



UNIVERSITE ABBES LAGHROUR - KHENCHELA

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT SCIENCES DE LA MATIERE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière: Physique

Option: Physique Des Matériaux

Thème :

**Traitement de quelques problèmes de
mécanique quantique relativiste et non
relativiste .**

Présenté par :

M^{elle} **KEFALI Rahima**
M^{elle} **HEZIL Imane**

Encadré par :

Mr **HEMAME Zoubir**

Soutenu le: / 09 /2020

Jury de soutenance :

Président : Mr **GUENOUCHE Mourad**

(MCB)

Univ. Abbès Laghrou - Khenchela

Encadreur : Mr **HEMAME Zoubir**

(MAA)

Univ. Abbès Laghrou - Khenchela

Examineur : Mr **A. BOUROUCHA**

(MAA)

Univ. Abbès Laghrou - Khenchela

Remerciements

Au mon d'Allah, le tout miséricordieux; le très miséricordieux
Je remercie tout d'abord allah tout puissant pour m'avoir donné la
santé, la patience et le courage pour mener à terminer ce mémoire .

J'exprime mes plus vifs remerciement à Monsieur M GUENOUCHE
d'avoir présidé le jury et qu'il trouve ici témoignage de notre très
haute considération

Je teins à remercie Monsieur A. BOUROUCHA pour avoir accepté
d'être l'examinatrice de ce mémoire .

J'adresse mes vifs remerciements à mon encadreur Monsieur
Z.HEMMAME pour sa disponibilité ,sa rigueur , son soutien et son
engagement durent la réalisation de cette thèse mes remerciements à
mes enseignants de département de Sciences de la matière

Dédicace

A ma mère et mon père

A mes sœurs

A ma famille

A tout mes amies,

A ma cher binôme Iman Hezil

A tout mes collègues

Et à tout mes enseignants

Pour mes chères cousines

, Et Spécialement mon encadreur Mr Hemame Zoubir,

Rahima

Dédicace

A ma mère et mon père

A mes sœurs

A ma famille

A tout mes amies,

A ma cher binôme Kefali Rahima

A tout mes collègues

Et à tout mes enseignants

Pour mes chères cousines

, Et Spécialement mon encadreur Mr Hemame Zoubir,

Iman

lllghhhjj

Contents

Introduction	v
1 Rappel sur l'Oscillateur harmonique en mécanique quantique	1
1.1 Longueur minimal	1
1.2 L'algèbre de Heisenberg modifiée à une dimension	2
1.3 Le modèle quantique de Snyder:	3
1.4 Oscillateur harmonique classique	4
1.5 Mouvement élémentaire en mécanique quantique	5
1.5.1 Forme générale	5
1.6 L'équation de Schrödinger	6
1.7 L'oscillateur harmonique de Dirac	8
2 Oscillateurs de Schrödinger avec le modèle de longueur minimale	11
2.1 l'oscillateur harmonique en unidimensionnel	11
2.2 l'oscillateur harmonique en 1 dimension dans le cas ordinaire	15
2.3 Polynômes de Gegenbauer(ou ultrasphériques)	17
2.4 la constante de normalisation	18
3 Solution exacte de l'oscillateur de Schrödinger avec l'algèbre de Snyder de Sitter	21
3.1 Revue de la relation de la mécanique quantique déformée . .	21
3.2 Solution exacte de l'oscillateur de Schrödinger a une dimension	23
3.3 Terme de normalisations	26
3.4 Solution exacte de l'oscillateur de Schrödinger a D- dimensions	27
3.5 électron dans piège de PENNING	30

Conclusion	33
Référence	35

Introduction

Historiquement, il y a eu de nombreuses recherches dans le but d'étudier les systèmes de la mécanique quantique déformés car ils ont un impact significatif sur l'absorption des infinis qui se trouvent dans les théories de champ standard. Cela a été fait à travers le modèle de snyder qui indique que les mesures de la mécanique non commutative peuvent être dirigées par un principe d'incertitude généralisée (GUP) [1]. Ainsi, une échelle de longueur fondamentale a l'ordre de la longueur de planck [2.], ce qui conduit à son tour à une incertitude minimale non nulle dans la mesure de la position. Cela était initialement motivé par des géométries non commutatives [3.MR-Douglas], la relativité doublement restreinte (DSR) [4.], les théories des cordes[5.S.Capozziello]et la physique des trous noirs [5.].

Le problème de l'oscillateur harmonique est l'un des sujets qui ont été récemment étudiés en relation avec le formalisme de longueur minimale. Ce problème a d'abord été étudié par Kempf [2] qui a obtenu l'écart exact des niveaux d'énergie du système cause par la longueur minimale dans le cas unidimensionnel. Plus tard, Chang et al. Ont généralisé l'étude exacte à des dimensions arbitraires. [6] Le modèle de l'oscillateur harmonique peut décrire parfaitement le mouvement de cyclotron d'un électron dans un piège de *PENNING*.

L'oscillateur harmonique est l'un des plus utilisés, parmi les modèles de physique fondamentale, dans les études expérimentales pour expliquer le confinement car il est caractérisé par des états liés avec l'énergie résiduelle non-nulle. , qui explique l'effet de confinement quantique dans le domaine de la physique nucléaire. Ce système possède une solution analytique et qui est la "brique de base" pour le développement de modèle plus complexes, notamment pour la description de la dynamique des cristaux, et pour les vibrations internes de molécules [7].

Depuis longtemps, l'équation de Schrödinger présentée par le physicien

autrichien Erwin Schrödinger en 1926 a été reconnue comme un outil essentiel pour l'étude des atomes, les noyaux, les molécules et leurs comportements spectraux. Pour cela plusieurs efforts ont été déployés pour trouver la solution exacte (la fonction d'état) de cette équation non relativiste pour divers potentiels décrivant la nature de liaison ou la nature de vibration des systèmes quantiques. Pendant les dernières années, au niveau d'une échelle microscopique, beaucoup de chercheurs continuent d'étudier cette fascinante équation ayant une large application sur plusieurs domaines de physique théorique.

Le but de ce travail est de résoudre exactement l'oscillateur de Schrödinger unidimensionnel et D - dimension dans l'espace déformé obéissant à l'algèbre de Snyder-de Sitter qui donne lieu à l'apparition de l'incertitude minimale en position ainsi que dans impulsion et aussi en déduit les fonctions d'onde normalisées et les spectre d'énergie. En régime de températures élevées

Dans ce mémoire, après une introduction générale nous avons articulé l'essentiel de notre travail sur trois chapitres:

Le premier chapitre, est considéré comme un bref rappel sur rappelle sur l'Oscillateur harmonique en mécanique quantique et l'équation de Schrödinger dans l'espace ordinaire des positions .

Le deuxième chapitre est concentré sur la résolution exacte de l'équation de dimensions arbitraires de l'oscillateur harmonique de Schrödinger avec une relation d'incertitude de longueur minimale

Le troisième chapitre est consacré à une étude explicite des systèmes en question qui ont décrit par les mêmes équations des mouvements du chapitre précédent dans le cadre de la mécanique quantique déformée via le modèle de Snyder.

A la fin on termine notre travail par une conclusion générale.

Chapter 1

Rappelle sur l'Oscillateur harmonique en mécanique quantique

1.1 Longueur minimal

Des études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections la relation d'incertitude de Heisenberg qui impliquent une incertitude minimale non nulle $(\Delta x)_{\min}$ sur la position correspondant cette longueur élémentaire[2]

. Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace temps des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck $l = 10^{-35}m$, ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires. En effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base en mécanique quantique l'une des conséquences fondamentales, qui en découle est la localisabilité des particules : des énergies suffisamment grandes, la position d'une particule peut être mesurée avec une incertitude arbitrairement petite. Ceci est traduit par la relation d'incertitude de Heisenberg habituelle. En fait, cette description est idéaliste ; une relation d'incertitude généralisée, menant une incertitude minimale non nulle, serait plus proche de la réalité physique. C'est ce dernier point qui a poussé les physiciens ces dernières années s'intéresser cette notion de longueur élémentaire en essayant de l'introduire dans le traitement des problèmes physiques, en mécanique quantique, via des cor-

rections aux relations de commutation canoniques. Le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée a été étudié par Kempf et ses collaborateurs . Dans la section qui suit, nous allons présenter une approche qui généralise le principe d'incertitude de Heisenberg en tenant compte de cette notion de longueur élémentaire.[8]

1.2 L'algèbre de Heisenberg modifiée à une dimension

Nous dans ce chapitre, nous considérons les relations de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion:

$$[X, P] = i\hbar (1 + \beta p^2) \quad (1.1)$$

Où β est un paramètre positif. Cette relation de commutation déformée conduit au principe d'incertitude généralisée suivant:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta (\Delta p)^2] \quad (1.2)$$

ce qui implique l'existence d'une incertitude minimale non nulle:

$$(\Delta x)_{\min} = \hbar\beta \quad (1.3)$$

Une représentation explicite des opérateurs de position et de la quantité de mouvement obéissant la relation (3.1.2) est donnée par:

$$x = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right], \mathbf{P} = p \quad (1.4)$$

Où γ est une constante arbitraire . Son choix détermine uniquement la fonction de poids dans la définition du produit scalaire donnée par:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^{1+\frac{\gamma}{\beta}}} \Phi^*(p) \Psi(p) \quad (1.5)$$

Dans la suite, nous allons définir $\gamma = 0$ afin de simplifier les calculs. Une conséquence fondamentale de la longueur minimale est la perte de la notion de localisation dans l'espace de position depuis coordonnées spatiales ne peuvent plus être calculés avec précision plus que $(\Delta x)_{\min}$. [9]

1.3 Le modèle quantique de Snyder:

Dans l'espace de Snyder, les relations de commutation entre les opérateurs de position $\hat{x}_i$ et les opérateurs de moment $\hat{p}_i$ sont écrites comme suit :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\beta^2\hat{j}_{ij} \quad , \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta^2\hat{p}_i\hat{p}_j) \quad (1.6)$$

Etude de quelques équations phénomènes physiques sous les relations d'incertitude de la longueur minimale

D'après ces relations de commutation déformées, il est facile de voir qu'ils peuvent être réalisés en introduisant des opérateurs auxiliaires $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_i$ obéissant à des relations de commutation canoniques comme.

$$\hat{x}_i = \sqrt{1 - \beta^2\hat{P}_K^2} X_i \quad , \quad \hat{p}_j + \frac{\hat{p}_i}{\sqrt{1 - \beta^2\hat{P}_K^2}} \quad (1.7)$$

Le spectre de $\hat{p}_i$ doit être limité par $\hat{P}_K^2 < \frac{1}{\beta^2}$

Où ces opérateurs quantiques vérifient la relation d'incertitude de Heisenberg suivante :

$$\Delta\hat{x}_i \Delta\hat{p}_j \succeq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}_i, \hat{p}_j] \rangle| = \frac{\hbar}{2} [\delta_{ij} + \beta^2 \Delta p_i \Delta p_j + \beta^2 \langle \hat{p}_i \rangle \langle \hat{p}_j \rangle] \quad (1.8)$$

où $\langle p \rangle$ indique la valeur moyenne.

Dans le cas unidimensionnel, les relations d'incertitude se réduisent à:

$$\Delta\hat{x}_i \Delta\hat{p}_j \succeq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle| = \frac{\hbar}{2} [\delta_{ij} + \beta^2 (\Delta p)^2 + \beta^2 \langle \hat{p} \rangle^2] \quad (1.9)$$

Ces incertitudes généralisées ont été étudiées de manière approfondie dans la référence [16], où il a été montré qu'elles impliquent l'existence d'une incertitude de la position minimale, donnée par:

$$\Delta x_M = \hbar\beta\sqrt{1 - \beta^2\langle \hat{p} \rangle^2} \quad (1.10)$$

Sa valeur minimale est obtenue lorsque $\langle \hat{p} \rangle = 0$ comme :

$$\Delta x_0 = \hbar\beta \quad (1.11)$$

En exploitant (1.10), nous pouvons définir les opérateurs de position et de moment agissant sur des fonctions définies dans un espace des moments, comme :

$$\hat{p}\psi(P) = p\psi(P) = \frac{p}{\sqrt{1-\beta^2 p^2}}\psi(P) \quad \hat{x}\psi(P) = i\hbar\sqrt{1-\beta^2 p^2}\frac{\partial\psi(P)}{\partial P} \quad (1.12)$$

1.4 Oscillateur harmonique classique

Revenons tout d'abord à la mécanique classique. Le premier exemple de l'oscillateur harmonique qui nous est enseigné est celui du mouvement d'une masse m suspendue à un ressort de raideur K et écartée d'une longueur x par rapport à sa position d'équilibre.

On sait qu'elle est soumise à une force de rappel :

$$f = -Kx \quad (1.15)$$

force qui dérive d'un potentiel dit parabolique :

$$V = \int_0^x Kx dx = \frac{1}{2}Kx^2 \quad (1.16)$$

L'équation de la dynamique s'écrit sous la forme générale (E énergie totale) :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = E \quad (1.17)$$

Dont la solution est de la forme :

$$x = x_0 \cos \omega t \quad (1.18)$$

Avec :

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{2E}{K}} \quad (1.19)$$

L'amplitude peut varier, la particule (autrement dit la masse suspendue au ressort) oscillant entre $-x_0$ et $+x_0$ avec la fréquence constante :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (1.20)$$

1.5 Mouvement élémentaire en mécanique quantique

1.5.1 Forme générale

Nous admettons que l'onde associée à une particule est une onde stationnaire :

$$\psi = \psi_0(x) \sin \omega t \quad (1.21)$$

dont la pulsation est liée à l'énergie par :

$$E = \hbar \omega \quad (1.22)$$

et dont le carré de l'amplitude représente la probabilité de présence :

$$dP = |\psi(x)|^2 dx \quad (1.23)$$

dP étant la probabilité de trouver la particule dans le segment dx .

Cette fonction ψ est solution de l'équation de Schrödinger qui s'écrit (hypothèses d'une dimension et d'un potentiel parabolique) :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2} K x^2 \right) \psi = 0 \quad (1.24)$$

Cette solution doit nécessairement conduire à (normalisation) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (1.25)$$

On cherche alors une solution de la forme :

$$\psi(x) = y(x) \exp(\alpha x^2) \quad (1.25)$$

α est une constante arbitraire que nous saurons habilement choisir.

1.6 L'équation de Schrödinger

Pour obtenir l'équation de Schrödinger prenons la formule de l'onde plane de De Broglie:

$$\psi(r, t) = Ae^{-(\omega t - \vec{r} \cdot \vec{k})} \quad (1.27)$$

Et on utilise les définitions suivantes de l'énergie et le vecteur d'onde:

$$E = \hbar\omega \quad (1.28)$$

Et

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad (1.29)$$

On remplace ces relations dans l'équation de la fonction d'onde (1.27) on obtient:

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}} \quad (1.30)$$

où

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z \quad (1.31)$$

On dérive la relation (1.30) par rapport à $\vec{r}$, première fois et puis deuxième fois, on obtient:

$$\frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial r_i} = \left(\frac{ip_i}{\hbar}\right) Ae^{\frac{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}} = \left(\frac{ip_i}{\hbar}\right) \psi(\vec{r}, t) \quad (1.32)$$

où

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial r} \vec{k} = \vec{\nabla} \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}^2} = -\frac{p^2}{\hbar} Ae^{\frac{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}} = -\frac{p^2}{\hbar} \psi(\vec{r}, t) \quad (1.34)$$

Et

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 = \Delta \quad (1.35)$$

$$p^2\psi(\vec{r}, t) = -\hbar^2\Delta\psi(\vec{r}, t) \quad (1.36)$$

$$p^2 = -\hbar^2\Delta \quad (1.37)$$

Dérive la relation (1.30) par rapport au temps, on obtient:

$$\frac{\partial\psi(r^{\rightarrow}, t)}{\partial t} = \left(\frac{-iE}{\hbar}\right) Ae^{\frac{-i(Et - \vec{p}^{\rightarrow} \cdot \vec{r}^{\rightarrow})}{\hbar}} = \left(\frac{iE}{\hbar}\right) \psi(r^{\rightarrow}, t) \quad (1.38)$$

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (1.39)$$

On a l'énergie totale du système quantique est donné par la relation :

$$E = \frac{p^2}{2m} + u(\vec{r}) \quad (1.40)$$

Remplace les expressions de E et p^2 dans cette relation et multiplie par $\psi(r^{\rightarrow}, t)$, on trouve:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}^2} + u(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.41)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u(\vec{r})\right)\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) \quad (1.42)$$

où

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u(\vec{r}) \quad (1.43)$$

Alors

$$H\psi(r^{\rightarrow}, t) = E\psi(\vec{r}, t) \quad (1.44)$$

Cette relation est l'équation de Schrödinger [10, 11].

1.7 L'oscillateur harmonique de Dirac

L'équation de Dirac, est déjà un grand pas, dans l'avancée de la Physique, puisque les mystérieuses particules qu'elle décrit, sont présentes dans toutes les structures de la

matière, et depuis des lointains millénaires grâce à leur stabilité, et qui transversent les champs de toutes les disciplines. La fabuleuse idée eue par les physiciens mexicains, M. Moshinsky et A. Szczepaniak dans leur article soumis un 8 juin 1989 [12] ne manque pas de génie ni de grandeur, l'établissement de l'oscillateur harmonique dit de Dirac,

est un succès énorme qu'on présente dans cette section de notre travail. Rappelons d'abord la forme de l'équation linéaire de Dirac

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha p \psi + m \beta \psi \quad (1.45)$$

où t est le temps et

$$p = -i \nabla ; \quad \alpha = \begin{vmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{vmatrix} ; \beta = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

où σ sont les matrices de Pauli qui vérifient la propriété suivante

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (1.47)$$

Maintenant on passe à la substitution, qui est le génie de ce travail et qui se traduit comme suit

$$p \rightarrow p - im\omega\beta r \quad (1.48)$$

Appliquons cela, directement dans l'équation (1.45), on a

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\alpha (p - im\omega\beta r) + m\beta] \psi \quad (1.49)$$

On peut rapidement remarquer, que l'opérateur entre crochets est hermitique, et en

introduisant la fonction d'onde de Dirac comme

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

on peut appeler la composante ψ_1 comme composante superieure, et ψ_2 comme la

composante inférieure du spineur de Dirac.

Et après le développement on retrouve, en explicitant d'abord la substitution

$$im\omega r = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} im\omega r & 0 \\ 0 & -im\omega r \end{vmatrix} \quad (1.51)$$

en regroupant les formules on obtient

$$E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 0 & \sigma(p + im\omega r) \\ \sigma(p - im\omega r) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{vmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} (E - m) \psi_1 &= \sigma(p + im\omega r) \psi_2 \\ (E + m) \psi_2 &= \sigma(p - im\omega r) \psi_1 \end{aligned} \quad (1.53)$$

On résout ce système, en multipliant la première équation par $(E + m)$; puis utilisons la deuxième et la définition (3.3) on obtient l'expression de l'énergie ayant la forme[13]

$$(E^2 - m^2) \psi_1 = \left[(p^2 + m\omega^2 r^2) - 3\hbar\omega m - 4m\frac{\omega}{\hbar} L.s \right] \psi_1 \quad (1.54)$$

où $L = r * p$ est le moment cinétique orbital, et $s = \frac{\hbar}{2}\sigma$ est le moment cinétique

Chapter 2

Oscillateurs de Schrödinger avec le modèle de longueur minimale

2.1 l'oscillateur harmonique en unidimensionnel

Nous représentons les opérateurs de position et moment dans l'espace de moment par:

$$x = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right] \quad (2.1)$$

$$P = p \quad (2.2)$$

Le choix de la constante γ détermine la fonction de poids r est donné par produit:

$$\langle f/g \rangle = \int \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^{1-\alpha}} f^*(p) g(p) \quad (2.3)$$

où

$$\alpha = \frac{\gamma}{\beta} \quad (2.4)$$

Cette définition assure l'hermiticité de X . Dans ce qui suit, nous garderons la valeur arbitraire γ , bien que nous découvrirons finalement que les niveaux d'énergie ne dépendent pas de la valeur γ .

L'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique avec Hamiltonien H

$$H\psi = E\psi \quad (2.5)$$

et

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2m}P^2 \quad (2.6)$$

alors

$$\left(\frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2m}p^2 \right) \psi = E\psi \quad (2.7)$$

nous calculons $X^2\psi$ comme suit :

nous avons:

$$X^2\psi = X(X\psi) = \left[i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right] \right] \left[i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma p \right] \psi(p) \right] \quad (2.8)$$

On remplace les relations (2.1), (2.2) et (2.8) dans l'équation (2.7) on obtient la relation suivante :

$$\left[-m\hbar\omega \left\{ \left((1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + 2\gamma p \left((1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right) + \gamma(\beta + \gamma)p^2 + \gamma \right\} + \frac{1}{m\hbar\omega}p^2 \right] \Psi(p) = \frac{2E}{\hbar\omega} \Psi(p) \quad (2.9)$$

Maintenant pour résoudre l'équation (2.9), nous utilisons le changement suivant dans la variable p

$$\rho \equiv \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \quad (2.10)$$

Où l'intervalle de nouveau changement variable est : $\rho \in]-\infty, +\infty[$ donc l'équation devient

$$\left[-m\hbar\omega \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(\frac{2\gamma}{\sqrt{\beta}} \tan \sqrt{\beta}\rho \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \right\} - \left\{ \frac{1}{m\hbar\omega\beta} - m\hbar\omega\gamma \times \left(1 + \frac{\gamma}{\beta} \right) \right\} \tan^2 \sqrt{\beta}\rho + \left\{ \frac{2E}{\hbar\omega} + m\hbar\omega\gamma \right\} \right] \Psi(\rho) = 0 \quad (2.11)$$

on définit les paramètres sans dimension par :

$$\xi = \frac{\rho}{\sqrt{m\hbar\omega}}; \quad k = \sqrt{m\hbar\omega\beta}; \quad \delta = \frac{\gamma}{\beta}; \quad \varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}; \quad (2.12)$$

l'équation (2.11) devient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2k\delta \frac{s}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} - \left\{ \frac{1}{k^2} - k^2\delta(1+\delta) \right\} \frac{s^2}{c^2} + (\varepsilon + k^2\delta) \right] \psi(\xi) = 0 \quad (2.13)$$

Où

$$c \equiv \cos k\xi \longrightarrow \frac{\partial c}{\partial \xi} = -ks \quad (2.14)$$

$$s \equiv \sin k\xi \longrightarrow \frac{\partial s}{\partial \xi} = kc \quad (2.15)$$

Nous utilisons la transformation suivante :

$$\psi(\xi) = c^{\lambda+\delta} f(s) \quad (2.16)$$

Où λ est une constante à déterminer ultérieurement. Grâce à cette substitution, l'équation différentielle pour $f(s)$ se réduit à la forme suivante

$$(1-s^2)f''(s) - (2\lambda+1)sf'(s) + \left[\left\{ \frac{\varepsilon}{k^2} - \lambda \right\} + \left\{ \lambda(\lambda-1) - \frac{1}{k^4} \right\} \frac{s^2}{c^2} \right] f(s) = 0 \quad (2.17)$$

La variable est maintenant $-1 < s < 1$. Notez que $\left(\delta = \frac{\gamma}{\beta} \right)$ est éliminé de l'équation. nous fixer λ en faisant disparaître le coefficient du terme tangent au carré :

$$\lambda(\lambda - 1) - \frac{1}{k^4} = 0 \quad (2.18)$$

La résolution de relation pour λ donne :

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{k^4}} \quad (2.19)$$

D'après l'expression (2.16), nous voyons que $f(s)$ doit être non singulier à $s = \pm 1$, donc la bonne valeur de λ est :

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{k^4}} \quad (2.20)$$

Cela simplifie l'équation (2.17) à

$$(1 - s^2) f''(s) - (2\lambda + 1) s f'(s) + \left(\frac{\varepsilon}{k^2} - \lambda \right) f(s) = 0 \quad (2.21)$$

De même, $f(s)$ doit être non singulier à $s = \pm 1$. Nous avons donc besoin d'une solution polynomiale pour l'équation (2.21).

Cette exigence impose la condition suivante au coefficient de f :

$$\frac{\varepsilon}{k^2} - \lambda = n(n + 2\lambda) \quad (2.22)$$

où n est un entier non négatif [15]. Eq. (2.21) devient

$$(1 - s^2) f''(s) - (2\lambda + 1) s f'(s) + n(n + 1) f(s) = 0 \quad (2.23)$$

dont la solution est donnée par le polynôme de Gegenbauer

$$f(s) = C_n^\lambda(s) \quad (2.24)$$

Les valeurs propres énergétiques de la condition equation (2.22)

$$\varepsilon_n = k^2 [n^2 + (2n + 1) \lambda] \quad (2.25)$$

$$= k^2 \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) + (2n + 1) \sqrt{1 + \frac{k^4}{4}} \quad (2.26)$$

ou plus explicitement

$$E_n = \hbar\omega \left[\begin{array}{c} (n + \frac{1}{2}) \sqrt{1 + \frac{\beta^2 \mu^2 \hbar^2 \omega^2}{4}} \\ + (n^2 + n + \frac{1}{2}) \frac{\beta \mu \hbar \omega}{2} \end{array} \right] \quad (2.27)$$

Ce résultat est en accord avec Kempf [2]. Les fonctions propres de l'énergie normalisée sont:

$$\Psi_n(p) = 2^\lambda \Gamma(\lambda) \sqrt{\frac{n(n+\lambda)\sqrt{\beta}}{2\pi\Gamma(n+2\lambda)}} c^{\lambda+\delta} C_n^\lambda(s) \quad (2.28)$$

où

$$c = \cos \sqrt{\beta} \rho = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \quad (2.29)$$

$$s = \sin \sqrt{\beta} \rho = \frac{\sqrt{\beta} p}{\sqrt{1 + \beta p^2}} \quad (2.30)$$

2.2 l'oscillateur harmonique en 1 dimension dans le cas ordinaire

Pour la configuration $\{x\}$, en utilisant le principe de correspondance suivant :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, x \rightarrow x \quad (2.30)$$

et

$$p_x \rightarrow -\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.31)$$

l'équation (2.1) devient :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E_n \psi(x) \quad (2.32)$$

ou

$$\left(-\frac{\hbar}{2m\omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right) \psi(x) = \frac{E_n}{\hbar\omega} \psi(x) \quad (2.33)$$

Soit maintenant :

$$\varepsilon_n = \frac{E_n}{\hbar\omega}, \beta = \sqrt{\frac{2\omega m}{\hbar}} x \text{ et } \psi(x) = \phi(\beta) \quad (2.34)$$

on obtient alors l'équation différentielle :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\beta^2}{4}\right) \phi(\beta) = \varepsilon_n \phi(\beta) \quad (2.35)$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2, semblable à l'équation de Legendre de type :

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \phi(\beta) + \left\{ \varepsilon_n - \frac{\beta^2}{4} \right\} \phi(\beta) = 0 \quad (2.36)$$

avec

$$\varepsilon_n = n + \frac{1}{2} \quad (2.37)$$

Les solutions globales de cette équation sont

$$\phi(\beta) = C_1 D_n(\beta) + C_2 D_{-n-\frac{1}{2}}(\beta) \quad (2.38)$$

ou $D_n(\beta)$ est la fonction Hermite : pour que $D_n(\beta)$ soit une série, la condition suivante doit être bien vérifiée

$$\lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \phi(\beta) = 0 \quad (2.39)$$

Ainsi, nous obtenons

$$\phi(\beta) = C_1 D_n \beta \quad (2.40)$$

avec

$$D_n(\beta) = H_{e_n}(\beta) e^{-\frac{\beta^2}{2}} \quad (2.41)$$

et dont

$$H_{e_n}(\beta) = 2^{\frac{n}{2}} H_n\left(\sqrt{2}\beta\right) \quad (2.42)$$

Enfin, les solutions propres sont :

2.3. POLYNÔMES DE GEGENBAUER(OU ULTRASPHÉRIQUES) 17

$$\psi_n(x) = C_n e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \quad (2.43)$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.44)$$

La condition de normalisation C_n se calcule par la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \psi^*(x) dx = 1 \quad (2.45)$$

soit

$$C_n^2 = \frac{\sqrt[2]{\lambda_n}}{2^n \sqrt{\pi n}} \quad (2.46)$$

Passons au calcul du paramètre de Fisher dans la configuration $\{x\}$.

2.3 Polynômes de Gegenbauer(ou ultrasphériques)

Intervalle fondamental : $[-1, 1]$. Mesure : $d\mu(x) = (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dx$, $\alpha > -\frac{1}{2}$.
Normalisation standard (si $\alpha \neq 0$) :

$$C_n^{(\alpha)}(1) = \frac{\Gamma(n + 2\alpha)}{n\Gamma(2\alpha)} \quad (2.47)$$

Coefficient A_n de la relation de récurrence avec cette normalisation :

$$\frac{2(n + 2\alpha)}{n + 1} \quad (2.48)$$

Carré de la norme du polynôme normalisé :

$$\frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(n + 2\alpha)}{n(n + \alpha) (\Gamma(\alpha))^2} \quad (2.49)$$

Équation différentielle :

$$(1 - x^2) y'' - (2\alpha - 1) xy' + n(n + 2\alpha) y = 0 \quad (2.50)$$

Les premiers de ces polynômes sont :

$$C_0^{(\alpha)} = 1 \quad (2.51)$$

$$C_1^{(\alpha)} = 2\alpha x \quad (2.52)$$

$$C_2^{(\alpha)} = -\alpha + 2\alpha(1 + \alpha)x^2 \quad (2.53)$$

$$C_3^{(\alpha)} = -2\alpha(1 + \alpha)x + \frac{3}{4}\alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha)x^3 \quad (2.54)$$

Les polynômes de Gegenbauer sont un cas particulier ($\alpha = \beta$) des polynômes de Jacobi

2.4 la constante de normalisation

la solution de l'équation peut être exprimée en termes de polynômes de Gegenbauer [15]

$$f(u) = RC_n^v(u) \quad (2.55)$$

où R est constante de normalisation.

pour déterminer la constante R en appliquant la formule :

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 - \alpha_2 p^2}} \psi^*(p) \psi(p) = 1 \quad (2.56)$$

Puis en utilisant l'identité suivant

$$\int dp (1 - q^2)^{v - \frac{1}{2}} [C_n^v(u)]^2 = \frac{\pi 2^{1-2v} \Gamma(2v - n)}{n! (n + v) [\Gamma(v)]^2} \quad (2.57)$$

on a :

$$R = \frac{2^{v-1} \alpha_2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3\pi}} \left[\frac{\Gamma(2v - n)}{n! (n + v) [\Gamma(v)]^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.58)$$

Nous obtenons pour la fonction d'onde énergétique normalisée l'expression :

$$\psi(p)_n = \frac{2^{v-1} \alpha_2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[2]{3\pi}} \left[\frac{\Gamma(2v-n)}{n! (n+v) [\Gamma(v)]^2} \right]^{-\frac{1}{2}} C_n^v(u) \quad (2.59)$$

ou

$$u = \sin k\rho \quad (2.60)$$

$$v = \cos k\rho \quad (2.61)$$

Chapter 3

Solution exacte de l'oscillateur de Schrödinger avec l'algèbre de Snyder de Sitter

3.1 Revue de la relation de la mécanique quantique déformée

Dans le modèle de SdS non relativiste, l'algèbre de Heisenberg déformée dans le cas tridimensionnel est défini par la relation de commutation suivante

$$[X_i, P_i] = i\hbar (\delta_{ij} + \alpha_1 X_i X_j + \alpha_2 P_i P_j + \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2} (X_i P_j + X_j P_i)) \quad (3.1)$$

$$[X_i, X_j] = i\hbar \alpha_2 \xi_{ijk} L_k \quad (3.2)$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar \alpha_1 \xi_{ijk} L_k \quad (3.3)$$

Où α_1 et α_2 sont de petits paramètres positifs définissant la déformation provenant de l'algèbre de Snyder et l'espace de Sitter respectivement et $\xi_{ijk} X_i P_j$ désigne les composantes de l'angle opérateur de moment satisfaisant à l'algèbre habituelle :

$$[L_i, X_j] = i\hbar\xi_{ijk}X_k \quad (3.4)$$

$$[L_i, P_j] = i\hbar\xi_{ijk}P_k \quad (3.5)$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar\xi_{ijk}L_K \quad (3.6)$$

De la même manière que dans la mécanique quantique ordinaire, la relation de commutation (3.1) donne lieu à des incertitudes des relations de Heisenberg

$$\left(\gamma_{ij} = (\sqrt[2]{\alpha_1}(X_i) + \sqrt[2]{\alpha_2}(P_i))^2 \geq 0\right) \quad (3.7)$$

$$\Delta X_i \Delta P_j \geq \frac{\hbar}{2} (\delta_{ij} + \gamma_{ij} + \alpha_1 (\Delta X_i)^2 + \alpha_2 (\Delta P_i)^2 - 2\sqrt[2]{\alpha_1 \alpha_2} \Delta X_i \Delta P_i), i = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

De son côté la relation (3.2) implique l'apparition d'une longueur minimale non nulle en position et incertitude de moment :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt[2]{\frac{\alpha_2 (1 + \gamma)}{1 + 2\sqrt[2]{\alpha_1 \alpha_2}}}, (\Delta P_i)_{\min} = \hbar \sqrt[2]{\frac{\alpha_1 (1 + \gamma)}{1 + 2\sqrt[2]{\alpha_1 \alpha_2}}} \quad (3.9)$$

Les opérateurs non commutatifs X_i et P_i satisfaisant à l'algèbre SdS correspondent (3.1) à la relation d'incertitude (3.4) dans l'espace de position et d'impulsion. Afin d'étudier les problèmes de mécanique quantique, nous représentons ces opérateurs comme des fonctions des opérateurs X_i et P_i , satisfaisant les relations de commutation canoniques habituelles de la mécanique quantique ordinaire. Nous écrivons X_i et P_i en fonction de P_i et ∂_{P_i} avec les transformations suivantes et nous utilisons le terme "moment" pour ces transformations:

$$X_i = \iota \hbar \sqrt[2]{1 - \alpha_2 P^2} \frac{\partial}{\partial P} + \lambda \sqrt[2]{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{P}{\sqrt[2]{1 - \alpha_2 P^2}} \quad (3.10)$$

$$P_i = \iota \hbar \sqrt[2]{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \sqrt[2]{1 - \alpha_2 P^2} \frac{\partial}{\partial P} + (1 - \lambda) \frac{P^2}{\sqrt[2]{1 - \alpha_2 P^2}} \quad (3.11)$$

Où p varie dans le domaine $-\left[\frac{1}{\sqrt[2]{\alpha_2}}, \frac{1}{\sqrt[2]{\alpha_2}}\right]$ et λ est une constante réelle arbitraire.

3.2 Solution exacte de l'oscillateur de Schrödinger a une dimension

On définit l'équation générale de l'oscillateur harmonique dans un cas unidimensionnel par la forme suivante :

$$\left\{ \frac{1}{2} \omega^2 X^2 + \frac{1}{2m} P^2 \right\} \psi = E \psi \quad (3.12)$$

Où m est la masse de la particule, ω est la fréquence de l'oscillateur classique.

En utilisant la relation de commutation (3.1) et la réalisation de l'espace de moment des operateurs X et P Nous calculons $X^2 \Psi$ comme suit :

Nous avons :

$$X^2 = X(X\Psi) = -\hbar^2 \left\{ (1 - \alpha_2 p^2) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \lambda \sqrt[2]{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \left(\frac{1 + \alpha_2 p}{1 - \alpha_2 p^2} \right) + \lambda \sqrt[2]{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} p \frac{\partial}{\partial p} + \lambda^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{p^2}{1 - \alpha_2 p^2} \right) \right\} \psi \quad (3.13)$$

Nous calculons $P^2 \Psi$ comme suit :

$$P^2 = P(P\Psi) = -\hbar^2 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 - \alpha_2 p^2) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + (1 - \lambda) \sqrt[2]{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \left(\frac{1 + \alpha_2 p}{1 - \alpha_2 p^2} \right) + (1 - \lambda) \sqrt[2]{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} + (1 - \lambda)^2 \frac{p^2}{1 - \alpha_2 p^2} \right\} \psi \quad (3.14)$$

On remplace les relations (3.13), (3.14) dans l'équation (3.12) on obtient la relation suivante :

$$\left\{ -\hbar \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\sqrt[2]{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + \frac{2i\hbar\Omega}{\sqrt[2]{\alpha_1\alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{i\hbar\Omega}{\sqrt[2]{\alpha_1\alpha_2}} + \frac{\lambda\Omega}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} \right) \frac{\alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \varepsilon \right\} \psi(p) = 0 \quad (3.15)$$

$$\left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gamma \gamma^* \left(\sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 - \frac{2i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\eta\alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \varepsilon \right\} \psi(p) = 0 \quad (3.16)$$

avec

$$\gamma = \left(1 + im\omega^2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right), \Omega = \alpha_1 (\gamma \gamma^* \lambda - 1) \quad (3.17)$$

$$\eta = \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} \left(\frac{\lambda}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{i\hbar}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2}} \right), \varepsilon = 2mE - \frac{i\hbar\Omega}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2}}$$

Maintenant pour résoudre l'équation (3.16), nous utilisons le changement suivant dans la variable p :

$$p \rightarrow \rho = \frac{1}{k} \arcsin(\sqrt{\alpha_2} p) \text{ et } k = \hbar \sqrt{\alpha_1 \gamma \gamma^*} \quad (3.18)$$

Où l'intervalle de nouveau changement variable est : $\rho \in]-\infty, +\infty[$ Donc l'équation devient

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2\delta \tan(k\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} - \eta \tan^2(k\rho) + \varepsilon \right\} \psi(\rho) = 0 \quad (3.19)$$

où

$$\delta = -\frac{i\hbar}{k\alpha_1\alpha_2} \quad (3.20)$$

Nous utilisons la transformation suivante :

$$\psi(\rho) = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}\left(u + \frac{\delta}{k}\right)} f(u) \quad (3.21)$$

Où u est une constante à déterminer ultérieurement et $u = \sin(k\rho)$. Grâce à cette substitution (3.21), l'équation différentielle pour $f(u)$ se réduit à la forme suivante :

$$\left[(1 - u^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - (2u + 1) u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\varepsilon}{k^2} - \left(u + \frac{\delta}{k} \right) \right] f(u) = 0 \quad (3.22)$$

Où nous avons choisi :

$$v(v-1) = \frac{\delta}{k} \left(\frac{\delta}{k} + 1 \right) + \frac{\eta}{k^2} \quad (3.23)$$

Afin d'éviter des valeurs propres complexes de ε , nous devons imposer la condition $\Omega = 0$ pour éliminer la partie imaginaire en (3.12) cela fixe la valeur du paramètre arbitraire λ :

$$\lambda = \frac{1}{\gamma\gamma^*} = \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} \quad (3.24)$$

Cela amène également l'équation différentiel (3.22) à la forme Gegenbauer [39 I.S. Gradshteyn] .

$$\left[(1-u^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - (2v+1) u \frac{\partial}{\partial u} + n(n+2v) \right] f(u) = 0 \quad (3.25)$$

Où n et ν satisfont les relations:

$$\frac{\varepsilon}{k^2} - v = n(n+2v) \text{ et } (v-1) = \frac{\eta}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{m^2\omega^2}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} - m\hbar\omega \right) \quad (3.26)$$

La résolution de la deuxième relation pour ν donner:

$$v = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt[2]{1 + \frac{4}{k^2} \left(\frac{m^2\omega^2}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} - m\hbar\omega \right)} \right) \quad (3.27)$$

D'après l'expression (3.14), nous voyons que $f(u)$ doit être non singulier à $u = \pm 1$, donc la bonne valeur de ν est:

$$v = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt[2]{1 + \frac{4}{k^2} \left(\frac{m^2\omega^2}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} - m\hbar\omega \right)} \right) \quad (3.28)$$

En insérant les expressions de ν et ε on obtient le spectre d'énergie déformé E_n est :

$$E_n = \hbar\omega \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} \right) \left(\frac{m^2\omega^2}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} + \frac{\hbar^2 m^2\omega^2}{4} \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} \right) \right)} + \frac{(n^2 + n + \frac{1}{2}) \frac{\hbar m\omega}{2} \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} \right)}{\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} \right)} \right] \quad (3.29)$$

En raison de la modification de l'algèbre de Heisenberg, ces expressions du spectre d'énergie contiennent un terme de correction supplémentaire provenant de la déformation et ses valeurs augmentent avec les deux paramètres α_1 et α_2 . Ici, il convient de noter que, selon la dépendance n^2 des niveaux d'énergie qui explique le confinement dans la zone de haute énergie, notre résultat est similaire aux énergies d'une particule quantique non-relativiste se déplaçant dans un potentiel de

puits carré. La forme de notre spectre d'énergie peut être testée comme suit : En utilisant la limite $\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0}$, nous obtenons les mêmes résultats que dans le cas de l'oscillateur de Schrödinger à une dimension (SchO) avec la présence d'une longueur minimale équ [13] (avec $\beta = \alpha_2$ et). Par la suite, lorsque les paramètres déformés sont absents, c'est-à-dire $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, le résultat est strictement cohérent avec l'oscillateur de Schrödinger ordinaire en 1-dim c'est-à-dire

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.30)$$

3.3 Terme de normalisations

La fonction d'onde $\Psi(p)$ complète doit satisfaire aux exigences suivantes de normalisation :

$$\psi(p) = \Lambda (1 - u^2)^{\frac{v}{2}} c_n^v(u) = \Lambda (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{v}{2}} c_n^v(\sqrt[2]{\alpha_2} p) \quad (3.31)$$

On peut obtenir la constante de normalisation Λ en appliquant la condition de normalisation déformée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{1}{2}}} \psi^*(p) \psi(p) = 1 \quad (3.32)$$

Puis en utilisant l'identité suivante [15] :

$$\int_{-1}^{+1} dp (1 - q^2)^{v-\frac{1}{2}} [c_n^v(q)]^2 = \frac{\pi 2^{1-2v} \Gamma(2v+n)}{n! (n+v) [\Gamma(v)]^2} \quad (3.33)$$

nous obtenons :

$$\Lambda = \frac{2^v \alpha_2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[2]{2\pi}} \sqrt[2]{\frac{n! (n+v) [\Gamma(v)]^2}{\Gamma(2v+n)}} \quad (3.34)$$

3.4. SOLUTION EXACTE DE L'OSCILLATEUR DE SCHRÖDINGER A D- DIMENSIONS 27

Ceci complète la détermination des fonctions d'onde(3.23) Vérifions maintenant ces solutions en étudiant les limites $\alpha_1 \rightarrow 0$ et $\alpha_2 \rightarrow 0$ à partir de(3.22). En utilisant les relations suivantes[15] :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v^{-\frac{v}{2}} c_n^{\frac{v}{2}} \left(x \sqrt{\frac{2}{v}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x), \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(v+a)}{\Gamma(v)} \quad (3.35)$$

Avec la formule du doublement :

$$\Gamma(2v) = \frac{2^{2v-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(v) \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \quad (3.36)$$

Et nous limiter au premier ordre de $\alpha_2 \left((1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{v}{2}} = \exp\left(-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}\right) \right)$, nous obtenons directement la fonction propre de l'espace de momentum du scho habituel (sans déformation) :

3.4 Solution exacte de l'oscillateur de Schrödinger a D- dimensions

On définit l'équation générale de l'oscillateur harmonique à D-dimension par la forme suivante :

$$\left\{ \frac{1}{2} \omega^2 X^2 + \frac{1}{2m} P^2 \right\} \psi = E \psi \quad (3.37)$$

En raison de la symétrie rotationnelle de cette équation, nous pouvons séparer la partie angulaire et la partie radiale de la fonction d'onde de moment comme suit

$$\psi(p) = Y_{l_{(D-1)} \dots l_2 l_1}^m(p) \varphi(p) \quad (3.38)$$

Où $Y_{l_{(D-1)} \dots l_2 l_1}^m$ sont des harmoniques ultra-sphériques D-dimensionnelles ; cela nous permet de faire les remplacements suivants dans l'espace de moment (l est le nombre quantique orbital):

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial p_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{D-1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2} \quad (3.39)$$

$$\sum_{i=1}^D p_i \frac{\partial}{\partial p_i} = p \frac{\partial}{\partial p} \quad (3.40)$$

$$L^2 = l(l + D - 2) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

En utilisant la définition de la réalisation d'espace de moment des opérateurs X et P en (3.10) et (3.11), on obtient l'équation suivante dans l'espace de moment déformé :

$$\left\{ \begin{aligned} & \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gamma \gamma^* \left(1 - \alpha_2 p^2 \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left(\frac{D-1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2} \right) - \\ & \left(\frac{2i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\eta\alpha_2 p^2}{1-\alpha_2 p^2} + \varepsilon \right) \end{aligned} \right\} \psi(p) = 0 \quad (3.41)$$

où, les expressions de γ , Ω et η sont données dans (3.12) et ϵ est défini par :

$$\epsilon = \varepsilon - \frac{Di\hbar\Omega}{\sqrt[2]{\alpha_1\alpha_2}} \quad (3.42)$$

Maintenant, pour résoudre (3.31) nous utilisons la même transformation (3.13) du cas 1-dim pour obtenir :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left(k(D-1) \cot(k\rho) - \frac{2i\hbar\Omega}{k\sqrt[2]{\alpha_1\alpha_2}} \tan(k\rho) \right) \frac{\partial}{\partial p} - k^2 l(l + D - 2) \cot^2(k\rho) - \\ & \left(\frac{1-\lambda}{\alpha_2} - m\omega\hbar \right) \tan^2(k\rho) + \varepsilon \end{aligned} \right\} \varphi(\rho) = 0 \quad (3.43)$$

Afin de simplifier cette équation, nous utilisons les ansatz suivants:

$$\varphi(\rho) = (1 - q^2)^{\frac{\mu}{2}} q^l f(q) \quad (3.44)$$

Où μ est une constante à déterminer et $q = \sin(k\rho)$. Ce faisant, l'équation différentielle pour $f(q)$ (3.35) est écrite comme :

$$\left\{ (1 - q^2) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left[-(2\mu + 2l + D)q + \frac{2l + D - 1}{q} \right] \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\varepsilon}{k^2} - (2l - D)\mu - l \right\} \varphi p \quad (3.45)$$

Où μ est choisi pour simplifier cette équation comme:

$$\mu(\mu - 1) - \frac{1}{k^2} \left(\frac{1 - \lambda}{\alpha_2} - m\omega\hbar \right) = 0 \quad (3.46)$$

À partir de l'expression (3.36), nous voyons que $f(q)$ doit être non singulier lorsque $q = \pm 1$, ce qui implique :

$$\mu = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \left(\frac{m^2\omega^2}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} - m\hbar\omega \right)} \right) \quad (3.47)$$

Nous notons que l'équation (3.37) possède trois points singuliers $q = 0, 1, -1$. Afin de réduire cette équation à une classe d'équations différentielles connues avec une solution polynomiale, nous utilisons un autre changement dans la variable; nous écrivons $z = 2q^2 - 1$ et imposons la condition suivante :

$$n_r = (n_r + a + b + 1) = \frac{1}{4} \left[\frac{\epsilon}{k^2} - (2l - D)\mu - l \right] \quad (3.48)$$

où n est un entier non négatif (nombre quantique radial) et nous avons également défini:

$$a = \mu - \frac{1}{2}, b = l - 1 + \frac{D}{2} \quad (3.49)$$

Maintenant, l'équation différentiel (3.48) se transforme en la forme Jacobi suivante :

$$(1 - z^2) \frac{d^2g}{dz^2} + [(b - a) - (a + b + 2)z] \frac{dg}{dz} + n_r(n_r + a + b + 1)g(z) = 0 \quad (3.50)$$

Les solutions sont données par les polynômes de Jacobi $g(z) = P_n^{(a,b)}(z)$ et donc la fonction d'onde radiale $\varphi_{(n,l)}(p)$ est:

$$\varphi_{n,l}(p) = N (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\mu}{2}} (\alpha_2 p^2)^{\frac{1}{2}} p_{n_r}^{(a,b)} (2\alpha_2 p^2 - 1) \quad (3.51)$$

Pour déterminer la constante de normalisation N , nous utilisons la condition de normalisation déformé dans l'espace D-dim des fonctions d'onde radiale :

$$\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}}} \frac{Dp^{D-1}dp}{(1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{1}{2}}} \psi^*(p) \psi(p) = 1 \quad (3.52)$$

et la relation d'orthogonalité polynomiale de Jacobi[15] :

$$\int_{-1}^{+1} dy (1-y)^a (1+y)^b [p_{n_r}^{(a,b)}(y)]^2 = \frac{\pi 2^{2\alpha+\beta+1} \Gamma(a+n_r+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+1+2n_r) \Gamma(\alpha+\beta+n_r+1)} \quad (3.53)$$

donc nous obtenons l'expression:

$$N = \frac{2\alpha_2^{\frac{d}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n! (2n + \mu + l + \frac{D-1}{2}) \Gamma(2n + \mu + l + \frac{D-1}{2})}{D \Gamma(n_r + \mu + \frac{1}{2}) \Gamma(n_r + l + \frac{D}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.54)$$

Maintenant, pour trouver les énergies, nous substituons les relations (3.34) et (3.39) dans la condition (3.40) et nous définissons le nombre quantique principal n par $n = 2n_r + l$, de sorte que nous obtenons le spectre d'énergie comme suit:

$$E_{n,l} = \hbar\omega \left[\left(n + \frac{D}{2} \right) \sqrt{\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} \right) \left(\frac{m^2\omega^2}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} + \frac{\hbar^2 m^2 \omega^2}{4} \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} \right) \right)} + \frac{(n^2 + nD + \frac{D}{2} - L^2) \frac{\hbar m \omega}{2} \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} \right)}{\left(n^2 + nD + \frac{D}{2} - L^2 \right) \frac{\hbar m \omega}{2} \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2} \right)} \right] \quad (3.55)$$

L'expression montre que nous avons le même terme que dans le cas 1-dim avec un petit offset et une nouvelle correction contenant le nombre quantique orbital l ; Il soulève la dégénération des énergies qui reste, cependant $(2l+1)$. La relation (3.46) montre également que les contributions provenant de la des déformations augmentent avec la dimension de l'espace D mais diminuent avec le nombre quantique l . Cette forme du spectre d'énergie peut être testée en prenant la limite $\alpha_1 \rightarrow 0$ et $\alpha_2 \rightarrow 0$ on obtient le résultat exact du D-dim. Du ShO sans déformation càd $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{D}{2} \right)$

3.5 électron dans piège de PENNING

La dépendance n^2 des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique, serait une signature sans erreur des relations de commutation modifiées Eq. (3.1)

ou (3.2). Même si $\alpha_2 (\alpha_1 = 0)$ était petit, l'écart par rapport à la dépendance n habituelle devrait être manifeste pour un n suffisamment grand. Le mouvement cyclotron d'un électron dans un piège de Penning [14] est en fait un oscillateur harmonique unidimensionnel. En recherchant des changements dans ses niveaux d'énergie, nous pouvons être en mesure de placer une contrainte sur α_2 . À l'ordre principal dans α_2 et n , la déviation des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique par rapport au canonique $\hbar\omega (n + \frac{1}{2})$ et donnée par

$$\frac{\Delta E_n}{\hbar\omega} = \left(\frac{\alpha_2 m \hbar \omega}{2} \right) n^2 \quad (3.56)$$

qui croît rapidement avec n . Notez que la combinaison de paramètres qui est contenue par une mesure de $\frac{\Delta E_n}{\hbar\omega}$ est $\beta m \hbar \omega$. La fréquence cyclotron d'un électron piégé dans un champ magnétique de force B est (en unités SI)

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e} \quad (3.57)$$

Donc

$$m_e \hbar \omega_c = (e \hbar) B = (1.7 \times 10^{-53} \text{ kg}^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2 / \text{t}) B \quad (3.58)$$

qui est indépendante de la masse d'électrons m_e . Pour une force de champ de piégeage de $B = 6T$, on obtient

$$m_e \hbar \omega_c = e \hbar B = (1.0 \times 10^{-53} \text{ kg}^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2) B \quad (3.59)$$

Même si nous prévoyons que mesurer avec précision les niveaux d'énergie pour un très grand n serait difficile, supposons pour les besoins de l'argumentation que des écarts aussi grands que $\hbar\omega_c$ seraient détectables. Alors, l'absence d'un tel écart pour le n -ième niveau d'énergie impliquerait

$$\left(\frac{\alpha_2 e \hbar B}{2} \right) n^2 < 1 \quad (3.40)$$

$$\alpha_2 < \left(\frac{2}{e \hbar B} \right) \frac{1}{n^2} = \frac{2.0 \times 10^{52} \text{ m}^2 / \text{j}^2 \text{ s}^2}{n^2} \quad (3.41)$$

Cela se traduit par

$$\hbar \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} < \sqrt{\left(\frac{2}{eB}\right) \frac{1}{n^2}} = \frac{1.5 \times 10^{-8} m}{n} \quad (3.42)$$

comme limite de la longueur minimale, Eq.(1.3), et

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} > \sqrt{\frac{e\hbar B}{2}} n^2 = (7.1 \times 10^{-27} kg \ m/s) n = (13 ev/c) n \quad (3.43)$$

pour l'échelle de moment de la chaîne. En dehors de la question technique pour savoir si on peut mesurer avec précision les niveaux d'énergie pour n grand, nous devons exiger que n satisfasse

$$\frac{n\hbar\omega_c}{m_e c^2} \ll 1 \quad (3.44)$$

pour que notre électron reste non relativiste. Ceci conduit à la contrainte

$$n \ll \frac{m_e c^2}{\hbar\omega_c} = \frac{(m_e c)^2}{(e\hbar) B} \approx 10^9 \quad (3.45)$$

Cette condition maintient également le rayon du mouvement cyclotron de l'électron pour être bien dans la géométrie du piège de Penning. Par conséquent, la valeur maximale

de n pouvant être utilisée pour contraindre α_2 serait $n \sim 10^8$ si nous autorisons une correction relativiste de 10%. Le meilleur limite on α_2 qui peut être atteint sera donc

$$\Delta x_{\min} = \hbar\sqrt{\alpha_2} < 10^{-16} m, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} > 1 GeV/c \quad (3.46)$$

Obtenir une meilleure limite serait difficile car améliorer la limite de $\sqrt{\alpha_2}$ d'un ordre de grandeur nécessite d'améliorer la limite de α_2 de deux ordres de grandeur

Conclusion

Dans ce mémoire, Nous avons étudié, avec un calcul explicite dans la représentation de l'espace de moment l'oscillateur de Schrödinger dans une dimension arbitraire dans le cadre de la mécanique quantique déformée avec des relations de commutation Snyder-de Sitter; ces déformations conduisent à une incertitude minimale non nulle dans la mesure de la position et de l'impulsion de la particule .

En premier lieu nous avons étudié l'oscillateur harmonique unidimensionnel de Schrödinger dans, l'expression exacte des niveaux d'énergie est obtenue et la fonction d'onde est exprimée avec les polynômes de Gegenbauer. Le spectre d'énergie associé est trouvé avec une correction supplémentaire à la normale; cette correction dépend des paramètres de déformation de l'algèbre de Snyder et de l'espace de Sitter.

En second lieu nous avons généralisé la même étude dans le contexte de la mécanique quantique déformée par le formalisme de Snyder de Sitter . Dans ce cas, les solutions exactes sont obtenues en terme de polynomial de Jacobi. Concernant les niveaux d'énergie associés, nous avons trouvé un terme en fonction du nombre quantique orbital l qui était absent dans le cas non déformé.. Finalement, nous avons constaté que l'influence de la déformation de l'espace due à la modification de l'algèbre de Heisenberg standard a provoqué des changements considérables au niveau de nos résultats.

Ce travail a permis d'ouvrir quelques perspectives théoriques en particulier l'étude de solution de l'équation de l'oscillateur harmonique de Schrödinger en présence d'un champ électromagnétique uniforme dans le modèle de Snyder de Sitter.

Référence

- [1] H.S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947)
- [2] A. Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994); A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, Phys. Rev.D 52, 1108 (1995)
- [3] M.R. Douglas and N.A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73, 977 (2001)
- [4] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. B 510, 255 (2001); G. Amelino-Camelia, Int. J. Mod. Phys.D 11, 35 (2002)
- [5] F. Scardigli, Phys. Lett. B 452, 39 (1999); F. Scardigli and R. Casadio, Class. Quant. Grav.20, 3915 (2003)
- [6] L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, Phys. Rev. D65 (2002) 125028.
- [7] C. Cohen. Tannoudji, B. Diu, et F. Laloe, mécanique quantique Tome1, 480-486, 21octobre (1997).
- [8] M. H. Pacheco, R. R. Landim, and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. A 331, 93 (2003)
- [9] F. Z. Bensaci, S. Terliche relations d'incertitude de la longueur minimale (*Etudedequelqueséquationsphénomènesphysiquessousles*),Mémoire Master, Université de ouargla,(2018) .
- [10] N. Ershaidat, Quantum Mechanics, Phys. 251. chapitre 5, Lecture 18.
- [11] E. Chpolski, Physique atomique, tome I, Traduction Français Edition Mir, (1977).
- [12] J. Phys. A : Math. Gen. 22(1989)L817-L819.
- [13] M Moshinsky and A Szczepaniak 1989 J. Phys. A : Math. Gen. 22 L817
- [14] F. S. Brown and G. Gabrielse, Rev. Mod. Phys. 58,233(1986) ; R. K. Mittleman, I. I. Jeannou, H. G. Dehmelt, and N.Russell, Phys. Rev. Lett. 83, 2116 (1999); H. Dehmelt, R. Mittleman,

- R. S. van Dyck, and P. Schwinberg, *ibid.* 83, 4694 (1999)
- [15] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products (Academic, New York, 1980).

Résumé:

Dans ce travail on a étudié les effets des relations de commutation de Snyder-de Sitter sur une particule non relativistes en résolvant analytiquement dans la représentation de l'espace de moment l'oscillateur de Schrödinger en dimensions arbitraire. Le spectre exact des états liés et les fonctions correspondantes des ondes de l'espace de moment sont obtenus en utilisant des polynômes de Gegenbauer dans l'espace à une dimension et des polynômes de Jacobi dans le cas des dimensions D . Enfin, Nous parlerons également de l'électron dans un piège penning et de sa relation avec se système.

Mots Clés: Mécanique quantique non relativiste, Equation de Schrödinger, Oscillateur harmonique, algèbre de Snyder-de Sitter

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة تأثيرات علاقات التبديل لـ سنيدر دي سيتير العير الارتباطية علي الجسيم غير نسبي وذلك عن طريق الحل التحليلي في التمثيل الفضاء اللحظي لمذبذب شرودينغار في ابعاد كيفية . يتم الحصول علي الطيف للحالات المقيدة والوظائف المقابلة الفضائية اللحظية باستخدام كثيرات حدود لـ جيجنباور في فضاء أحادي البعد وكثير حدود لـ جاكوبي حالة أبعاد متعددة . وفي الأخير ، تحدثنا كيفية وضع إلكترون في فخ بانينق وعلاقته بهذا النظام

الكلمات المفتاحية

ميكانيك الكم الغير النسبية , معادلة شرودينغار ,مذبذب توافقي ,جبر سنيدر دي سيتير

Abstrat :

In this work the effects of Snyder-de Sitter switching relations on a non-relativistic particle were investigated by analytically resolving the Schrödinger oscillator in the representation of the moment space in arbitrary dimensions. The exact spectrum of the related states and the corresponding functions of the moment space waves are obtained using Gegenbauer polynomials in the one-dimensional space and Jacobi polynomials in the case of the D -dimensions. Finally, we will also talk about the electron in a penning trap and its relation with its system.

Keywords: Non relativistic quantum mechanics ,Schrödinger equation; Harmonic oscillator Snyder-de Sitter algebra