Université Abbes Laghrour Khenchela — جامعــــــــــــة عباس لغرور خنشلة

Faculté des Sciences et Technique — كليــــــــــة العلـــــوم و التكنولوجيــا

Département de Génie Electrique — قسم الهندسة الكهربائية

Module : Modélisation & identification des systèmes électriques **Date : 05/05/2026** السنة أولى ماستر تحكم كهربائي

Question de cours (7pts)

1- Que signifier les mots suivants : Modélisation et Identification, Système et Que ce qu'un modèle.

2- Citer les différents types de modèles.

3- Décrire les étapes de calcul des paramètres de la fonction de Strejc.

4- Donner la relation du critère de minimisation de l'erreur dans la méthode des moindres carrés matricielle.

5- Démontrer que les coefficients associés à la fonction de Broïda s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 5.5\,(t_2 - t_1) = \tau \\ 2.8t_1 - 1.8t_2 = T \end{cases}$$

Exercice 1 (6pts)

Un moteur à courant continu à excitation séparée à flux constant ayant les équations électriques et mécaniques suivante :

$$u = R.i + L\frac{di}{dt} + K\Omega \qquad (1) \qquad\qquad J\frac{d\Omega(t)}{dt} = K\mathrm{i} - \mathrm{F}\Omega - \mathrm{C}_r \qquad (2)$$

Le modèle d'état du système est donné par : $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = \frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = A\boldsymbol{X} + B\boldsymbol{U} + E\boldsymbol{C_r} \\ Y = C\boldsymbol{X} + D\boldsymbol{U} \end{cases}$

Tel que $X = \begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} i \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad U = u$

a- Déterminer les matrices A, B, E et C

b- Déterminer la fonction de transfert qui relie Ω à U

c- Tracer le schéma bloc interne de ce moteur

Exercice 2 (7pts)

Soit le signal y(t) donner par son data suivante $\mathrm{t} = [1\ 2\ 3\ 4]^T$ et $y = [0.5\ \ 2.75\ \ 5.8\ \ 9.6]^T$

1- Tracer le nuage de points $y_i = f(t_i)$

2- Tracer la droite qui passe par un grand nombre de points de ce nuage.

3- Utilisons la méthode des moindres carrées (régression linéaire), trouvez les coefficients de la droite d'ajustement ***y(t)*** $=\boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{\beta_1}.\boldsymbol{t}$ par la méthode des moindres carrés matricielle

4- Tracer la droite d'ajustement après calcul des coefficients $\boldsymbol{\beta_0}$ et $\boldsymbol{\beta_1}$ sur le même graphe

5- Calculer l'erreur entre y_i et $Y_{estimée}$

6- Démontrer que la relation suivante : $Y = A\theta$ peut s'écrite ce cette forme : $\theta = (A^T A)^{-1} A^T Y$

Bon courage

Corrigé Type

Question de cours (7pts)

1- ***a- Modélisation*** *: consiste à établir une représentation mathématique d'un système réel à partir de lois physiques, de principes fondamentaux ou d'hypothèses simplificatrices.* 0.5

b- ***Identification :*** *des systèmes vient compléter la modélisation en exploitant les données issues de mesures expérimentales.* 0.5

c- ***Système :*** *est un ensemble organisé d'éléments en interaction, conçu pour accomplir une fonction donnée, et qui transforme des entrées en sorties selon une dynamique déterminée.* 0.5

d- ***Modèle*** *: est une représentation simplifiée d'un système réel, utilisée pour comprendre, analyser et prédire son comportement.* 0.5

2- *Les étapes pour déterminer la fonction de Strejc*

- *Le gain statique est mesuré directement par* $K=\frac{\Delta y}{\Delta u}$ 0.25
- *On trace la tangente au point d'inflexion* I *pour déterminer deux valeurs* T_1 *et* T_2. 0.5
- *Relever* T_1 *et* T_2 *en déduire l'ordre* n *en utilisant le tableau ci-joint. Entre deux lignes du tableau, on choisit la valeur de* n *la plus petite.* 0.25
- *Déterminer la constante du temps* T *à partir du tableau :* $\frac{T_2}{T}$ 0.25
- *Déterminer le retard* τ *quand il existe à partir de la différence entre la valeur de* $T1$*, mesurée et celle donnée par la colonne du tableau* $\frac{T_2}{T_1}$ 0.25

3- *Les différents types de modèles.*

Types de modèles		
Modèle sous forme schéma bloc 0.25	0.25 Modèle sous forme des schémas fonctionnels	0.25 Modèle des fonctions de transfert
linéarisation par modèle d'état 0.25	Modèle d'équation programmation linéaire 0.25	

4- *L'expression du critère de minimisation de l'erreur par la méthode des moindres carrées :*

$$J_{Min} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} e_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - (b + ax_k)^2$$ 0.5

5- Démonstration : $\frac{Y}{KE_0} = 0.28 \Longrightarrow \frac{t-\tau}{T} = 0.328$ 0.5 $\frac{Y}{KE_0} = 0.40 \Longrightarrow \frac{t-\tau}{T} = 0.510$ 0.5

Soient $t_1$et t_2 les temps au bout desquels la réponse expérimentale atteint respectivement 28% et 40% de la valeur finale. On va simplement résoudre le système donné par : $\begin{cases} \frac{t_1-\tau}{T} = 0.328 \\ \frac{t_2-\tau}{T} = 0.510 \end{cases}$ 0.5

$$\begin{cases} t_1 - \tau = 0.328.T \\ t_2 - \tau = 0.510.T \end{cases}$$ 0.25

La résolution de ces équations donne :

$$\begin{cases} 5.5\ (t_2 - t_1) = \tau \\ 2.8t_1 - 1.8t_2 = T \end{cases}$$

Exercice 1 (6pts)

a- Déterminer les matrices A, B, E et C

$$u = R.i + L\frac{di}{dt} + K\Omega \qquad (1)$$

$$J\frac{d\Omega(t)}{dt} = Ki - \mathrm{F}\Omega - \mathrm{C}_r \qquad (2)$$

$$❶ \Longrightarrow \frac{di}{dt} = \ddot{i} = -\frac{R}{L}.i - \frac{K}{L}\Omega + \frac{1}{L}.\mathrm{u}+0.\,\mathrm{C}_r$$ 0.25

$$❷ \Longrightarrow \frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} = \frac{K}{J}\,i - \frac{F}{J}\Omega - \frac{1}{J}\mathrm{C}_r + 0.u$$ 0.25

$$\dot{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix}\dot{\Omega}\\ \ddot{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{F}{J} & \frac{K}{J}\\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}-\frac{1}{J}\\ 0\end{bmatrix}.\mathrm{C}_r$$ 0.25

$$Y = \begin{bmatrix}i\\ \Omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\ \Omega\end{bmatrix} + 0.\mathrm{u}$$ 0.25

$$A = \begin{bmatrix}-\frac{F}{J} & \frac{K}{J}\\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}$$ 0.25 $$B = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix},$$ 0.25 $$\mathrm{E} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{J}\\ 0\end{bmatrix}.$$ 0.25 $$\mathrm{C} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$ 0.25

b- Détermination de la fonction de transfert qui relie Ω à U avec $\mathrm{C}_r = 0$

$J\frac{d\Omega(t)}{dt} = C_e - \mathrm{F}\Omega$ (Laplace)

$Jp\Omega = C_e(\mathrm{p}) - \mathrm{F}\Omega(\mathrm{p})$

$Jp\Omega(\mathrm{p}) - \mathrm{F}\Omega(\mathrm{p}) = C_e(\mathrm{p})$

$\Omega(\mathrm{p})[Jp - \mathrm{F}] = C_e(\mathrm{p})$ 0.25

$\Omega(\mathrm{p}) = \frac{C_e(\mathrm{p})}{[Jp-\mathrm{F}]}$ (*)

$C_e(\mathrm{p}) = \mathrm{K}_m.\mathrm{i}$ (**) 0.25

$u = R.i + L\frac{di}{dt} + E$ (Laplace)

$U(p) = R.I(p) + LpI(p) + E(p)$ 0.25

$I(p) = \frac{U(p)-E(p)}{R+Lp}$, en remplace cette équation dans l'équation (*) on obtient :

$C_e(\mathrm{p}) = \mathrm{K}_m\frac{U(p)-E(p)}{R+Lp}$ 0.5

$C_e(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{K}_m U(p) - \mathrm{K}_m E(p)}{R+Lp}$ 0.25

$C_e(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{K}_m.U(p) - \mathrm{K}_m.K.\Omega(p)}{R+Lp}$ 0.25

En remplace dans (*)

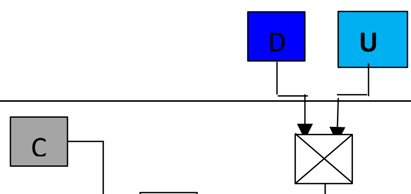
$\Omega(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{K}_m.U(p) - \mathrm{K}_m.K.\Omega(p)}{R+Lp].[Jp-\mathrm{F}]}$ 0.5

$\Omega(\mathrm{p})[R + Lp].[Jp - \mathrm{F}] = \mathrm{K}_m.U(p) - \mathrm{K}_m.K.\Omega(p)$ 0.25

$\Omega(\mathrm{p})[R + Lp].[Jp - \mathrm{F}] \pm \mathrm{K}_m.K.\Omega(p) = \mathrm{K}_m.U(p)$ 0.25

$\frac{\Omega(\mathrm{p})}{U(p)} = \frac{\mathrm{K}_m}{[R+Lp].[Jp-\mathrm{F}]\pm\mathrm{K}_m.K}$ 0.25

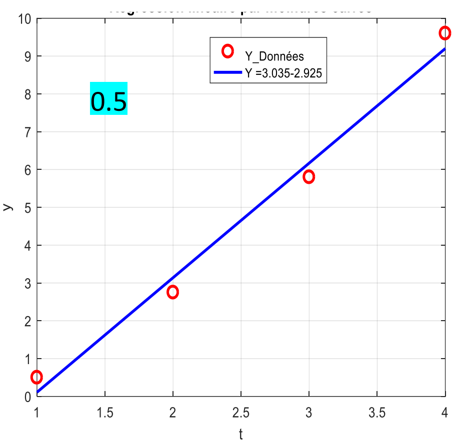
c- Schéma bloc



1

==

Exercice 2 (7pts)



1- le nuage de points $y_i = f(t_i)$

2- Les coefficients de la droite d'ajustement $y_i = \tilde{\beta}_1 t_i + \tilde{\beta}_0$

$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ **0.25**

$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 30$ **0.25**

$\sum_{i=1}^{4} y_i = 0.5 + 2.75 + 5.6 + 9.6 = 18.65$ **0.25**

$\sum_{i=1}^{4} x_i\, y_i = 1 * 0.5 + 2 * 2.75 + 3 * 5.6 + 4 * 9.6 = 61.8$ **0.25**

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{4} x_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} y_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i\, y_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18.65 \\ 61.8 \end{bmatrix}$$ **0.5**

Calcul de la matrice inverse

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det}\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} = \frac{1}{(4*30) - (10)*(10)}\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$ **0.5**

$$= \frac{1}{(120) - 100}\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(20)}\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{20} & -\frac{10}{20} \\ -\frac{10}{20} & \frac{4}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$ **1**

Finalement on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18.65 \\ 61.8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.975 - 30.9 \\ -9.325 + 12.36 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.925 \\ 3.035 \end{bmatrix}$$ **0.75**

Donc la droite d'estimateur par la régression linéaire est donnée par :

3- $\boldsymbol{Y_{esti} = 3.035.t - 2.925}$ **0.25** (Voir la figure ci-dessus)

4- Calcule de l'erreur

t	Y	$Y_{Estimée}$ **0.5**	$e = Y - Y_{Estime}$ **0.5**
1	0.5	3.035*(1)−2.925=0.11	0.39

2	2.75	3.035*(2)−2.925=3.145	−0.395
3	5.8	3.035*(3)−2.925=6.18	−0.38
4	9.6	3.035*(4)−2.925=9.215	0.385

$EQM = \frac{1}{4}\sum_1^4 e^2 = (0.39)^2 + (-0.395)^2 + (-0.385^2 + (0.385)^2 = \frac{0.6007}{4} = 0.1502$ **0.5**

5- Démonstration

$Y = A\theta \implies \theta = A^{-1}Y$ (Faux) **0.25**

$(A^T)Y = (A^T)A\theta$ **0.25** (Multiple par (A^T) **0.25**

$A^T Y = A^T A\,\theta$

$(AA^T)^{-1}A^T Y = (AA^T)^{-1}\,(A^T A)\,\theta$ / $(AA^T)^{-1}\,(A^T A) = [I]$ **0.25**

$\theta = (AA^T)^{-1}A^T Y$

Prof. ***Nabil BENHADDA***