différents types et tailles de machines, le niveau de vibration considéré comme excessif varie considérablement: par exemple, un niveau de vibration acceptable dans le vilebrequin d'une automobile pourrait probablement détruire un caméscope.

Il est donc important de classer le rotor à équilibrer en fonction du niveau de vibration acceptable. Il faudrait se limiter aux prescriptions du constructeur.

## REFERENCES

- Rajiv Tiwari. A Brief History of Rotor Dynamics and Recent Trends. Conference: 51st Congress of Indian Society of Theoretical & Applied Mechanics (ISTAM-2006) 18-21 December 2006. At: Vishakhapatnam, India
- Timoshenko, S., J. Goodier, " Theory of elasticity " , McGraw-Hill, (1970).
- O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor., " The finite element method" , Volume1. Basic formulation and linear problems. McGraw-Hill, fourth edition, 1994.
- Jean Marc PUGNET, "Equilibrage des rotors rigides et flexibles", Techniques de l'ingénieur (2000)
- Lalanne, M. & Ferraris, G., " Rotordynamics Prediction in Engineering " , John Wiley & Sons Inc: Chichester, 1998.
- Henri BLANC, "Vibration des rotors en torsion", Techniques de l'ingénieur (2000)
- Michel LALAANE & Guy FERRARIS, 'Dynamique des rotors en flexion', Techniques de l'ingénieur (2000)