



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH  
جامعة عباس لغرور خنشلة  
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

**Mémoire de fin d'études**  
Pour l'obtention du diplôme de **Master**  
Filière: **Mathématiques**  
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

**Les fonctions E-différentiables**

Réalisé par : **Ben Houria Khalid**  
**Segni Sirine**

Dirigé par : **Mr. Benhadid Ayache**

Membres de jury :

**Mr. Bahri Boubakeur**      **Président**  
**Mr. Mansouri Djamel**      **Examineur**

2020-2021

## Remerciements

*Tout d'abord nous tenons à remercier **Allah** pour tout ce que nous étions donné de force, courage et surtout de connaissances. Aussi que ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, consciente, d'un grand nombre de personnes.*

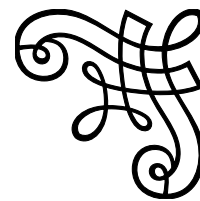
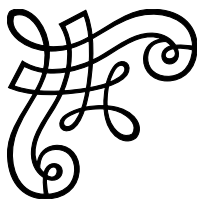
*Nous souhaitons ici les en remercier.*

*Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement **Mr. Benhadid Ayache** qui nous a permis de bénéficier de son encadrement, les conseils qu'il nous a prodigué, la confiance qu'il nous a témoignés ont été déterminants dans la réalisation de notre travail de recherche.*

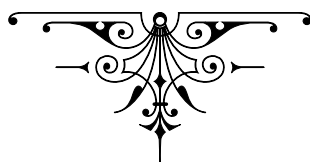
*Nous remercions tout particulièrement **Mr. Bahri Boubakeur** qui accepte devient le président de notre jury et **Mr. Mansouri Djamel** l'examineur de notre jury, pour leurs efforts pour étudier notre mémoire et leurs conseils pour corriger les erreurs et les fautes.*

*Nos remerciements s'étendent également à tous nos enseignants durant les années des études, et bien sure a nos familles et nos amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.*

*Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.*



Dédicase



*A mes très chers parents Amor et Fatma.*

*A mes Frères*

*A mes sœurs*

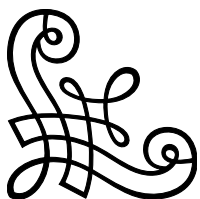
*A mon ami intime Abdelrrezak.*

*A tous mes amis sans exception.*

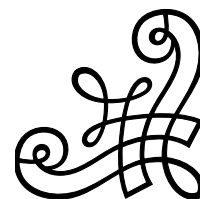
*Et les autres collègues du département.*

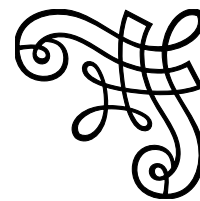
*A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie.*

*A tous mes enseignants.*



*Khalid*





Dédicase

*A mes très chers parents.*

*A mon Frère*

*A mon sœur*

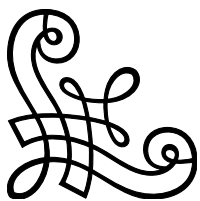
*A mon amie intime.*

*A tous mes amis sans exception.*

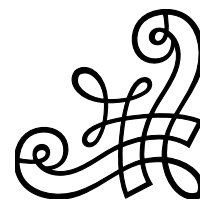
*Et les autres collègues du département.*

*A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie.*

*A tous mes enseignants.*



*Sirine*



# Abstract

In this thesis, we introduce a new definition of an E-differentiable convex function, which transforms a non-differentiable function to a differentiable function under a map  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . By this definition, we can apply Kuhn-Tucker and Fritz-John conditions for obtaining the optimal solution of mathematical programming with a non-differentiable function.

**Keywords :** E-convex set ; E-convex function ; semi E-convex function ; E-differentiable function

# Résumé

Dans ce mémoire, nous introduisons une nouvelle définition d'une fonction convexe E-différentiable, qui transforme une fonction non différentiable en une fonction différentiable sous une application  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Par cette définition, nous pouvons appliquer les conditions de Kuhn-Tucker et Fritz-John pour obtenir la solution optimale de programmation mathématique avec une fonction non différentiable.

**Mots clés :** Ensemble E-convexe ; fonction E-convexe ; fonction semi E-convexe ; fonction E-différentiable

## Notation

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.

$x^T$  : La transposé d'un vecteur colonne  $x$ .

$B(x, r)$  : Boule ouverte de centre  $x$  et le rayon  $r$ .

$\bar{B}(x, r)$  : Boule fermée de centre  $x$  et rayon  $r$ .

$\nabla f$  : Vecteur de dérivées partielles défini sur  $\mathbb{R}^n$  (gradient de  $f$ ).

$\nabla^2 f = H$  : La matrice des dérivées partielles du second ordre défini sur  $\mathbb{R}^n$  (Hessienne)

$Conv(A)$  : Enveloppe convexe d'un ensemble  $A$ .

$Id$  : Application identité.

$\bar{x}$  : La solution optimale d'un problème de minimisation

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  : Produit scalaire.

$\| \cdot \|$  : Une norme.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires et définitions</b>	<b>3</b>
1.1 Ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$	3
1.2 Ensemble borné, compacte	3
1.3 Problème d'optimisation	4
1.3.1 Minimum local, global	4
1.4 La différentiabilité	5
1.5 La convexité	5
1.6 Quelques définitions	6
<b>2 E-convexité</b>	<b>8</b>
2.1 Les ensembles E-convexe	8
2.2 Les fonctions E-convexes	13
2.2.1 Les Fonctions quasi E-convexes	16
2.3 Les fonctions semi E-convexes	17
2.3.1 Les fonction quasi semi E-convexes	20
<b>3 Conditions optimalité pour le problème d'optimisation sous fonctions E-différentiables avec contraintes d'inégalité.</b>	<b>22</b>
3.1 Fonction E-différentiable	22
3.1.1 Les fonctions E-convexes et E-différentiabilités	23
3.2 Formulation du problème	26
Conclusion	42



# Introduction

L'Optimisation, également connue sous le nom de programmation mathématique, ensemble de principes et de méthodes mathématiques utilisés pour résoudre des problèmes quantitatifs dans de nombreuses disciplines, notamment la physique, la biologie, l'ingénierie, l'économie et les affaires. Le sujet est né de la prise de conscience que les problèmes quantitatifs dans des disciplines manifestement différentes ont d'importants éléments mathématiques en commun. En raison de cette similitude, de nombreux problèmes peuvent être formulés et résolus en utilisant l'ensemble unifié d'idées et de méthodes qui constituent le domaine de l'optimisation.

Les problèmes d'optimisation comportent généralement trois éléments fondamentaux. La première est une quantité numérique unique, ou fonction objectif, qui doit être maximisée ou minimisée. L'objectif peut être le retour attendu sur les coûts de production ou les bénéfices d'une entreprise. Le deuxième élément est un ensemble de variables, qui sont des quantités dont les valeurs peuvent être manipulées afin d'optimiser l'objectif. Le troisième élément d'un problème d'optimisation est un ensemble de contraintes, qui sont des restrictions sur les valeurs que peuvent prendre les variables. Dans ce cadre général, les problèmes d'optimisation peuvent avoir différentes propriétés mathématiques. Les problèmes dans lesquels les variables sont des quantités continues nécessitent une approche différente des problèmes dans lesquels les variables sont des quantités discrètes ou combinatoires.

Une classe importante d'optimisation est connue sous le nom de l'optimisation convexe qui joue un rôle central dans plusieurs branches de mathématiques appliquées. Mais dans plusieurs cas, des fonctions non convexes interviennent dans la modélisation de problèmes réels. Une question fondamentale est donc de savoir si ces fonctions, malgré qu'elles soient

non convexes, conservent certaines propriétés caractéristiques des fonctions convexes. Dans cet axe Youness dans [19] a introduit une classe d'ensembles et de fonctions appelées ensembles E-convexes et fonctions E-convexes en assouplissant la définition des ensembles convexes et des fonctions convexes. Ce type de convexité généralisée repose sur l'effet d'une application  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur les ensembles et le domaine de définition des fonctions. De plus, dans [20] Youness a discuté des critères d'optimalité de la programmation E-convexe. Xiusu Chen [17] a introduit un nouveau concept de fonctions semi-E-convexes et a discuté de ses propriétés. Yu-Ru Syan et Stanelty [21] ont introduit certaines propriétés d'une fonction E-convexe, tandis qu'Emam et Youness dans [7] ont introduit une nouvelle classe d'ensembles E-convexes et de fonctions E-convexes, appelés ensembles fortement E-convexes, et des fonctions fortement E-convexes, en prenant les images de deux points  $x$  et  $y$  sous une application  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en plus des deux points eux-mêmes. Dans [13] Megahed et al. introduit une approche interactive combinée pour résoudre la programmation non linéaire multi-objectif E-convexe. De plus, dans ([10],[11]). introduit les ensembles géodésiques E-convexes, les E-convexes géodésiques et certaines propriétés des fonctions semi-E-convexes géodésiques.

Le mémoire est répartie en trois chapitres.

- Le premier présente des résultats d'analyse convexe, d'optimisation et convexité.
- Le second chapitre illustre les principaux concepts de la théorie d'E-convexité pour les ensembles et les fonctions.
- Le troisième chapitre est consacré au problème d'optimisation pour les fonctions E-différentiables.

# Chapitre 1

## Préliminaires et définitions

Dans ce chapitre , nous rappelons des définitions et des résultats préliminaires essentiels de la convexité et la différentiabilité .... etc, pour notre travail.

### 1.1 Ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$

Soient  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ . On appelle boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$  l'ensemble :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

**Définition 1.1.1.** [15] *Un ensemble  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit ouvert si pour tout  $x \in M$ , il existe une boule ouverte  $B(x, r)$  de centre  $x$  et de rayon  $r$  incluse dans  $M$ . Un ensemble  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit fermé si son complémentaire est un ouvert.*

**Proposition 1.1.1.** [15] *Soit  $F \subset \mathbb{R}^n$ .  $F$  est un fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de  $F$  a sa limite dans  $F$ .*

### 1.2 Ensemble borné, compacte

**Définition 1.2.1.** [15] *Soit  $M$  un ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$ .  $M$  est dit minoré, s'il existe un élément  $m_1$  tel que tout élément  $x$  de  $M$  soit supérieur ou égal à  $m_1$ .*

-  *$M$  est dit majoré s'il existe un élément  $m_2$  tel que tout élément  $x$  de  $M$  soit inférieur ou égal à  $m_2$ .*

-  *$M$  est dit borné s'il est en même temps minoré et majoré.*

**Définition 1.2.2.** [15] Soit  $M$  une partie d'un espace métrique  $E$ . On dit que  $M$  est compacte si il vérifie la propriété :

*Propriété de Borel-Lebesgue de tout recouvrement de  $M$  par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini.*

**Proposition 1.2.1.** [15] Soit  $M$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $M$  est compacte si et seulement si  $M$  est une partie fermée et bornée.

## 1.3 Problème d'optimisation

Un problème optimisation[3] consiste, étant donné une fonction  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , à trouver :

1. Son minimum  $\alpha$  (resp, son maximum) dans  $M$ .
2. Un point  $\bar{x} \in M$  qui réalise ce minimum (resp, maximum)

$$\text{c-à-d : } f(\bar{x}) = \alpha.$$

Écriture du problème :  $\min_{x \in M} f(x)$  (resp,  $\max_{x \in M} f(x)$ ). Les variables  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sont appelées variables d'optimisation ou variables de décision. La fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée fonction objectif et l'ensemble  $M$  ensemble des contraintes ou ensemble des solutions réalisables du problème. Le problème est dit réalisable si  $M \neq \emptyset$ .

**Remarque 1.3.1.** [3] *Lien minimum/maximum : soit  $f$  une fonction dont on veut trouver le maximum. Le problème  $\max_{x \in M} f(x)$  renvoie  $(\bar{x}, \alpha)$  alors que le problème  $\min_{x \in M} f(x)$  renvoie  $(\bar{x}, -\alpha)$ . D'où ce lien. Ainsi la recherche d'un maximum peut toujours se ramener à la recherche d'un minimum.*

### 1.3.1 Minimum local, global

**Définition 1.3.1.** [3] Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

1.  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  est un point de minimum local de  $f$  sur  $M$  si

$$\bar{x} \in M \text{ et } \exists r > 0 : \forall x \in M \cap B(\bar{x}, r), f(\bar{x}) \leq f(x).$$

On dit alors que  $f(\bar{x})$  est un minimum local de  $f$  sur  $M$ .

2.  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  est un point de minimum global de  $f$  sur  $M$  si

$$\bar{x} \in M \text{ et } \forall x \in M, f(\bar{x}) \leq f(x).$$

On dit alors que  $f(\bar{x})$  est un minimum global de  $f$  sur  $M$ .

## 1.4 La différentiabilité

Soient  $f : E \rightarrow F$ , et  $\bar{x}$  un point de  $E$ .

**Définition 1.4.1.** [2](**Différentiabilité au sens de Fréchet**)

On dit que  $f$  est Fréchet-différentiable au point  $\bar{x}$  s'il existe une application linéaire continue  $L_{\bar{x}} : E \rightarrow F$  telle que :

$$\forall h \in E \quad f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + L_{\bar{x}}(h) + \|h\|\epsilon(h)$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$

**Définition 1.4.2.** [2](**Différentiabilité au sens de Gâteaux**)

Soit  $f : E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est Gâteaux-différentiable au point  $\bar{x}$  s'il existe une application linéaire continue  $L_{\bar{x}} : E \rightarrow F$ , telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = L_{\bar{x}}(h)$$

**Remarque 1.4.1.** [2]  $f$  est Fréchet-différentiable  $\implies f$  est Gâteaux-différentiable.

**Remarque 1.4.2.** [2] Pour  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}$ . L'application  $L_{\bar{x}}(h) = \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle$ .

## 1.5 La convexité

**Définition 1.5.1.** [3] Un ensemble  $M$  est dit convexe lorsque, pour tous  $x$  et  $y$  de  $M$ , le segment  $[x, y]$  est tout entier contenu dans  $M$ , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in M \quad \forall t \in [0; 1] \quad tx + (1 - t)y \in M.$$

**Définition 1.5.2.** [3] Soient  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $M$  un ensemble convexe. La fonction  $f$  est dite convexe si pour tout  $x, y \in M$ , et tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Elle est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte et vérifiée pour tout  $x, y \in M$ ,  $x \neq y$ , et tout  $t \in ]0, 1[$ .

**Définition 1.5.3.** [3] Soient  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, et  $M$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ .

1. On dit que la fonction  $f$  est quasi convexe sur  $M$ , si pour tout  $x, y \in M$ , et tout  $t \in [0, 1]$ , On a

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

2. On dit que la fonction  $f$  est strictement quasi convexe sur  $M$ , si pour tout  $x, y \in M$  avec  $f(x) \neq f(y)$ , et tout  $t \in ]0, 1[$ , On a

$$f(tx + (1 - t)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

**Remarque 1.5.1.** [3] Si  $f$  est convexe, alors  $f$  est quasi convexe.

## 1.6 Quelques définitions

**Définition 1.6.1.** [3] Soit  $M$  un ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $\bar{x} \in M$ . L'ensemble

$$\mathcal{D}(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \exists \bar{t} > 0, \forall t \in ]0, \bar{t}[, \bar{x} + td \in M\}$$

est appelé l'ensemble des directions admissibles en  $\bar{x}$

**Définition 1.6.2.** [3] Soient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, et  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . On dit que  $d$  est une direction de descente de  $f$  en  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , s'il existe  $\epsilon > 0$ , tel que

$$f(\bar{x} + td) < f(\bar{x}), \quad \forall t \in ]0, \epsilon[$$

i.e., localement la fonction  $f$  décroît en effectuant un déplacement dans la direction  $d$  à partir de  $\bar{x}$ . En d'autres termes, un petit déplacement le long de la direction  $d$  à partir de  $\bar{x}$ , réduit la valeur de  $f$ .

**Définition 1.6.3.** [3] On dit que la contrainte en inégalité  $g_j$  est active en  $x^* \in M$  où  $M \subset \mathbb{R}^n$  est l'ensemble de contrainte qui peut prendre la forme particulière :  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1,p}\}$ .

1. Si  $g_i(x^*) = 0$ . On note  $I(x^*) = \{i \in \{1, \dots, p\} / g_i(x^*) = 0\}$  l'ensemble d'indices des contraintes actives.
2. Si  $g_i(x^*) < 0, i = \overline{1,p}$ , alors  $g_i$  est dite inactive en  $x^*$ .

**Lemme 1.6.1.** [3] (**Lemme de Gordan**)

Soit  $\{a_1, \dots, a_p\} \subset \mathbb{R}^n$ , avec  $p \geq 2$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\forall a^* \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $\langle a^*, a_i \rangle \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}$ .
2.  $0 \in \text{conv} \{a_1, \dots, a_p\}$ .

# Chapitre 2

## E-convexité

E-convexité est une généralisation de la convexité. Dans ce chapitre nous présentons quelques propriétés des ensembles E-convexes, des fonctions E-convexes, et prouvons certaines de leurs propriétés et caractérisations.

### 2.1 Les ensembles E-convexe

Soient  $M \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble non vide,  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application.

**Définition 2.1.1.** [19] *Un ensemble  $M$  est dit E-convexe si :*

$$tE(x) + (1 - t)E(y) \in M.$$

*Pour chaque  $x, y \in M$  et  $t \in [0, 1]$ .*

Notez que les ensembles E-convexes sont considérés comme une généralisation des ensembles convexes dans le sens suivant.

**Proposition 2.1.1.** [19] *Chaque ensemble convexe  $M$  est un ensemble E-convexe.*

#### Preuve

Soit  $M$  un ensemble convexe, alors

$$\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1] : \quad tx + (1 - t)y \in M$$

en prenant l'application  $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  comme l'application identité

(i.e)  $E(x) = x$ , alors

$$\forall t \in [0, 1] : \quad tE(x) + (1 - t)E(y) \in M$$

D'où  $M$  est un ensemble E-convexe.

**Proposition 2.1.2.** [19] *Si  $M$  est un ensemble E-convexe, alors*

$$E(M) \subseteq M.$$

**Preuve**

Soient  $M$  un ensemble E-convexe, alors  $\forall x, y \in M$ , et  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$tE(x) + (1 - t)E(y) \in M$$

Pour  $t = 1$ ,  $E(y) \in M$ . D'où  $E(M) \subseteq M$

**Proposition 2.1.3.** [19] *Soient  $E(M)$  est un ensemble convexe et  $E(M) \subseteq M$ . Alors,  $M$  est un ensemble E-convexe.*

**Preuve**

Soient  $x, y \in M$ , alors  $E(x), E(y) \in E(M)$ . Comme  $E(M)$  est un ensemble convexe, alors pour chaque  $t \in [0, 1]$  on a :

$$tE(x) + (1 - t)E(y) \in E(M) \subseteq M.$$

D'où  $M$  est un ensemble E-convexe.

Nous donnons un exemple d'un ensemble E-convexe, qui n'est pas convexe.

**Exemple 2.1.1.** [19] *Soit  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini comme suit  $E(x, y) = (0, y)$ . Alors, l'ensemble :*

$$M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda_1(0, 0) + \lambda_2(2, 1) + \lambda_3(0, 3) \} \\ \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda_1(0, 0) + \lambda_2(0, -3) + \lambda_3(-2, -1) \}$$

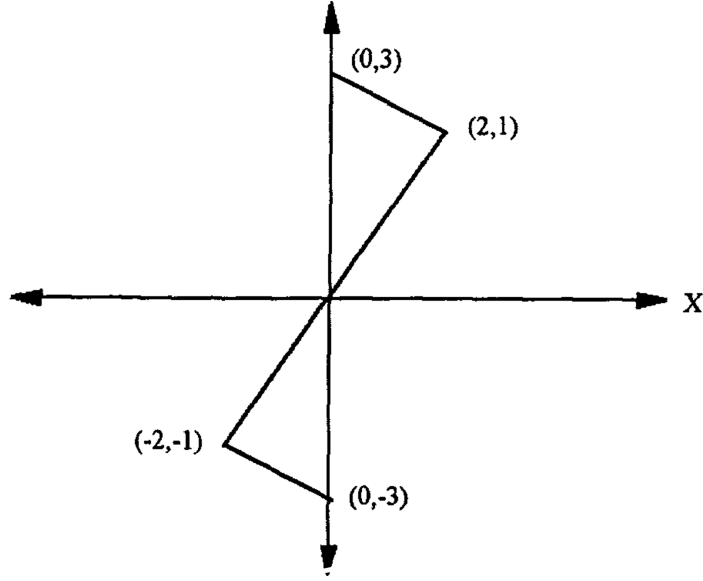


Fig 1. Exemple 2.1.1.

L'ensemble  $M$  est  $E$ -convexe, mais n'est pas convexe.

Avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$  est un ensemble  $E$ -convexe, mais n'est pas un ensemble convexe; voir Fig 1.

**Exemple 2.1.2.** [19] Soit  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini comme suit  $E(x, y) = (\frac{2y - x}{3}, \frac{y + 4x}{3})$ . On considère l'ensemble  $M$  donné dans l'exemple 2.1.1. il est clair que  $E(M) = M$ , n'est pas un ensemble convexe et n'est pas un ensemble  $E$ -convexe, car

$$tE(0, 3) + (1 - t)E(-2, -1) \notin M \text{ pour chaque } t \in ]0, 1[$$

**Proposition 2.1.4.** [19] Soient  $M_1, M_2$  deux ensembles  $E$ -convexes, alors  $M_1 \cup M_2$  est un ensemble  $E$ -convexe.

**Preuve**

Soient  $M_1, M_2$  deux ensembles  $E$ -convexes, alors

$$tE(x) + (1 - t)E(y) \in M_1, \forall x, y \in M_1, \forall t \in [0, 1].$$

$$tE(x) + (1 - t)E(y) \in M_2, \forall x, y \in M_2, \forall t \in [0, 1].$$

Donc

$$tE(x) + (1-t)E(y) \in M_1 \cap M_2, \forall x, y \in M_1 \cap M_2, \forall t \in [0, 1].$$

D'où  $M_1 \cap M_2$  est un ensemble E-convexe.

**Remarque 2.1.1.** [19] Si  $M_1$  et  $M_2$  deux ensembles E-convexes, alors  $M_1 \cup M_2$  n'est pas nécessairement E-convexe; voir l'exemple suivant.

**Exemple 2.1.3.** [19] On considère l'application  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini comme suit

$$E(x, y) = \left( \frac{2y - x}{3}, \frac{y + 4x}{3} \right).$$

Soient les deux ensembles :

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda_1(0, 0) + \lambda_2(2, 1) + \lambda_3(0, 3)\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda_1(0, 0) + \lambda_2(0, 3) + \lambda_3(-2, -1)\}$$

Avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ . Les deux ensembles  $M_1$  et  $M_2$  sont E-convexes, mais  $M_1 \cup M_2$  n'est pas E-convexe; voir Figs 2 et 3.

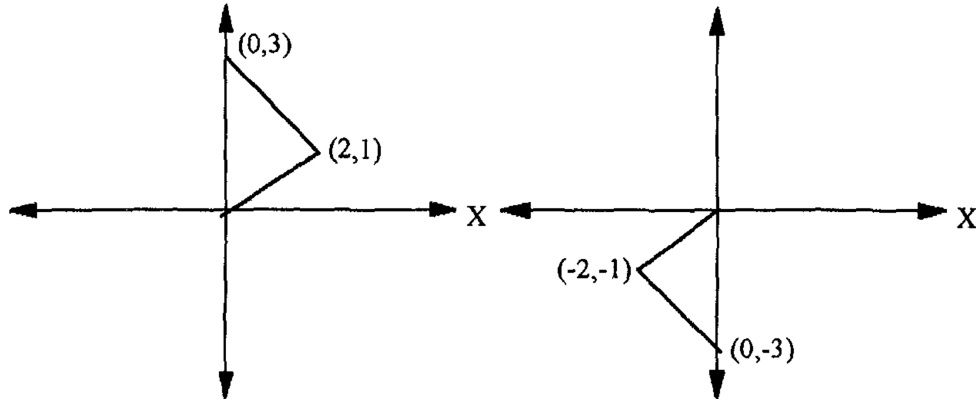


Fig 2. Exemple 2.1.3.

Les ensembles  $M_1$  et  $M_2$  sont E-convexes.

**Lemme 2.1.1.** [19] Soit  $M$  un ensemble  $E_1$ - et  $E_2$ -convexe, alors  $M$  est un ensemble  $(E_1 \circ E_2)$ - et  $(E_2 \circ E_1)$ -convexe.

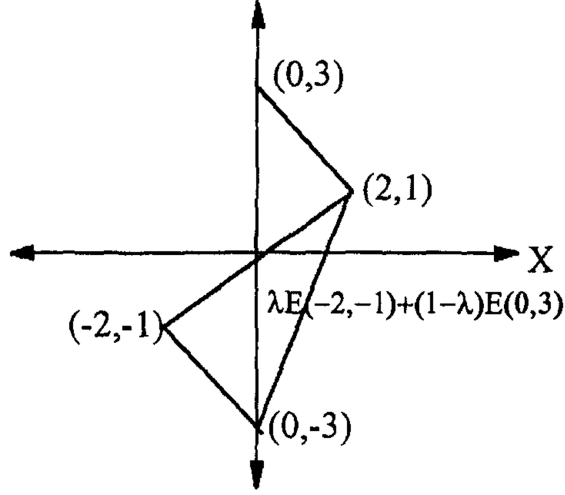


Fig 3. Exemple 2.1.3.

L'ensemble  $M_1 \cup M_2$  n'est pas E-convexe.

**Preuve**

Supposons que  $M$  est un ensemble  $E_1$ -convexe et  $M$  est un ensemble non  $(E_1 \circ E_2)$ -convexe.

$M$  est un ensemble non  $(E_1 \circ E_2)$ -convexe, alors

$$\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1] : \quad t(E_1 \circ E_2)(x) + (1 - t)(E_1 \circ E_2)(y) \notin M.$$

$$\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1] : \quad tE_1(E_2x) + (1 - t)E_1(E_2y) \notin M. \quad (1)$$

D'après la proposition 2.1.2.  $E_2x, E_2y \in M$  et comme  $M$  est un ensemble  $E_1$ -convexe, alors

$$\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1] : \quad tE_1(E_2x) + (1 - t)E_1(E_2y) \in M.$$

Contradiction avec (1), d'où  $M$  est un ensemble  $(E_1 \circ E_2)$ -convexe.

Supposons que  $M$  est un ensemble  $E_2$ -convexe et  $M$  est un ensemble non  $(E_2 \circ E_1)$ -convexe.

$M$  est un ensemble non  $(E_2 \circ E_1)$ -convexe, alors

$$\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1] : \quad t(E_2 \circ E_1)(x) + (1 - t)(E_2 \circ E_1)(y) \notin M.$$

$$\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1] : \quad tE_2(E_1x) + (1 - t)E_2(E_1y) \notin M. \quad (2)$$

D'après la proposition 2.1.2.  $E_1x, E_1y \in M$  et comme  $M$  est un ensemble  $E_2$ -convexe, alors

$$\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1] : \quad tE_2(E_1x) + (1 - t)E_2(E_1y) \in M.$$

Contradiction avec (2), d'où  $M$  est un ensemble  $(E_2 \circ E_1)$ -convexe.

**Lemme 2.1.2.** [19] Soient  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application linéaire,  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$  deux ensembles  $E$ -convexes. Alors  $M_1 + M_2$  est un ensemble  $E$ -convexe.

### Preuve

Soient  $p + q, x + y \in M_1 + M_2$ , où  $p, x \in M_1$  et  $q, y \in M_2$ . Comme  $M_1$  et  $M_2$  deux ensembles  $E$ -convexes, alors

$$\forall p, x \in M_1, \forall t \in [0, 1] : \quad tE(p) + (1 - t)E(x) \in M_1.$$

$$\forall q, y \in M_2, \forall t \in [0, 1] : \quad tE(q) + (1 - t)E(y) \in M_2.$$

L'application  $E$  est linéaire, alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$tE(p + q) + (1 - t)E(x + y) = tE(p) + (1 - t)E(x) + tE(q) + (1 - t)E(y) \in M_1 + M_2.$$

Donc

$$\forall p + q, x + y \in M_1 + M_2, \forall t \in [0, 1] : \quad tE(p + q) + (1 - t)E(x + y) \in M_1 + M_2.$$

D'où  $M_1 + M_2$  est un ensemble  $E$ -convexe

## 2.2 Les fonctions $E$ -convexes

Soient  $M \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble non vide,  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application.

**Définition 2.2.1.** [19] Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $E$ -convexe sur un ensemble  $M$  si l'ensemble  $M$  est  $E$ -convexe et  $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1]$

$$f(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq t(f \circ E)(x) + (1 - t)(f \circ E)(y)$$

Elle est dite strictement E-convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte et vérifiée pour tout  $x, y \in M$ ,  $E(x) \neq E(y)$ , et tout  $t \in [0, 1]$ .

**Remarque 2.2.1.** [19] chaque fonction convexe  $f$  sur un ensemble convexe  $M$  est une fonction E-convexe, où  $E = \text{Id}$ .

**Remarque 2.2.2.**  $f$  est une fonction strictement E-convexe implique que elle est E-convexe.

Les deux exemples suivants donnent des fonctions E-convexes qui ne sont pas convexe.

**Exemple 2.2.1.** [19] Soient  $M \subset \mathbb{R}^n$  tel que :

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \alpha_1(0, 0) + \alpha_2(0, 3) + \alpha_3(2, 1)\}$$

avec  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ ,  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application, tel que :  $E(x, y) = (0, y)$  et la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3, & \text{si } y < 1 \\ xy^3, & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

est E-convexe sur  $M$ , mais n'est pas convexe.

**Exemple 2.2.2.** [19] Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et soit  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :  $E(x) = -x^2$ , alors  $\mathbb{R}$  est E-convexe et  $f$  est E-convexe, mais n'est pas convexe ; voir fig 4.

**Théorème 2.2.1.** [21] Soient  $f, g$  deux fonctions E-convexe sur un ensemble E-convexe  $M$  et  $\alpha > 0$ , alors  $f + g$  et  $(\alpha f)$  sont des fonctions E-convexe sur  $M$ .

### Preuve

1. On va montrer que :  $f, g$  deux fonctions E-convexes sur un ensemble E-convexe  $M$ , alors  $f + g$  est une fonction E-convexe.

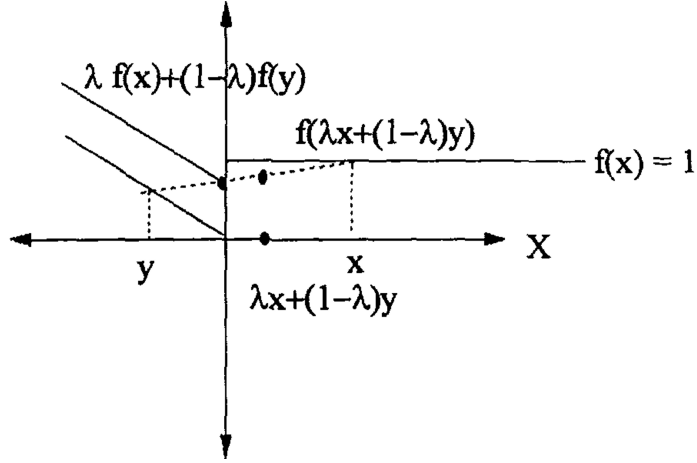


Fig 4. Exemple 2.2.2.

La fonction  $f$  est E-convexe, mais n'est pas convexe.

Soient  $f, g$  deux fonctions E-convexes sur  $M$ , alors  $\forall x, y \in M$ ,  
 $\forall t \in [0, 1]$

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq t(f \circ E)(x) + (1-t)(f \circ E)(y)$$

$$g(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq t(g \circ E)(x) + (1-t)(g \circ E)(y)$$

En additionnant ces deux inégalités membre à membre, il vient :

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) + g(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq t(f \circ E)(x) + (1-t)(f \circ E)(y) + t(g \circ E)(x) + (1-t)(g \circ E)(y)$$

Donc,  $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1]$

$$(f + g)(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq t((f + g) \circ E)(x) + (1-t)((f + g) \circ E)(y)$$

Ainsi, la fonction  $f + g$  est E-convexe.

2. maintenant, on va montrer que :  $f$  est une fonctions E-convexe et  $\alpha > 0$ , alors  $(\alpha f)$  est une fonction E-convexe.

Soit  $f$  est une fonction E-convexe, alors  $\forall x, y \in M$ ,  
 $\forall t \in [0, 1]$

$$f(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq t(f \circ E)(x) + (1 - t)(f \circ E)(y)$$

Soit  $\alpha > 0$ , en multipliant cette inégalité par  $\alpha$ , il vient :

$$\alpha f(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq \alpha t(f \circ E)(x) + \alpha(1 - t)(f \circ E)(y)$$

Donc,  $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1]$

$$(\alpha f)(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq t((\alpha f) \circ E)(x) + (1 - t)((\alpha f) \circ E)(y)$$

Ainsi, la fonction  $(\alpha f)$  est E-convexe.

### 2.2.1 Les Fonctions quasi E-convexes

**Définition 2.2.2.** [14] Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite quasi E-convexe sur un ensemble  $M$  si l'ensemble  $M$  est E-convexe et  $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1]$

$$f(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq \max\{(f \circ E)(x), (f \circ E)(y)\}$$

Elle est dite strictement quasi E-convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte et vérifiée pour tout  $x, y \in M, f(x) \neq f(y)$ , et tout  $t \in [0, 1]$ .

**Remarque 2.2.3.** chaque fonction quasi convexe  $f$  sur un ensemble convexe  $M$  est une fonction quasi E-convexe, où  $E = Id$ .

**Proposition 2.2.1.** Si  $f$  est une fonction E-convexe (resp : strictement E-convexe), alors  $f$  est une fonction quasi E-convexe (resp : strictement quasi E-convexe)

#### Preuve

Soit  $f$  est une fonction E-convexe, alors  $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1]$

$$f(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq t(f \circ E)(x) + (1 - t)(f \circ E)(y)$$

D'autre part, on a :

$$(f \circ E)(x) \leq \max\{(f \circ E)(x), (f \circ E)(y)\}$$

$$(f \circ E)(y) \leq \max\{(f \circ E)(x), (f \circ E)(y)\}$$

Donc,  $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1]$

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq \max\{(f \circ E)(x), (f \circ E)(y)\}$$

Ainsi, la fonction  $f$  est quasi E-convexe.

## 2.3 Les fonctions semi E-convexes

Soient  $M \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble non vide,  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application.

**Définition 2.3.1.** [17] Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite semi E-convexe sur un ensemble  $M$  si l'ensemble  $M$  est E-convexe et  $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1]$

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Elle est dite strictement semi E-convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte et vérifiée pour tout  $x, y \in M, E(x) \neq E(y)$ , et tout  $t \in [0, 1]$ .

**Proposition 2.3.1.** [17] Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction semi E-convexe sur une ensemble E-convexe  $M$ , alors

$$(f \circ E)(x) \leq f(x), \forall x \in M$$

### Preuve

Soit  $f$  est une fonction semi E-convexe sur une ensemble E-convexe  $M$ , alors  $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1]$ , on a :  $tE(x) + (1-t)E(y) \in M$  et

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Pour  $t = 1$ ,  $(f \circ E)(x) \leq f(x), \forall x \in M$ . D'où le résultat.

**Remarque 2.3.1.** [17] Une fonction  $E$ -convexe sur un ensemble  $E$ -convexe n'est pas nécessairement une fonction semi  $E$ -convexe.

**Exemple 2.3.1.** [17] Soient  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , une application,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, telle que :

$$E(x, y) = (1 + x, y)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$\mathbb{R}^2$  est un ensemble  $E$ -convexe,  $f$  est une fonction  $E$ -convexe sur  $\mathbb{R}^2$ . Puisque  $(f \circ E)(0, 0) = 1 > f(0, 0) = 0$ , alors d'après la proposition 2.3.1.  $f$  n'est pas une fonction semi  $E$ -convexe.

**Proposition 2.3.2.** [17] Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction semi  $E$ -convexe sur un ensemble  $E$ -convexe  $M$ , alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$K_\alpha = \{x | x \in M, \quad f(x) \leq \alpha\}$$

est  $E$ -convexe.

L'ensemble  $K_\alpha$  s'appelle ligne de niveau.

### Preuve

Soient  $x, y \in K_\alpha$  et  $t \in [0, 1]$ , alors  $f(x) \leq \alpha$ ,  $f(y) \leq \alpha$ . Puisque  $f$  est une fonction semi  $E$ -convexe sur un ensemble  $E$ -convexe  $M$ , alors

$$tE(x) + (1 - t)E(y) \in M \text{ et}$$

$$f(tE(x) + (1 - t)E(y)) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \leq \alpha,$$

c-à-d,  $tE(x) + (1 - t)E(y) \in K_\alpha$ ,  $K_\alpha$  est un ensemble  $E$ -convexe.

**Remarque 2.3.2.** [17] L'inverse de la proposition 2.3.2. n'est pas vrai, nous donnons un exemple d'une fonction  $f(x)$ , dont  $K_\alpha = \{x | x \in M, \quad f(x) \leq \alpha\}$  est un ensemble  $E$ -convexe, mais la fonction  $f$  n'est pas semi  $E$ -convexe.

**Exemple 2.3.2.** [17] Soit  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini comme suit

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [1, 4] \\ 1 + \frac{2}{\pi} \arctan(1 - x), & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \\ 2 + \frac{2}{\pi} \arctan(x - 4), & \text{si } x \in ]4, +\infty[ \end{cases}$$

$\mathbb{R}$  est un ensemble  $E$ -convexe, et soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \cup ]4, +\infty[ \\ x - 3, & \text{si } x \in [1, 2[ \cup ]3, 4] \\ 3 - x, & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases}$$

Alors, ligne de niveau

$$K_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } \alpha \in [2, +\infty[ \\ [1, 4], & \text{si } \alpha \in ]1, 2[ \\ [1, 2] \cup [3 - \alpha, 3 + \alpha], & \text{si } \alpha \in [0, 1] \\ [1, 2], & \text{si } \alpha \in ]-\infty, 0[ \end{cases}$$

est toujours  $E$ -convexe. Puisque

$$f\left(\frac{1}{2}E(1) + \frac{1}{2}E(5)\right) = f(2) = 1 > \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(5) = 0.$$

Alors  $f$  est une fonction n'est pas semi  $E$ -convexe sur  $\mathbb{R}$ , et aussi  $f$  n'est pas convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 2.3.3.** [17] Supposons que la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est  $E$ -convexe sur un ensemble  $E$ -convexe  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Alors  $f$  est semi  $E$ -convexe sur l'ensemble  $M$  si et seulement si  $f(E(x)) \leq f(x)$  pour chaque  $x \in M$

**preuve**

1.  $f(E(x)) \leq f(x)$  pour chaque  $x \in M$  implique que  $f$  est semi  $E$ -convexe sur l'ensemble  $M$ .

Supposons que la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est  $E$ -convexe sur un ensemble  $E$ -convexe  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $f(E(x)) \leq f(x)$  pour chaque  $x \in M$ , alors pour tout  $x, y \in M$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y)) &\leq \lambda f(E(x)) + (1 - \lambda)f(E(y)) \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f$  est semi  $E$ -convexe sur l'ensemble  $E$ -convexe  $M$ .

2.  $f$  est semi  $E$ -convexe sur l'ensemble  $M$  implique que  $f(E(x)) \leq f(x)$  pour chaque  $x \in M$ .

Voir la proposition 2.3.1.

**Remarque 2.3.3.** [17] Une fonction  $E$ -convexe  $f$  sur un ensemble  $E$ -convexe  $M$  avec la propriété  $f(E(x)) \leq f(x)$  pour chaque  $x \in M$  est semi  $E$ -convexe sur l'ensemble  $M$ , mais l'inverse n'est pas vrai. L'exemple suivant donne une fonction semi  $E$ -convexe, qui n'est pas convexe.

**Exemple 2.3.3.** [17] Soit  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini comme

$$E(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 4 \\ 1 + \frac{2}{\pi} \arctan(1 - x), & x < 1 \\ 2 + \frac{4}{\pi} \arctan(x - 4), & x > 4 \end{cases}$$

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est un ensemble  $E$ -convexe, et soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini comme

$$f(x) = \begin{cases} 7, & \text{if } x < 1, \text{ or } x > 4 \\ x - 3, & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ 3 - x, & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ x - 3, & \text{if } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est semi  $E$ -convexe sur l'ensemble  $E$ -convexe  $\mathbb{R}$ . Puisque

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}E(1) + \frac{1}{2}E(5)\right) &= f(2) = 1 > \frac{1}{2}f(E(1)) + \frac{1}{2}f(E(5)) \\ &= \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(3) = -1 \end{aligned}$$

alors la fonction  $f$  n'est pas convexe sur  $\mathbb{R}$ .

### 2.3.1 Les fonction quasi semi $E$ -convexes

**Définition 2.3.2.** [17] L'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est quasi semi  $E$ -convexe sur un ensemble  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , si

$$f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y)) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

pour tout  $x, y \in M$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$  tels que

$$\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y) \in M$$

**Proposition 2.3.4.** [17] Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble  $E$ -convexe. Alors la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est quasi semi  $E$ -convexe si et seulement si la ligne de niveau  $K_\alpha = \{x | x \in M, f(x) \leq \alpha\}$  est  $E$ -convexe pour chaque  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**preuve**

Soit  $f$  un quasi semi  $E$ -convexe sur l'ensemble  $E$ -convexe  $M$ . Ainsi, pour tout  $x, y \in K_\alpha$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on a  $\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y) \in M$ ,  $f(x) \leq \alpha$ ,  $f(y) \leq \alpha$  et

$$f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y)) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha$$

Il s'en suit que  $\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y) \in K_\alpha$  et l'ensemble  $K_\alpha$  est  $E$ -convexe.

À l'inverse, soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est ensemble  $E$ -convexe et  $K_\alpha$  est  $E$ -convexe. Pour chaque  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On va montrer que  $f$  est quasi semi  $E$ -convexe. Pour chaque  $x, y \in M$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$  tels que  $\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y) \in M$  et soit  $\alpha = \max\{f(x), f(y)\}$ , ainsi  $x \in K_\alpha$  et  $y \in K_\alpha$ , puisque  $K_\alpha$  est un ensemble  $E$ -convexe, on a  $\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y) \in K_\alpha$ , Alors

$$f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y)) \leq \alpha = \max\{f(x), f(y)\}$$

D'où  $f$  est quasi semi  $E$ -convexe.

**Remarque 2.3.4.** [17] Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors une fonction semi  $E$ -convexe  $f$  sur un ensemble  $E$ -convexe  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est aussi un quasi semi  $E$ -convexe sur  $M$ .

# Chapitre 3

## Conditions optimalité pour le problème d'optimisation sous fonctions E-différentiables avec contraintes d'inégalité.

Dans ce chapitre, nous présentons la définition des fonctions E-différentiables et certaines propriétés des fonctions E-convexes E-différentiables. Aussi quelques propriétés d'optimalité (fonctions E-convexes dans les problèmes d'optimisation sous fonctions E-différentiables ) et les théorèmes des conditions de Kuhn-Tucker et Fritz-John pour obtenir la solution optimale de la programmation mathématique.

### 3.1 Fonction E-différentiable

**Définition 3.1.1.** [14] Soient  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction non différentiable en  $\bar{x}$ ,  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application. On dit que  $f$  est une fonction E-différentiable en  $\bar{x}$  si et seulement si  $f \circ E$  est une fonction différentiable en  $\bar{x}$  et

$$(f \circ E)(x) = (f \circ E)(\bar{x}) + \langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), (x - \bar{x}) \rangle + \|x - \bar{x}\| \alpha(\bar{x}, x - \bar{x})$$

avec  $\alpha(\bar{x}, x - \bar{x}) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \bar{x}$

**Remarque 3.1.1.** *Chaque fonction différentiable est une fonction  $E$ -différentiable, où  $E = \text{Id}$ .*

**Exemple 3.1.1.** [14] *Soient  $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| \in \mathbb{R}_+$  est une fonction non différentiable en  $x = 0$  et  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application tel que :  $Ex = x^2$ , alors la fonction  $(f \circ E)(x) = f(Ex) = x^2$  est différentiable en  $x = 0$ , et donc  $f$  est une fonction  $E$ -différentiable.*

**Théorème 3.1.1.** *Soient  $M$  un ensemble  $E$ -convexe ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $E$ -différentiable sur  $M$ . Alors, pour tout  $x, y \in M$ , il existe  $\lambda \in ]0, 1[$ , tel que*

$$(f \circ E)(x) - (f \circ E)(y) = \langle \nabla f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y)), E(x) - E(y) \rangle$$

### Preuve

Soient  $x, y \in M$ . On considère la fonction  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(tE(x) + (1 - t)E(y))$ . Cette fonction est bien définie car  $M$  est  $E$ -convexe (autrement dit, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $tE(x) + (1 - t)E(y)$  est bien dans  $M$ , ce qui fait qu'on peut considérer  $f(tE(x) + (1 - t)E(y))$ ). Par le théorème des accroissement finis, il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que  $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda)$ . Or la dérivée de  $\phi$  en  $\lambda$  vaut  $\langle \nabla f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y)), E(x) - E(y) \rangle$ . Par suite

$$(f \circ E)(x) - (f \circ E)(y) = \langle \nabla f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y)), E(x) - E(y) \rangle$$

D'où le résultat.

### 3.1.1 Les fonctions $E$ -convexes et $E$ -différentiabilités

**Proposition 3.1.1.** *Soient  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, et  $M$  un ouvert  $E$ -convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que  $f$  est  $E$ -différentiable sur  $M$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $(f \circ E)$  est  $E$ -convexe sur  $M$ ,
2.  $(f \circ E)(y) \geq (f \circ E)(x) + \langle \nabla(f \circ E)(x), E(y) - E(x) \rangle, \forall x, y \in M$ ,
3.  $\langle \nabla(f \circ E)(x) - \nabla(f \circ E)(y), E(x) - E(y) \rangle \geq 0, \forall x, y \in M$ .

## Preuve

On montrera  $1. \Leftrightarrow 2.$ , et  $2. \Leftrightarrow 3.$

$1. \Rightarrow 2.$  Supposons que la fonction  $f$  est  $E$ -convexe sur  $M$ . Soient  $x, y \in M$ , et  $t \in ]0, 1[$ .

Alors

$$\begin{aligned} f(tE(y) + (1-t)E(x)) &\leq t(f \circ E)(y) + (1-t)(f \circ E)(x) \\ f(E(x) + t(E(y) - E(x))) &\leq (f \circ E)(x) + t((f \circ E)(y) - (f \circ E)(x)) \\ f(E(x) + t(E(y) - E(x))) - (f \circ E)(x) &\leq t((f \circ E)(y) - (f \circ E)(x)) \end{aligned}$$

Divisons sur  $t$ , on obtient :

$$\frac{f(E(x) + t(E(y) - E(x))) - (f \circ E)(x)}{t} \leq (f \circ E)(y) - (f \circ E)(x)$$

En faisant tendre  $t \rightarrow 0^+$ , on obtient :

$$\langle \nabla(f \circ E)(x), E(y) - E(x) \rangle \leq (f \circ E)(y) - (f \circ E)(x)$$

D'où

$$(f \circ E)(y) \geq (f \circ E)(x) + \langle \nabla(f \circ E)(x), E(y) - E(x) \rangle, \forall x, y \in M,$$

$2. \Rightarrow 1.$  Soient  $x, y \in M$ , et  $t \in [0, 1]$ . Posons  $E(z) = tE(x) + (1-t)E(y)$ . On a

$$(f \circ E)(y) \geq (f \circ E)(z) + \langle \nabla(f \circ E)(z), E(y) - E(z) \rangle \quad (1)$$

et

$$(f \circ E)(x) \geq (f \circ E)(z) + \langle \nabla(f \circ E)(z), E(x) - E(z) \rangle. \quad (2)$$

Multiplons (1) par  $(1-t)$  et (2) par  $t$ , on obtient :

$$(1-t)(f \circ E)(y) \geq (1-t)(f \circ E)(z) + \langle \nabla(f \circ E)(z), (1-t)(E(y) - E(z)) \rangle$$

et

$$t(f \circ E)(x) \geq t(f \circ E)(z) + \langle \nabla(f \circ E)(z), t(E(x) - E(z)) \rangle.$$

Alors,

$$(1-t)(f \circ E)(y) + t(f \circ E)(x) \geq (f \circ E)(z) + \langle \nabla(f \circ E)(z), (1-t)(E(y) - E(z)) \rangle$$

$$+\langle \nabla(f \circ E)(z), t(E(x) - E(z)) \rangle$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f \circ E)(z), (1-t)(E(y) - E(z)) \rangle + \langle \nabla(f \circ E)(z), t(E(x) - E(z)) \rangle = \\ \langle \nabla(f \circ E)(z), (1-t)(E(y) - E(z)) + t(E(x) - E(z)) \rangle \end{aligned}$$

On a :

$$(1-t)(E(y) - E(z)) + t(E(x) - E(z)) = 0$$

Donc,

$$(f \circ E)(z) \leq t(f \circ E)(x) + (1-t)(f \circ E)(y)$$

Par suite,  $f$  est  $E$ -convexe sur  $M$ .

2.  $\Rightarrow$  3. Soient  $x, y \in M$ . On a

$$(f \circ E)(x) \geq (f \circ E)(y) + \langle \nabla(f \circ E)(y), E(x) - E(y) \rangle \quad (3)$$

et

$$(f \circ E)(y) \geq (f \circ E)(x) + \langle \nabla(f \circ E)(x), E(y) - E(x) \rangle. \quad (4)$$

(3) + (4), on obtient

$$\langle \nabla(f \circ E)(y), E(x) - E(y) \rangle + \langle \nabla(f \circ E)(x), E(y) - E(x) \rangle \leq 0.$$

Par suite

$$\langle \nabla(f \circ E)(x) - \nabla(f \circ E)(y), E(x) - E(y) \rangle \geq 0.$$

3.  $\Rightarrow$  2. Soient  $x, y \in M$ . D'après le théorème 3.1.1. il existe  $\lambda \in ]0, 1[$ , tel que

$$(f \circ E)(x) - (f \circ E)(y) = \langle \nabla f(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)), E(x) - E(y) \rangle$$

En utilisant 3. on obtient

$$\langle \nabla f(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)) - \nabla(f \circ E)(y), \lambda(E(x) - E(y)) \rangle \geq 0$$

Donc

$$\langle \nabla f(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)) - \nabla(f \circ E)(y), E(x) - E(y) \rangle \geq 0$$

Ce qui donne

$$\langle \nabla f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y)), E(x) - E(y) \rangle \geq \langle \nabla(f \circ E)(y), E(x) - E(y) \rangle$$

Par suite

$$(f \circ E)(x) \geq (f \circ E)(y) + \langle \nabla(f \circ E)(y), E(x) - E(y) \rangle, \forall x, y \in M$$

## 3.2 Formulation du problème

Considérons les problèmes  $P$  et  $P_E$ , qui ont une fonction non différentiable et une fonction  $E$ -différentiable, respectivement.

Soient  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application,  $M$  ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction  $E$ -différentiable. Le problème  $P$  est défini comme suit

$$P \quad \begin{cases} \text{Min} f(x) \\ \text{s.c} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Où  $f$  est une fonction non différentiable, et le problème  $P_E$  est défini comme

$$P_E \quad \begin{cases} \text{Min}(f \circ E)(x) \\ \text{s.c} \quad M_E = \{x \in \mathbb{R}^n : (g_i \circ E)(x) \leq 0, i = 1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Où  $f$  est une fonction  $E$ -différentiable.

**Lemme 3.2.1.** [14] Soient  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application bijective et

$$M_E = \{x \in \mathbb{R}^n : (g_i \circ E)(x) \leq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Alors  $E(M_E) = M$ , où  $M$  et  $M_E$  sont des ensembles réalisables des problèmes  $P$  et  $P_E$ , respectivement.

### Preuve

Pour montrer que  $E(M_E) = M$ , il suffit de montrer que  $E(M_E) \subset M$  et  $M \subset E(M_E)$

1. On va montrer que  $E(M_E) \subset M$  par l'absurde :

Soit  $x \in E(M_E)$ . Par hypothèse,  $E$  est une application bijective. Alors par la définition de  $M_E$ , il existe  $y \in M_E$  tel que  $x = E(y)$ . Supposons que  $x \notin M$  alors il existe au moins  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $g_i(x) > 0$ . Donc, par  $x = E(y)$ , on a au moins  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $(g_i \circ E)(y) > 0$ . Contradiction avec  $y \in M_E$ , d'où  $E(M_E) \subset M$ .

2. Maintenant, on va montrer que  $M \subset E(M_E)$  par l'absurde :

Soit  $x \in M$ . Supposons que  $x \notin E(M_E)$ , alors  $\forall y \in M_E : x \neq E(y)$ . Par hypothèse  $E$  bijective,  $\forall y \in M_E : E^{-1}(x) \neq y$  c-à-d que  $E^{-1}(x) \notin M_E$ , il s'ensuit qu'il existe au moins  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $(g_i \circ E)(E^{-1}(x)) > 0$  c-à-d que il existe au moins  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $g_i(x) > 0$ , contradiction avec  $x \in M$ . D'où  $M \subset E(M_E)$ .

De 1. et 2. on obtient  $E(M_E) = M$ .

**Théorème 3.2.1.** [14] Soient  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bijective et  $f$  une fonction  $E$ -différentiable. Si  $f$  est non différentiable en  $\bar{x}$  et  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$ , alors il existe  $\bar{y} \in M_E$  telle que  $\bar{x} = E(\bar{y})$  et  $\bar{y}$  est une solution optimale du problème  $P_E$ .

### Preuve

Par l'absurde : Soit  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$ .

D'après le lemme 3.2.1 il existe  $\bar{y} \in M_E$  telle que  $\bar{x} = E(\bar{y})$ . Soit  $\bar{y}$  est une solution non optimale du problème  $P_E$ , alors il existe  $\hat{y} \in M_E$  telle que  $(f \circ E)(\hat{y}) < (f \circ E)(\bar{y})$ . Aussi, il existe  $\hat{x}$  telle que  $\hat{x} = E(\hat{y})$ , alors  $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$ .

Contradiction avec  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$ , alors il existe  $\bar{y} \in M_E$  telle que  $\bar{x} = E(\bar{y})$  et  $\bar{y}$  est une solution optimale du problème  $P_E$ .

**Théorème 3.2.2.** [14] Soient  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bijective,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble  $E$ -convexe et  $f$  une fonction  $E$ -différentiable et strictement quasi- $E$ -convexe. Si  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$ , alors il existe  $\bar{y} \in M_E$  telle que  $\bar{x} = E(\bar{y})$  et  $\bar{y}$  est une solution optimale du problème  $P_E$ .

## Preuve

Par l'absurde : Soit  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$ .

D'après le lemme 3.2.1 il existe  $\bar{y} \in M_E$  telle que  $\bar{x} = E(\bar{y})$ . Soit  $\bar{y}$  est une solution non optimale du problème  $P_E$ , alors il existe  $\hat{y} \in M_E$  et aussi  $\hat{x} \in M$ ,  $\hat{x} = E(\hat{y})$  telle que  $(f \circ E)(\hat{y}) < (f \circ E)(\bar{y})$ . Comme  $M$  un ensemble  $E$ -convexe, alors  $E(M) \subseteq M$  et  $\lambda E(\bar{y}) + (1 - \lambda)E(\hat{y}) \in M$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ .

On a  $f$  est strictement quasi- $E$ -convexe, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda E(\bar{y}) + (1 - \lambda)E(\hat{y})) &< \max\{(f \circ E)(\bar{y}), (f \circ E)(\hat{y})\} \\ &< \max\{f(\bar{x}), f(\hat{x})\} \\ &< f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Contradiction avec l'hypothèse que  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$ . Alors il existe  $\bar{y} \in M_E$  telle que  $\bar{x} = E(\bar{y})$  et  $\bar{y}$  est une solution optimale du problème  $P_E$ .

**Théorème 3.2.3.** [14] Soient  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ensemble ouvert  $E$ -convexe,

$E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est bijective et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$  et

$\nabla(f \circ E)(\bar{x}) \neq 0$ . S'il existe un vecteur  $d \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  tel que :  $\langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle < 0$ , alors  $d$  est une direction de descente de  $(f \circ E)$  en  $\bar{x}$ .

## Preuve

Puisque  $\bar{x} + \lambda d \rightarrow \bar{x}$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$ , et  $M_E$  est un ouvert (donc voisinage de  $\bar{x}$ ), alors il existe  $t_1 > 0$ , tel que

$$\bar{x} + \lambda d \in M_E, \forall \lambda \in ]0, t_1[.$$

Donc,  $d$  est une direction admissible en  $\bar{x}$ . Par ailleurs, d'après la  $E$ -différentiabilité de  $f$  en  $\bar{x}$ , on a

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) = (f \circ E)(\bar{x}) + \lambda \langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle + \lambda \|d\| \alpha(\bar{x}, \lambda d)$$

Avec  $\alpha(\bar{x}, \lambda d) \rightarrow 0$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

On a

$$\frac{(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) - (f \circ E)(\bar{x})}{\lambda} = \langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle + \|d\| \alpha(\bar{x}, \lambda d)$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) - (f \circ E)(\bar{x})}{\lambda} = \langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle < 0.$$

Par conséquent, il existe  $t_2 > 0$ , tel que

$$\frac{(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) - (f \circ E)(\bar{x})}{\lambda} < 0, \forall \lambda \in ]0, t_2[.$$

D'où

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < (f \circ E)(\bar{x}), \forall \lambda \in ]0, t_2[.$$

Soit  $\gamma = \min\{t_1, t_2\}$ . Alors, pour tout  $\lambda \in ]0, \gamma[$ , on a  $\bar{x} + \lambda d \in M_E$  et

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < (f \circ E)(\bar{x}),$$

(c-à-d)  $d$  est une direction de descente de  $(f \circ E)$  en  $\bar{x}$

**Corollaire 3.2.1.** [14] Soient  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ensemble ouvert  $E$ -convexe,

$E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est bijective et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$ . Si  $\bar{x}$  est un minimum local de la fonction  $(f \circ E)$ , alors  $\nabla(f \circ E)(\bar{x}) = 0$ .

**Preuve**

Supposons que  $\nabla(f \circ E)(\bar{x}) \neq 0$ , alors  $-\nabla(f \circ E)(\bar{x})$  est une direction de descente de  $(f \circ E)$  en  $\bar{x}$ . D'après le théorème 3.2.3. il existe  $\delta > 0$ , tel que

$$(3.1) \quad (f \circ E)(\bar{x} - \lambda \nabla(f \circ E)(\bar{x})) < (f \circ E)(\bar{x}), \text{ pour chaque } \lambda \in ]0, \delta[.$$

Mais  $\bar{x}$  est un minimum local de  $(f \circ E)$  sur  $M_E$ , il existe alors une boule ouverte  $B(\bar{x}, r)$  telle que

$$(f \circ E)(\bar{x}) \leq (f \circ E)(x), \forall x \in B(\bar{x}, r) \cap M_E.$$

Puisque  $\bar{x} - \lambda \nabla(f \circ E)(\bar{x}) \rightarrow \bar{x}$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$  et  $B(\bar{x}, r) \cap M_E$  est un voisinage ouvert de  $\bar{x}$  (comme intersection de deux ouverts), il existe  $\delta_1 > 0$ , pour tout  $\lambda \in ]0, \delta_1[$ , on a

$$\bar{x} - \lambda \nabla(f \circ E)(\bar{x}) \in B(\bar{x}, r) \cap M_E.$$

Soit  $\gamma = \min\{\delta, \delta_1\}$ . Alors, pour tout  $\lambda \in ]0, \gamma[$

$$(f \circ E)(\bar{x}) \leq (f \circ E)(\bar{x} - \lambda \nabla(f \circ E)(\bar{x})) < (f \circ E)(\bar{x}).$$

Où la dernière stricte inégalité résulte de (3.1), ce qui donne une contradiction. Par suite  $\nabla(f \circ E)(\bar{x}) = 0$ .

**Théorème 3.2.4.** [14] Soient  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ensemble ouvert  $E$ -convexe,

$E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est bijective et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction deux fois  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$ . Si  $\bar{x}$  est un minimum local de la fonction  $(f \circ E)$ , alors  $\nabla(f \circ E)(\bar{x}) = 0$  et la matrice Hessienne  $H(\bar{x}) = \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})$  est positive.

### Preuve

D'après le corollaire 3.2.1. on a  $\nabla(f \circ E)(\bar{x}) = 0$ . Soient  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda > 0$ . Puisque  $f$  est une fonction deux fois  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$ , alors

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) = (f \circ E)(\bar{x}) + \lambda \langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \langle \nabla^2(f \circ E)(\bar{x}) d, d \rangle + \lambda^2 \|d\|^2 \alpha(\bar{x}, \lambda d)$$

$$(3.2) \quad (f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) = (f \circ E)(\bar{x}) + \frac{1}{2} \lambda^2 \langle \nabla^2(f \circ E)(\bar{x}) d, d \rangle + \lambda^2 \|d\|^2 \alpha(\bar{x}, \lambda d),$$

où  $\alpha(\bar{x}, \lambda d) \rightarrow 0$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

Puisque  $\bar{x}$  est un minimum local de  $(f \circ E)$ , il existe une boule ouverte  $B(\bar{x}, r)$ , telle que

$$(f \circ E)(\bar{x}) \leq (f \circ E)(x), \forall x \in B(\bar{x}, r) \cap M_E.$$

On a  $\bar{x} + \lambda d \rightarrow \bar{x}$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$ , il existe alors  $\alpha > 0$ , tel que pour tout  $\lambda \in ]0, \alpha[$ , on a  $\bar{x} + \lambda d \in B(\bar{x}, r) \cap M_E$  (ouvert comme intersection de deux ouverts). Donc

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) \geq (f \circ E)(\bar{x}), \forall \lambda \in ]0, \alpha[$$

D'après (3.2), on a  $\forall \lambda \in ]0, \alpha[$

$$\frac{(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) - (f \circ E)(\bar{x})}{\lambda^2} = \frac{1}{2} \langle \nabla^2(f \circ E)(\bar{x}) d, d \rangle + \|d\|^2 \alpha(\bar{x}, \lambda d) \geq 0.$$

En faisant tendre  $\lambda \rightarrow 0$ , on obtient

$$\langle \nabla^2(f \circ E)(\bar{x}) d, d \rangle \geq 0,$$

(c-à-d)  $H(\bar{x}) = \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})$  est positive.

**Exemple 3.2.1.** [14] Soient  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x + 2y^2 - 2x^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}$  est fonction non différentiable en  $(0, y)$ ,  $E : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x^3, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$(f \circ E) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x^3 + 2y^2 - 2x \in \mathbb{R} \text{ deux fois différentiable,}$$

et

$$\frac{\partial(f \circ E)(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 2 = 0 \text{ implique que } x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial(f \circ E)(x, y)}{\partial y} = 4y = 0 \text{ implique que } y = 0$$

Donc, les points critiques sont  $\{(x_1, y_1)^T = (\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T, (x_2, y_2)^T = (-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T\}$ .

La nature des points critiques :

La matrice Hessienne

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2(f \circ E)(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2(f \circ E)(x, y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2(f \circ E)(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2(f \circ E)(x, y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour  $(x_1, y_1)^T = (\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$

$$H(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ les valeurs propres : } 6\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } 4 \text{ sont strictement positives. Alors}$$

la matrice Hessienne  $H(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$  est définie positive, et donc le point  $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$  est un minimum local de la fonction  $(f \circ E)$ .

Pour  $(x_2, y_2)^T = (-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$

$$H(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ les valeurs propres sont : } -6\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ strictement négative et } 4$$

strictement positive. Alors la matrice Hessienne  $H(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$  est indéfinie.

**Théorème 3.2.5.** [14] Soient  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ensemble ouvert  $E$ -convexe,

$E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est bijective et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction deux fois  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$ . Si  $\nabla(f \circ E)(\bar{x}) = 0$  et la matrice Hessienne  $H(\bar{x}) = \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})$  est définie positive, alors  $\bar{x}$  est un minimum local de  $(f \circ E)$ .

## Preuve

Par l'absurde : supposons que  $\nabla(f \circ E)(\bar{x}) = 0$  et la matrice Hessienne  $H(\bar{x}) = \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})$  est définie positive. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . puisque  $f$  est deux fois E-différentiable, on a :

$$(f \circ E)(x) = (f \circ E)(\bar{x}) + \langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(\bar{x}; x - \bar{x})$$

On a :  $\nabla(f \circ E)(\bar{x}) = 0$  alors

$$(f \circ E)(x) = (f \circ E)(\bar{x}) + \frac{1}{2} \langle \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}),$$

où  $\alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) \rightarrow 0$ , quand  $x \rightarrow \bar{x}$ .

Montrons qu'il existe une boule ouverte  $B(\bar{x}, r)$  telle que

$$(f \circ E)(\bar{x}) < (f \circ E)(x), \quad \forall x \in B(\bar{x}, r) \cap M_E.$$

Supposons le contraire. Alors, pour tout  $r > 0$ , il existe  $x_r \in B(\bar{x}, r) \cap M_E$ ,  $x_r \neq \bar{x}$ , tel que

$$(f \circ E)(x_r) \leq (f \circ E)(\bar{x}).$$

Pour  $\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $x_k \in B(\bar{x}, \frac{1}{k}) \cap M_E$ ,  $x_k \neq \bar{x}$ , tel que

$$(f \circ E)(x_k) < (f \circ E)(\bar{x}).$$

De plus, on a  $x_k \rightarrow \bar{x}$ , quand  $k \rightarrow +\infty$ . Posons  $d_k = \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|}$ , qui est un élément de la boule fermée  $\bar{B}(0, 1)$  (qui est compacte). Donc, il existe une sous suite  $(d_{k_j})_{j \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $d$ , quand  $j \rightarrow +\infty$ , avec  $\|d\| = 1$ . Par ailleurs, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$(f \circ E)(x_{k_j}) = (f \circ E)(\bar{x}) + \|x_{k_j} - \bar{x}\|^2 \left\{ \frac{1}{2} \langle \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})d_{k_j}, d_{k_j} \rangle + \alpha(\bar{x}; x_{k_j} - \bar{x}) \right\}.$$

Par suite

$$\frac{(f \circ E)(x_{k_j}) - (f \circ E)(\bar{x})}{\|x_{k_j} - \bar{x}\|^2} = \frac{1}{2} \langle \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})d_{k_j}, d_{k_j} \rangle + \alpha(\bar{x}; x_{k_j} - \bar{x}) \leq 0.$$

En faisant tendre  $j \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\langle \nabla^2 f(\bar{x})d, d \rangle \leq 0,$$

Ce qui contredit le fait que la matrice Hessienne  $H(\bar{x}) = \nabla^2(f \circ E)(\bar{x})$  est définie positive. alors  $\bar{x}$  est un minimum local de  $(f \circ E)$ .

**Exemple 3.2.2.** [14] Soient  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^2 - 1 \in \mathbb{R}$  est une fonction non différentiable en  $(0, y)$ ,  $E : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x^3, y) \in \mathbb{R}^2$  une application, alors

$$(f \circ E) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R} \text{ deux fois différentiable.}$$

La condition nécessaire pour  $(\bar{x}, \bar{y})$  est un minimum local de  $(f \circ E)$  est :

$\nabla(f \circ E)(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  implique que

$$\frac{\partial(f \circ E)(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} = 2\bar{x} = 0 \text{ implique que } \bar{x} = 0$$

$$\frac{\partial(f \circ E)(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} = 2\bar{y} = 0 \text{ implique que } \bar{y} = 0$$

et la matrice Hessienne

$$H(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2(f \circ E)(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^2} & \frac{\partial^2(f \circ E)(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2(f \circ E)(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2(f \circ E)(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est définie positive.

**Exemple 3.2.3.** [14] Soient  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x^{\frac{1}{3}} + y - 1 \in \mathbb{R}$  est une fonction non différentiable en  $(0, y)$ ,  $E : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x^3, y) \in \mathbb{R}^2$  une application, alors

$$(f \circ E) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x + y - 1 \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, soit  $M$  un ensemble  $E$ -convexe par rapport à l'application  $E$ , tel que :

$$M = \{\lambda_1(0, 0) + \lambda_2(0, 3) + \lambda_3(1, 2) + \lambda_4(1, 0)\} \cup \{\lambda_1(0, 0) + \lambda_2(0, -3) + \lambda_3(1, -2) + \lambda_4(1, 0)\}$$

Où  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i > 0$ , (l'ensemble réalisable est illustrée à la Fig 5) et

$$f(0, 0) = -1, \quad (f \circ E)(0, 0) = -1, \quad f(0, -3) = -4, \quad (f \circ E)(0, -3) = -4,$$

$$f(1, 2) = 2, \quad (f \circ E)(1, 2) = 2, \quad f(1, 0) = 0, \quad (f \circ E)(1, 0) = 0,$$

$$f(0, 3) = 2, \quad (f \circ E)(0, 3) = 2, \quad f(1, -2) = -2, \quad (f \circ E)(1, -2) = -2.$$

Alors  $(\bar{x}, \bar{y})^T = (0, -3)^T$  est une solution du problème  $P_E$  et  $E(\bar{x}, \bar{y}) = E(0, -3) = (0, -3)$  est une solution du problème  $P$ .

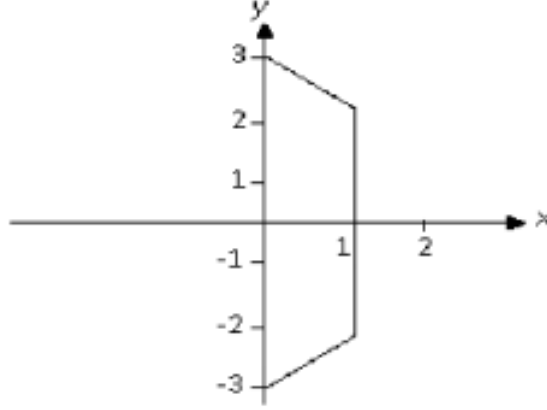


Fig 5. Exemple 3.2.3.

L'ensemble réalisable  $M$ .

**Définition 3.2.1.** [14] Soient  $M$  un ensemble  $E$ -convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$ ,  $E(\bar{x}) \in E(M)$ . Le cône de direction réalisable (admissible) de  $E(M)$  en  $E(\bar{x})$  noté par  $D$  est donné comme :

$$D = \{d : d \neq 0, E(\bar{x}) + \lambda d \in M, \text{ pour chaque } \lambda \in [0, \delta], \delta > 0\}$$

**Lemme 3.2.2.** [14] Soient  $M$  un ensemble  $E$ -convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  par rapport à  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$ . Si  $\bar{x}$  est un solution optimale local du problème  $P_E$ , alors  $F_0 \cap D = \emptyset$ .

Où  $F_0 = \{d : d \neq 0, \langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle < 0\}$ , et  $D$  est le cône de direction réalisable de  $E(M)$  en  $E(\bar{x})$ .

### Preuve

Supposons que  $\bar{x}$  est un solution optimale du problème  $P_E$  et  $F_0 \cap D \neq \emptyset$ .

$F_0 \cap D \neq \emptyset$  implique qu'il existe un vecteur  $d \in F_0 \cap D$  implique que  $d \in F_0$  et  $d \in D$ .

On a :  $d \in F_0$  implique que  $\langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle < 0$ . Par le théorème 3.2.3. il existe  $\delta_1 > 0$  tel que :

$$(3.3) \quad (f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < (f \circ E)(\bar{x}), \text{ pour chaque } \lambda \in [0, \delta_1]$$

$d \in D$  par la définition de cône de direction réalisable, il existe  $\delta_2 > 0$  tel que :

$$(3.4) \quad d \neq 0 \text{ et } E(\bar{x}) + \lambda d \in M, \text{ pour chaque } \lambda \in [0, \delta_2], \delta_2 > 0$$

De (3.3) et (3.4), on a

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < (f \circ E)(\bar{x}), \text{ pour chaque } \lambda \in [0, \delta],$$

Où  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Ce qui contredit l'hypothèse que  $\bar{x}$  est un solution optimale local du problème  $P_E$ .

$$\text{Alors } F_0 \cap D = \emptyset.$$

**Lemme 3.2.3.** [14] Soient  $M$  un ensemble ouvert  $E$ -convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  par rapport à  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , pour  $i = \overline{1, m}$ ,  $\bar{x}$  une solution réalisable du problème  $P_E$  et  $I(\bar{x}) = \{i : (g_i \circ E)(\bar{x}) = 0\}$ . De plus, supposons que  $g_i$  sont des fonctions  $E$ -différentiables en  $\bar{x}$ , pour  $i \in I(\bar{x})$  et que  $g_i$  sont des fonctions continues en  $\bar{x}$ , pour  $i \notin I(\bar{x})$ . Si  $\bar{x}$  est une solution optimale local, alors  $F_0 \cap G_0 = \emptyset$ , où

$$F_0 = \{d : d \neq 0, \nabla(f \circ E)(\bar{x}) < 0\},$$

$$G_0 = \{d : d \neq 0, \nabla(g_i \circ E)(\bar{x}) < 0, \text{ pour chaque } i \in I(\bar{x})\},$$

et  $E$  est bijective.

### Preuve

Supposons  $F_0 \cap G_0 \neq \emptyset$  et soit  $d \in F_0 \cap G_0$ . Puisque  $\bar{x}$  est un minimum local optimale, il existe une boule ouverte  $B(\bar{x}, r)$ , telle que

$$(f \circ E)(\bar{x}) \leq (f \circ E)(x), \forall x \in B(\bar{x}, r) \cap M_E.$$

D'après la  $E$ -différentiabilité des fonctions  $f$  et  $g_i$  en  $\bar{x}$ ,  $i \in I(\bar{x})$ , pour tout  $\lambda > 0$  on a

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) = (f \circ E)(\bar{x}) + \lambda \langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle + \lambda \|d\| \alpha(\bar{x}, \lambda d),$$

et

$$(g_i \circ E)(\bar{x} + \lambda d) = (g_i \circ E)(\bar{x}) + \lambda \langle \nabla(g_i \circ E)(\bar{x}), d \rangle + \lambda \|d\| \beta(\bar{x}, \lambda d).$$

Où  $\alpha(\bar{x}, \lambda d) \rightarrow 0$  et  $\beta(\bar{x}, \lambda d) \rightarrow 0$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Puisque

$$\langle \nabla(f \circ E)(\bar{x}), d \rangle < 0, \langle \nabla(g_i \circ E)(\bar{x}), d \rangle < 0, \forall i \in I(\bar{x})$$

et  $\bar{x} + \lambda d \rightarrow \bar{x}$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$ , il s'en suit que pour  $\lambda$  suffisamment petit,  $\lambda > 0$ , on a

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < (f \circ E)(\bar{x}) \text{ et } (g_i \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < (g_i \circ E)(\bar{x}) = 0, \forall i \in I(\bar{x}).$$

Pour  $i \notin I(\bar{x})$ , on a  $(g_i \circ E)(\bar{x}) < 0$ . Puisque  $(g_i \circ E)(\bar{x} + \lambda d) \rightarrow (g_i \circ E)(\bar{x})$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$ , on a

$$(g_i \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < 0 \text{ pour } \lambda > 0 \text{ suffisamment petit.}$$

Donc, pour  $\lambda$  suffisamment petit on a  $\bar{x} + \lambda d \in B(\bar{x}, r)$ ,

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < (f \circ E)(\bar{x}) \text{ et } (g_i \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Il en résulte que pour  $\lambda$  suffisamment petit, on a

$$(f \circ E)(\bar{x} + \lambda d) < (f \circ E)(\bar{x}) \text{ et } \bar{x} + \lambda d \in B(\bar{x}, r) \cap M_E.$$

Ce qui contredit l'optimalité local de  $\bar{x}$ . Par suite  $F_0 \cap G_0 = \emptyset$

**Théorème 3.2.6.** [14] (*Conditions optimalité de Fritz-John*)

*Soient  $M$  un ensemble ouvert  $E$ -convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  par rapport à l'application bijective  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , pour  $i = \overline{1, m}$ ,  $\bar{x}$  une solution réalisable du problème  $P_E$  et  $I(\bar{x}) = \{i : (g_i \circ E)(\bar{x}) = 0\}$ . De plus, supposons que  $g_i$  sont des fonctions  $E$ -différentiables en  $\bar{x}$ , pour  $i \in I$  et que  $g_i$  sont des fonctions continues en  $\bar{x}$ , pour  $i \notin I$ . Si  $\bar{x}$  est une solution optimale local, Alors, il existe des scalaires  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $\sum_{i=0}^m u_i = 1$ , tels que :*

1.  $u_0 \nabla(f \circ E)(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{x}) = 0.$

2.  $u_i (g_i \circ E)(\bar{x}) = 0, \forall i = \overline{1, m}.$

3.  $u_i \geq 0, \forall i = \overline{0, m}.$

*Et  $E(\bar{x})$  est une solution local du problème  $P$ .*

## Preuve

Posons

$$A(\bar{x}) = \left\{ \nabla(f \circ E)(\bar{x}) \right\} \cup \left\{ \nabla(g_i \circ E)(\bar{x}), \quad i \in I(\bar{x}) \right\}$$

D'après l'optimalité local de  $\bar{x}$  (voir le lemme 3.2.3.), on a

$$F_0 \cap G_0 = \emptyset.$$

Donc

$$\forall d \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad \exists a \in A(\bar{x}) \quad \text{tel que } \langle a, d \rangle \geq 0.$$

Il en résulte d'après le lemme de Gordan  $0 \in \text{conv}A(\bar{x})$ .

Posons  $I(\bar{x}) = \{i_1, \dots, i_p\}$ ,  $p \leq m$ . Donc, il existe  $u_{ik} \in [0, 1]$ ,  $k = 0, \dots, p$ ,  $\sum_{k=0}^p u_{ik} = 1$ , tels que

$$u_0 \nabla(f \circ E)(\bar{x}) + \sum_{k=0}^p u_{ik} \nabla(g_{i_k} \circ E)(\bar{x}) = u_0 \nabla(f \circ E)(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} u_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{x}) = 0$$

On distingue les cas suivantes :

a) Pour  $i \in I(\bar{x})$  on a  $(g_i \circ E)(\bar{x}) = 0$ . Donc  $u_i(g_i \circ E)(\bar{x}) = 0$

b) Pour  $i \notin I(\bar{x})$  on a  $(g_i \circ E)(\bar{x}) < 0$ . Choisissons  $u_i = 0$ , alors  $u_i(g_i \circ E)(\bar{x}) = 0$ . Par suite  $\sum_{i=0}^m u_i = 1$  et

1.  $u_0 \nabla(f \circ E)(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{x}) = 0$ .

2.  $u_i(g_i \circ E)(\bar{x}) = 0, \forall i = \overline{1, m}$ .

3.  $u_i \geq 0, \forall i = \overline{0, m}$ .

Et  $E(\bar{x})$  est une solution local du problème  $P$ . D'où le résultat.

**Théorème 3.2.7.** [14] Soient  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bijective,  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $E$ -différentiable en  $\bar{x}$ . Si  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$ , il existe  $\bar{y} \in M_E$  tel que  $\bar{x} = E(\bar{y})$  est une solution optimale du problème  $P_E$  et les conditions optimalité de Fritz-John du problème  $P_E$  est satisfait.

## Preuve

Soit  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$ . Puisque  $E$  bijective, d'après le théorème 3.2.1. il existe  $\bar{y} \in M_E$  tel que  $\bar{x} = E(\bar{y})$ . Donc il existe des scalaires  $u_0, u_i$  satisfaisant les conditions optimalité de Fritz-John du problème  $P_E$

$$u_0 \nabla(f \circ E)(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} u_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{x}) = 0,$$

$$u_0, u_i \geq 0, \text{ pour chaque } i \in I(\bar{x})$$

### **Théorème 3.2.8.** [14] (Conditions de Karush-Kuhn-Tucker)

Soient  $M$  un ensemble ouvert  $E$ -convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  par rapport à l'application bijective  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $E$ -différentiable et strictement  $E$ -convexe en  $\bar{x}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $i = \overline{1, m}$ ,  $\bar{y}$  une solution réalisable du problème  $P_E$  et  $I(\bar{x}) = \{i : (g_i \circ E)(\bar{y}) = 0\}$ . De plus, supposons que  $(g_i \circ E)$  est continue en  $\bar{y}$  pour  $i \notin I(\bar{y})$  et  $\nabla(g_i \circ E)(\bar{y})$  pour  $i \in I(\bar{x})$  sont linéairement indépendants. Si  $\bar{x}$  est une solution optimale du problème  $P$  alors il existe  $\bar{y} \in M_E$  tel que  $\bar{x} = E(\bar{y})$  est une solution optimale du problème  $P_E$  et il existe des scalaires  $u_i$  pour  $i \in I(\bar{x})$  tels que

$$\nabla(f \circ E)(\bar{y}) + \sum_{i \in I(\bar{y})} u_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{y}) = 0, \quad u_i \geq 0 \text{ pour chaque } i \in I(\bar{y}).$$

## Preuve

D'après le théorème de conditions optimalité de Fritz-John, il existe des scalaires  $u_0, \hat{u}_i \geq 0$  pour chaque  $i \in I(\bar{y})$  tels que

$$u_0 \nabla(f \circ E)(\bar{y}) + \sum_{i \in I(\bar{y})} \hat{u}_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{y}) = 0.$$

Si  $u_0 = 0 \implies \sum_{i \in I(\bar{y})} \hat{u}_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{y}) = 0$  et comme  $\nabla(g_i \circ E)(\bar{y})$  pour  $i \in I(\bar{x})$  sont linéairement indépendants alors  $\hat{u}_i = 0$  pour  $i \in I(\bar{x})$ , donc  $u_0 > 0$ .

En prenant  $u_i = \frac{\hat{u}_i}{u_0}$ , alors

$$\nabla(f \circ E)(\bar{y}) + \sum_{i \in I(\bar{y})} u_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{y}) = 0, \quad u_i \geq 0 \text{ pour chaque } i \in I(\bar{y}).$$

D'après le théorème 3.2.3.  $\bar{y}$  est une solution optimale du problème  $P_E$ .

**Définition 3.2.2.** [14] Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble  $E$ -convexe par rapport à l'application  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est dite fonction pseudo  $E$ -convexe si pour chaque  $x_1, x_2 \in M$  avec  $\nabla(f \circ E)(x_1)(x_2 - x_1) \geq 0$  implique que  $(f \circ E)(x_2) \geq (f \circ E)(x_1)$  ou pour tout  $x_1, x_2 \in M$  et  $(f \circ E)(x_2) < (f \circ E)(x_1)$  implique que  $\nabla(f \circ E)(x_1)(x_2 - x_1) < 0$ .

**Théorème 3.2.9.** [14] Soient  $M$  un ensemble ouvert  $E$ -convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  par rapport à l'application bijective  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $E$ -différentiable et strictement  $E$ -convexe en  $\bar{x}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $i = \overline{1, m}$ ,  $\bar{x} = E(\bar{y})$  une solution réalisable du problème  $P_E$  et  $I(\bar{y}) = \{i : (g_i \circ E)(\bar{y}) = 0\}$ . Supposons que  $f$  est pseudo- $E$ -convexe en  $\bar{y}$  et que  $g_i$  est quasi- $E$ -convexe et  $E$ -différentiable en  $\bar{y}$  pour chaque  $i \in I(\bar{y})$ . De plus, supposons que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker satisfait en  $\bar{y}$  alors,  $\bar{y}$  est une solution optimale global du problème  $P_E$  et donc  $\bar{x} = E(\bar{y})$  est une solution optimale global du problème  $P$ .

### Preuve

Soit  $\hat{y}$  une solution réalisable du problème  $P_E$ , alors  $(g_i \circ E)(\hat{y}) \leq (g_i \circ E)(\bar{y})$  pour chaque  $i \in I(\bar{y})$ . Puisque  $(g_i \circ E)(\hat{y}) \leq 0$ ,  $(g_i \circ E)(\bar{y}) = 0$  et  $g_i$  est quasi  $E$ -convexe en  $\bar{y}$ , alors  $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} (g_i \circ E)(\bar{y} + \lambda(\hat{y} - \bar{y})) &= (g_i \circ E)(\lambda\hat{y} + (1 - \lambda)\bar{y}) \\ &\leq \max\{(g_i \circ E)(\hat{y}), (g_i \circ E)(\bar{y})\} \\ &= (g_i \circ E)(\bar{y}). \end{aligned}$$

Alors, on a d'après le théorème 3.2.3.  $\nabla(g_i \circ E)(\bar{y})(\hat{y} - \bar{y}) \leq 0$ , en multipliant par  $u_i$  et en additionnant sur  $I(\bar{y})$ , on obtient

$$\left[ \sum_{i \in I(\bar{y})} u_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{y}) \right] (\hat{y} - \bar{y}) \leq 0$$

Mais puisque

$$\nabla(f \circ E)(\bar{y}) + \sum_{i \in I(\bar{y})} u_i \nabla(g_i \circ E)(\bar{y}) = 0$$

On a donc  $\nabla(f \circ E)(\bar{y}) \geq 0$ . Puisque  $f$  est pseudo  $E$ -convexe en  $\bar{y}$ , on obtient

$$(f \circ E)(\hat{y}) \geq (f \circ E)(\bar{y}).$$

Alors,  $\bar{y}$  est une solution optimale global du problème  $P_E$  et d'après le théorème 3.2.5.  $\bar{x} = E(\bar{y})$  est une solution optimale global du problème  $P$ .

**Exemple 3.2.4.** [14] On considère le problème suivante (problème  $P$ ) :

$$P \quad \begin{cases} \text{Min} f(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^2 \\ \text{s.c. } x^2 + y^2 \leq 5, \\ x + 2y \leq 4, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

L'ensemble réalisable de ce problème est illustrée à la Fig 6.

Soit  $E : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (\frac{1}{8}x^3, \frac{1}{3}y) \in \mathbb{R}^2$  une application, alors le problème  $P_E$  comme suit :

$$P_E \quad \begin{cases} \text{Min}(f \circ E)(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \\ \text{s.c. } \frac{1}{64}x^6 + \frac{1}{9}y^2 \leq 5, \\ \frac{1}{8}x^3 + \frac{2}{3}y \leq 4, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

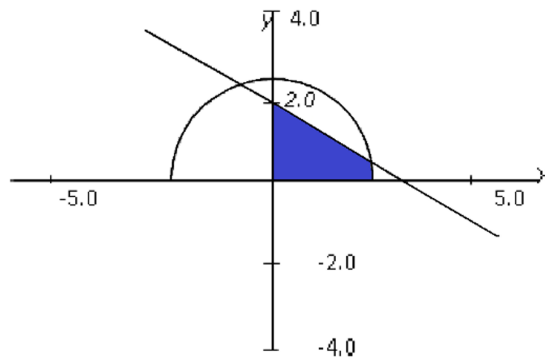


Fig 6. Exemple 3.2.4.

L'ensemble réalisable  $M$ .

On remarque que  $E(M) \subset M$ , où

$$(\sqrt{5}, 0) \in M \text{ implique que } E(\sqrt{5}, 0) = (5\frac{\sqrt{5}}{8}, 0) \in M$$

$$(0, 2) \in M \text{ implique que } E(0, 2) = (0, \frac{2}{3}) \in M$$

$$(0, 0) \in M \text{ implique que } E(0, 0) = (0, 0) \in M$$

$(2, 1) \in M$  implique que  $E(2, 1) = (1, \frac{1}{3}) \in M$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont les suivantes :

$$\nabla(f \circ E)(x, y) + u_1 \nabla(g_1 \circ E)(x, y) + u_2 \nabla(g_2 \circ E)(x, y) = 0$$

$$u_1(g_1 \circ E)(x, y) = 0$$

$$u_2(g_2 \circ E)(x, y) = 0$$

$$u_1, u_2 \geq 0$$

Où  $(g_1 \circ E)(x, y) = \frac{1}{64}x^6 + \frac{1}{9}y^2 - 5$  et  $(g_2 \circ E)(x, y) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{2}{3}y - 4$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{2}{2} \\ \frac{2}{9}y \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} \frac{6}{64}x^5 \\ \frac{2}{9}y \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{8}x^2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 \left( \frac{1}{64}x^6 + \frac{1}{9}y^2 - 5 \right) = 0$$

$$u_2 \left( \frac{1}{8}x^3 + \frac{2}{3}y - 4 \right) = 0$$

$$u_1, u_2 \geq 0$$

La solution est  $\left( (x, y)^T = (0, 0)^T, u_1 = 0, u_2 = 0 \right)$  et  $z^T = (z_1, z_2)^T = E(x, y) = (0, 0)^T$  est une solution du problème P.

# Conclusion

Ce mémoire avait pour ambition de introduit une définition d'une fonction E-différentiable, qui transforme une fonction non différentiable en une fonction différentiable sous un opérateur  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Aussi un problème d'optimisation d'inégalité a été examiné dans lequel les fonctions concernées ne sont pas nécessairement différentiables, mais elles sont E-différentiables. Le soi-disant Fritz John conditions d'optimalité nécessaires ont été établies pour l'E-différentiable considéré problème d'optimisation avec les contraintes inégalités. En outre, les conditions d'optimalité nécessaires Karush-Kuhn-Tucker ont également été établies pour un problème de programmation non nécessairement différentiable.

# Bibliographie

- [1] A. Cambini, L. Martein, "Generalized Convexity and Optimization : Theory and Applications", Springer-Verlag, Berlin, (2009).
- [2] Anne Cot , Charles-Michel Marle , Gilles Christol. Calcul différentiel : Cours et exercices corrigés. Ellipses Marketing. (1997)
- [3] Baptiste-Jean Hiriart-Urruty. Optimisation et analyse convexe : Exercices et problèmes corrigés, avec rappels de cours .EDP SCIENCES. (2009)
- [4] DUCA, D.I., DUCA, E., LUPSA, L., and BLAGA, L., E-Convex Functions, Bulletin for Applied and Computer Mathematics, Vol. 43, pp. 93–102, (2000).
- [5] E. A. Youness, "Quasi and strictly quasi E-convex functions", Journal of Statistics and Management Systems, 4 (2), 201-210, (2001).
- [6] E. K. P. Chong, S. H. Zak, "An introduction to optimization", 2nd Edition, John Wiley and Sons, INC., New York, (2001).
- [7] Emam, T, Youness, EA : Semi strongly E-convex function. J. Math. Stat. 1(1), 51-57 (2005)
- [8] F. Mirzapour, Some Properties On E-Convex And E-Quasi-Convex Functions. The 18th Seminar on Mathematical Analysis and its Applications 26-27 Farvardin, 1388 (15-16 April, 2009) pp 178-181. Tarbiat Moallem University.
- [9] G. H. Toader, "Some generalizations of the convexity", Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization. University of Cluj-Napoca, (1984).

- [10] Iqbal, A, Ahmad, I, Ali, S : Some properties of geodesic semi-E-convex functions. *Non-linear Anal., Theory Methods Appl.* 74, 6805-6813 (2011)
- [11] Iqbal, A, Ali, S, Ahmad, I : On geodesic E-convex sets, geodesic E-convex functions and E-epigraphs. *J. Optim. Theory Appl.* (2012), (Article Available online)
- [12] J. S. Grace, P. Thangavelu, "Properties of  $\eta$ -convex sets", *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 25, 1-7, (2009).
- [13] Megahed, AA, Gomma, HG, Youness, EA, El-Banna, AH : A combined interactive approach for solving E-convex multiobjective nonlinear programming. *Appl. Math. Comput.* 217, 6777-6784 (2011).
- [14] Megahed, A.E.M.A., Gomma, H.G., Youness, E.A. et al. Optimality conditions of E-convex programming for an E-differentiable function. *J Inequal Appl* 2013, 246 (2013).
- [15] Morris S.A. *Topology Without Tears* (2014).
- [16] S. N. Majeed, M. I. Abd Al-Majeed, "On convex functions, E-convex functions and their generalizations : applications to non-linear optimization problems", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 116 (3), 655-673, (2017).
- [17] Xiusu Chen. Some properties of semi-E-convex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 275, 251–262 (2002) .
- [18] X. M. Yang, Technical Note On E-convex Sets, E-convex Functions, and E-convex Programing, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 109, No. 3 (2001), 699-704.
- [19] Youness, E.A. E-Convex Sets, E-Convex Functions, and E-Convex Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications* 102, 439–450 (1999).
- [20] Youness, EA : Optimality criteria in E-convex programming. *Chaos Solitons Fractals* 12, 1737-1745 (2001).
- [21] Yu-Ru Syau, E.Stanley Lee. Some properties of E-convex functions. *Applied Mathematics Letters* 18 1074–1080 (2005).