

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

جامعة عباس لغرور - خنشلة

Abbes Laghrour - Khenchela University



Faculty of Science and Technology

Departement of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Intitulé par :

Thème : Systèmes de réaction diffusion et quelques applications à la biologie.

Réalisé par : Ounnas Sana

Dirigé par : Dr. Zaidi Messaoud

Bouali Chaima

Membres de jury :

M^{me} Achichi .A.

Université Abbes Laghrour - Khenchela

Président

M Zaidi. M

Université Abbes Laghrour - Khenchela

Rapporteur

M^{me} Merghad.A

Université Abbes Laghrour - Khenchela

Examinateur

2022-2023

Remerciements

Avant tout, je remercie le dieu de m'avoir donné le courage,.....

Tout d'abord, je remercie vivement et en premier lieu, mon encadreur Dr.messaoud Zaidi

Je remercie également les membres de jury M^{me} Achichi A,et M^{me} Merghad A

Mes remerciements vont aussi à tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Ounnas Sana et Chaima Bouali



Dédicaces

À la mémoire de mon père, que Dieu ait son âme, et en l'honneur de ma chère mère, que Dieu la préserve, je dédie humblement ce travail.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance et ma gratitude envers mes frères bien-aimés Ayoub, Abd Raouf et Haithem, ainsi qu'envers mon oncle chéri Djamel. Leur soutien et leur amour inconditionnel ont été une source d'inspiration pour moi tout au long de ce parcours.

Je tiens également à remercier mes chères amies Siham et Nihad, ainsi que ma promotion 2022/2023, pour leur encouragement et leur camaraderie.

Que cette dédicace soit un témoignage de mon amour et de ma reconnaissance éternels envers ceux qui m'ont soutenu dans ma quête de connaissances et de réussite

Dédicace

A l'aide d'**ALLAH** tout puissant, qui a tracé le Chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que Je dédie :

A mes chers parents ... ma très chère mère **Firouz** tu m'as donné la vie, la tendresse et le courage pour réussir toute ce qu'il je peux t'offrir, ne pourra exprimer l'amour qui je te porte, en témoignage de mon profond cœur, je t'offre ce modeste travail pour tes sacrifices, puisse dieu, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

Mon très cher père **Salah**, l'épaule solide, aucune dédicace ne saurait exprimer l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous, rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être, que Allah te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mes sœurs bien aimée **Rawnak , Hazar**, Je suis très heureuse et fière de votre présence à mes cotés.

A mes frères bien aimée **Haroun ,Djasam,Mouhammed**, je suis très fière de votre présence à mes cotés.

A ma collègue **Sana Ounas** qui est partagée avec moi les moments difficiles de ce travail .

À monsieur «**Zaidi Massoud** » pour ses orientations et ces précieux conseils.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Chaima

Résumé

Dans ce travail, nous avons trouvé les conditions pour la formation de motifs selon le mécanisme de Turing, et nous avons pris, comme exemples appliqués, les motifs qui se forment sur le corps du poisson zèbre, et comme deuxième exemple appliqués, nous avons pris la formation de cellules cancéreuses et leur apparence sous forme de motifs. Les systèmes mathématiques utilisés pour l'étude sont les systèmes de réaction diffusion.

Mot clés : Système de réaction-diffusion - Instabilité de Turing - Système de Schnakenberg - Système Prédateur-Proie - Dynamique de motif de cellules cancéreuses

ملخص

في هذا العمل ، وجدنا شروط تشكيل النمط وفقاً لآلية تورينج ، وأخذنا ، كأثلة تطبيقية ، الأنماط التي شكل على جسم الزرد ، وكمثال تطبيقي آخر ، اتخذناه تكوين الخلايا السرطانية وظهورها كنماذج. الأنظمة الرياضية المستخدمة للدراسة هي أنظمة تفاعل الانتشار.

الكلمات المفتاحية : نظام التفاعل والانتشار، عدم استقرار تورينج، نظام شناكنبرج، نظام الفريسة والمفترس، ديناميكية أنماط الخلايا السرطانية.

Abstract

In this work, we have found the conditions for the formation of patterns according to the Turing mechanism, and we have taken, as applied examples, the patterns that form on the body of zebrafish, and as a second applied example, we have taken the formation of cancer cells and their appearance as patterns. The mathematical systems used for the study are.

Keywords : Reaction-diffusion system - Turing instability - Schnakenberg system - Prey-Predator system - Dynamics of cancer cell patterns.

Table des matières

1	Quelque notions fondamentales de système Réaction diffusion	4
1.1	Réaction	4
1.1.1	Exemple	4
1.2	Diffusion	4
1.3	Première loi de Fick	5
1.4	Deuxième loi de Fick	5
1.5	Système de réaction-diffusion	5
1.6	Modélisation d'un système réaction-diffusion	6
1.7	Quelque exemple de réaction diffusion	9
2	Instabilité de Turing	11
2.1	Conditions de Turing pour formule les motifs	11
2.1.1	Condition de nos dimensionnalisation	11
2.1.2	Le système Linéarisé	14
2.1.3	Stabilité Sans Diffusion	14
2.1.4	Instabilité par diffusion	15
2.1.5	Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces	15
2.1.6	Le coefficient critique	17
2.1.7	Les conditions de Turing pour la formation de motifs	17
2.2	Quelques modèles de systèmes de réaction diffusion	19
2.2.1	Système de Schnakenberg	19
2.2.2	Système de Gray-Scott	19
2.2.3	Le système de Brusselator	20

2.3	Systèmes activateurs inhibiteurs	20
3	Application à la biologie	22
3.1	Formation de motifs	22
3.1.1	Motifs de schnakenberg	22
3.1.1.1	Les point d'équilibres	22
3.1.1.2	Instabilité induite par la diffusion pour le système de Schnakenberg	23
3.1.2	Motifs de Poisson zèbre	25
3.1.3	Les motifs d'un système Proie-Prédateur	27
3.2	Dynamique du motif d'un système immunitaire de réaction diffusion	36
3.2.1	Quelques notions médicaux du cancer	36
3.2.1.1	Définition du cancer	36
3.2.1.2	Le tumeur et son Types	36
3.2.1.3	Certains signes et symptômes généraux du cancer	36
3.2.1.4	Les stades du cancer :	37
3.2.1.5	Propagation du cancer :	37
3.2.2	L'étude dynamique de motif de cellules cancéreuses	37
3.2.2.1	Le modèle mathématique	38
3.2.2.2	Discussion	42

Introduction Générale

Les systèmes de Réction diffusion sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles, parabolique, semi-linéaire de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u(t, x) = F(u), x \in \Omega, t \geq 0$$

Un système de réaction diffusion comprend un terme de réaction et un terme de diffusion. $u = u(t, x)$ est une variable d'état et décrit la densité/concentration d'une substance, d'une population... a la position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ au temps t , Ω est un ouvert. Δ désigne l'opérateur de Laplace. Ainsi, le premier terme du coté droit décrit la "diffusion", y compris D comme matrice diagonale de diffusion. Le second terme, $F(u)$ est une fonction lisse $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et décrit des processus qui changent a réellement le présent u , c'est-a- dire qu'il lui arrive quelque chose (naissance, mort, réaction chimique...), pas seulement diffus dans l'espace. Souvent, le système de réaction-diffusion est utilisé pour décrire la propagation des populations dans l'espace.

Nous avons déjà quelques idées sur les solutions non homogènes des équations de réaction-diffusion. Dans ce travail, nous traiterons intensivement de la possible formation de motifs spatiaux avec des systèmes de réaction-diffusion. Ce n'est pas seulement "beau a voir", par exemple. comment les motifs de pelage des animaux peuvent apparaître, mais très essentiel a la vie pour comprendre ces phénomènes, comme par exemple. la morphogènes (comment les embryons se développent a leurs débuts) sous-tend des processus similaires.

Nous commençons par les idées de Turing (a partir de 1952) : dans certaines situations, il est possible que les produits chimiques réagissent et se diffusent de telle manière que l'état d'équilibre montre des schémas spatiaux hétérogènes des concentrations. (Les concentrations peuvent concerner par exemple des produits chimiques ou des morphogènes).

L'idée de Turing : Supposons que nous ayons un système qui tend vers un état linéairement stable s'il n'y a pas de diffusion. Dans certaines conditions, une " instabilité due a la diffusion " a peut

évoluer, si D_A est différent de D_B , c'est-à-dire que des modèles spatialement inhomogènes peuvent apparaître. Une espèce devrait agir comme un inhibiteur et l'autre comme un activateur. nous avons commencé ce travail en obtenant ce modèle mathématique puis en étudiant dans quelles conditions le système devient spatialement instable. En particulier, ces conditions ont été données par le mathématicien Alan Turing dans *The Chemical Basis of Morphogenesis* en 1952. De plus, un autre point important développé dans ce travail a été d'appliquer cette théorie sur le corps animal, en particulier, pour voir comment la géométrie du corps affecte la conception du motif résultant (rayé ou tacheté). De nos jours, on sait que de nombreux processus biologiques sont expliqués par des modèles mathématiques, ce qui nous permet de faire des prédictions et de mieux comprendre certains problèmes biologiques d'une complexité particulière.

Cependant, traditionnellement ces deux domaines scientifiques travaillaient séparément, et c'est la raison pour laquelle il y a de plus en plus de groupes de recherche essayant de donner des modèles mathématiques à différents processus biologiques. L'un des phénomènes biologiques les plus étudiés actuellement est la formation de motifs. On regarde autour de soi et on constate qu'il existe un grand nombre de motifs dans la nature : dunes désertiques, toiles d'araignées, peaux d'animaux (zèbres, léopards...), feuilles... Cette observation de la nature a conduit de nombreux scientifiques à se demander pourquoi ils sont originaires, et ainsi certaines théories ont commencé à apparaître. Cependant, la théorie et le modèle mathématiques les plus connus et acceptés sont ceux donnés par Alan Turing en 1952 dans son article *The Chemical Basis of Morphogenesis*. En particulier, il a étudié la formation de motifs dans les formes vivantes. Cette théorie stipule que la formation de motifs a lieu au cours de la morphogènes, qui est la formation d'un organisme par des processus embryologiques de différenciation des cellules, des tissus et des organes et le développement de systèmes d'organes selon le plan génétique de l'organisme potentiel et des conditions environnementales. En particulier, Turing a affirmé que les modèles émergent de l'apparition d'instabilités sur deux processus qui se produisent simultanément : les réactions chimiques et la diffusion, qui affectent la concentration d'une substance spécifique appelée morphogènes. Bien que la théorie de Turing soit la plus acceptée pour la formation de motifs, elle est assez générale en ce sens qu'elle inclut de nombreuses espèces et motifs. C'est pourquoi de nombreux scientifiques modernes ont pris cette théorie comme point de départ pour étudier des cas spécifiques.

Le mathématicien James D. Murray. Il a développé et appliqué la théorie de Turing aux animaux, comme les mammifères (zèbres, léopards, félins...), les coquillages, les papillons... James D. Murray a déclaré en 1989 que la formation de motifs chez les animaux a lieu pendant la morphogènes.

En outre, il a affirmé que dans ce processus se produisent des perturbations dans un système de diffusion réactionnel qui affecte la concentration de substances appelées morphogènes, qui peuvent être des hormones, des gènes... (ils ne sont pas spécifiques). Enfin, il a fait valoir que ces instabilités se répercutent sur la peau animale en raison de la différenciation ultérieure des cellules pour produire de la mélanine, qui sont les cellules qui affectent la pigmentation animale. Par conséquent, les mathématiciens ont trouvé intéressant d'obtenir une explication mathématique de ce phénomène. Les systèmes de réaction diffusion ont de nombreuses applications, notamment en biologie, en épidémiologie, et dans de nombreuses maladies, nous avons donné un exemple d'étude de la propagation des cellules cancéreuses et de leur mouvement dans le corps du patient.

Notre Mémoire est contient trois chapitres. Les chapitres sont organisé comme suit :

Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions générales et certains définitions préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures. Dans le deuxième chapitre, nous avons traité l'instabilité de Turing et ses conditions dans un système a deux composantes et quelques exemples de réaction diffusion en biologie. Dans le troisième chapitre,

nous avons discuté de la formation de motifs selon le mécanisme de Turing pour certains systèmes de réaction diffusion, et d'autre part, nous avons expliqué comment les cellules cancéreuses se forment sous forme de motifs de taches ou de lignes selon le mécanisme de Turing.

Chapitre 1

Quelques notions fondamentales de système

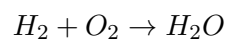
Réaction diffusion

1.1 Réaction

une réaction est une transformation de la matière dans laquelle les espèces chimiques (atomiques, ioniques ou moléculaires) qui la composent sont modifiées. Les espèces formées au cours de la réaction sont appelées produits de réaction. Depuis les travaux de Lavoisier, les scientifiques savent que la réaction chimique se fait sans variation mesurable de la masse.

1.1.1 Exemple

Le dihydrogène brûle avec le dioxygène en formant de l'eau. Les réactifs sont donc le dihydrogène (H_2) et le dioxygène (O_2) Le produit est de l'eau (H_2O) L'équation de réaction non équilibrée est :



1.2 Diffusion

la diffusion est un phénomène par lequel deux ou plusieurs substances en contact acquièrent une distribution et des propriétés homogènes. Diffusion des gaz, solutions, diffusion thermique, coefficient de diffusion. Des courants rapides emportaient tous ces gaz en diffusion, et les torrents laves glissaient le long de la montagne, s'appelle généralement " migration ". La diffusion est donc la migration sous une certaine agitation (thermique par exemple), par exemple lorsque l'extrémité d'un barreau est chauffée, la chaleur diffuse de la partie chaude vers la partie froide du barreau.

1.3 Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration. Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur.

Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

$$J_i = -d\nabla C_i \quad (1.3.1)$$

1.4 Deuxième loi de Fick

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules i , $\int \int \int C_i dV$ dans un volume donné V est égale au flux sortant $\int \int J_i dS$ du vecteur densité de courant J_i de particules i à travers la surface fermée S délimitant le volume V .

En utilisant le théorème de la divergence, et en identifiant les deux intégrants ci-dessous, on obtient la deuxième loi de Fick suivante

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int C_i dV = \int \int_S J_i dS = \int \int \int \nabla J_i dV \quad (1.4.1)$$

Le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente. On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla J_i = 0 \quad (1.4.2)$$

1.5 Système de réaction-diffusion

Le système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances réparties dans l'espace et soumises à deux processus : un processus de réactions chimiques locales, dans lequel les différentes substances sont transformées, et un processus de diffusion qui provoque une distribution de ces substances dans l'espace. Cette description implique naturellement que de tels systèmes s'appliquent à la chimie. Cependant, ils peuvent aussi décrire des phénomènes dynamiques de nature différente : la biologie, la physique, la géologie ou l'écologie sont des exemples de domaines ou de champs où de tels systèmes apparaissent. Un système de réaction diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution (dans le temps) de nombreux phénomènes en chimie, physique, biologie, etc. Mathématiquement, ces systèmes sont représentés par des équations aux dérivées

1.6 Modélisation d'un système réaction-diffusion

Les systèmes de réaction-diffusion [33] décrivent le comportement et les interactions de deux types de particules ou plus. Les termes Δu et Δv sont les termes de diffusion et décrivent la propagation de ces particules. Les termes de réaction sont représentés par f et g , et ces termes décrivent comment les particules interagissent les unes avec les autres. u et v apparaissent dans les deux équations, en général, le système ne peut pas être écrit en deux équations distinctes. Les systèmes de réaction-diffusion peuvent être obtenus à partir d'équations de conservation de la masse. Supposons qu'on étudie un système contenant P quantités C_1, C_2, \dots, C_p , qui peuvent représenter des densités des concentrations de réactifs chimiques, de population, etc. Les densités des espèces sont représentées par un vecteur

$$C(t, x) = (C_1(t, x), C_2(t, x), \dots, C_p(t, x)), t \geq 0, x \in \Omega$$

où Ω est un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^n . On note J_i le flux de l'espèce C_i et f_i son taux de création volumique horaire. Pour tout $A \subset \Omega$ borné, régulier, la conservation de la masse pour C_i à l'intérieur de A s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int C_i + \int_{\partial A} J_i \cdot \nu = \int_A f_i, i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (1.6.1)$$

où ν est la dérivée normale extérieure sur la frontière ∂A de A . D'après le théorème de Gauss Green,

$$\frac{d}{dt} \int C_i + \int_A \operatorname{div} J_i = \int_A f_i, i \in \{1, 2, \dots, p\}$$

Comme A est quelconque, on obtient l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \operatorname{div} J_i = f_i, i \in \{1, 2, \dots, p\}$$

D'après la loi de Fick, J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces, ce qui donne,

$$J_i = - \sum_{j=1}^p d_{ij} \nabla C_j, i = 1, \dots, p$$

où les d_{ii} sont les coefficients de diffusion, $D = (d_{ii}), 1 \leq i \leq p$ est une matrice diagonale avec $d_i > 0, \forall i = 1, \dots, p$. on retrouve finalement le système de réaction-diffusion

$$\frac{\partial C}{\partial t} + D \Delta C = f(C) \quad (1.6.2)$$

le système de réaction-diffusion s'accompagne souvent de certaines conditions initiales et d'autres aux bords selon l'origine et la nature du problème étudié. S'il n'y a pas d'immigration des individus

à travers la frontière de Ω sur lequel le problème est posé, nous choisissons les conditions aux bords de Neumann. Et s'il n'y a pas d'individus sur la frontière, nous prenons les conditions aux bords homogènes de Dirichlet. Lorsque les données initiales sont suffisamment régulières, l'existence locale de solutions pour les systèmes de la forme (1.6) est bien connue. L'existence globale est un problème ouvert en général, et on sait qu'elle ne peut avoir lieu sans hypothèses supplémentaires sur les f_i , termes de réaction cinétique. Laissez-nous faire quelques commentaires sur la structure des non-linéarités f_i . Tout d'abord, on supposera toujours que le modèle préserve la positivité des solutions. Il est bien connu que cela revient à supposer que $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ est quasi-positif, ce qui signifie

$$(\mathbf{H}_1) \forall i \in \{1, \dots, p\}, f(t, x, c) \geq 0 \text{ pour tout } (t, x, c) \in (0, +\infty) \times \Omega \times [0, +\infty)^p \text{ tel que } c_i = 0.$$

Ensuite, pour espérer l'existence de solutions globales en temps, f doit satisfaire des hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses viennent souvent du modèle qu'on étudie. Par exemple, la conservation de la masse correspond à supposer $\sum_{i=1}^p f_i = 0$. Plus généralement, la masse totale décroît si

$$(\mathbf{H}_2) \sum_{i=1}^p f_i \leq 0.$$

On vérifie facilement que les hypothèses (H_1) et (H_2) , avec des conditions de Neumann homogène au bord, garantissent que les solutions de (1.6) sont uniformément bornées dans $L^1(\Omega)$ étant donné que pour tout $t > 0$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^p c_i(t, x) dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p c_i(0, x) dx$$

et $\|c_i(t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} c_i(t, x) dx$ puisque c_i est positive. Dans le cas homogène, où les fonctions c_i ne dépendent pas de x , on peut remarquer qu'elles sont aussi solutions du système d'équations différentielle ordinaires associé

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} = f_1(t, x, c) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial C_p}{\partial t} = f_p(t, x, c) \end{cases}$$

Pour des données initiales positives, les solutions restent positives. Étant donné que

$$\sum_{i=1}^p c_i(t) \leq \sum_{i=1}^p c_i(0)$$

elles sont uniformément bornées sur leur intervalle maximal de définition. Par conséquent, dans ce cas particulier, les solutions maximales sont globales. Il est alors naturel de se demander si

les hypothèses (H_1) et (H_2) sont suffisantes pour assurer l'existence de solutions globales fortes pour le système de réaction diffusion (1.6). La réponse est non : des solutions explicites d'un système du type (1.6) avec les propriétés (H_1) et (H_2) ont été construites dans [3], et ces solutions explosent en norme $L^\infty(\Omega)$ en temps fini. Dans ce dernier exemple, les coefficients de diffusion sont pourtant constants, et les nonlinéarités sont bornées par des expressions polynomiales. L'explosion peut même avoir lieu en dimension $N = 1$, à condition que la croissance des nonlinéarités soit assez rapide. Ceci prouve que lorsqu'on s'intéresse à l'existence globale de solutions fortes, on doit faire des hypothèses supplémentaires sur $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. Il existe de nombreuses références sur les problèmes d'existence globale pour ces systèmes, où diverses hypothèses sur les fonctions (f_1, f_2, \dots, f_p) sont examinées [5, 2, 1]. Pour une vue d'ensemble, voir [4]. L'existence de solutions globales faibles est plus facile à obtenir dans le cas de coefficients de diffusion constants et pour des nonlinéarités a priori bornées pour tout $T > 0$ dans $L^1((0, T), \Omega)$. L'existence de solutions globales faibles est prouvée dans [4]. Ce résultat implique que si la croissance de f_i par-rapport à c est au plus quadratique, on a l'existence de solutions globales faibles sous les hypothèses (H_1) et (H_2) . Ce résultat repose de façon essentielle sur une estimation L^2 , pour les coefficients de diffusion d_i constants, cette estimation garantit que sous les hypothèses (H_1) et (H_2) , les solutions de (1.6) satisfont les estimations a priori

$$\forall T > 0, \exists C = C\left(T, \|c(0)\|_{L^2(\Omega)^p, d_i}\right) > 0 : \|c\|_{L^2((0, T) \times \Omega)^p} \leq C$$

Où D est une matrice diagonale, par exemple :

$$C = (C_1, C_2, C_3)$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

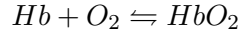
Alors, le système de réaction diffusion est de la forme,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a_{11} \Delta u + F(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = a_{22} \Delta v + G(u, v) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = a_{33} \Delta w + H(u, v) \end{cases}$$

1.7 Quelques exemples de réaction diffusion

1. Oxydation de l'hémoglobine :

L'hémoglobine Hb peut se lier au dioxygène O_2 pour former de HbO_2 selon la réaction



Cette réaction est importante en imagerie cérébrale car les propriétés magnétique de Hb et de HbO_2 sont différentes ; la consommation d'oxygène par les neurones génère de la désoxyhémoglobine détectable par IRM et donc ,indirectement ,indique la localisation de la l'activité neuronale.

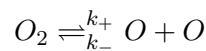
le système de réaction diffusion résultat, pour $N_1 = [Hb]$, $N_2 = [O_2]$, $N_3 = [HbO_2]$,est

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial t} - d_1 \Delta N_1 + k_+ N_1 N_2 = k_- N_3 \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} - d_2 \Delta N_2 + k_+ N_1 N_2 = k_- N_3 \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} - d_3 \Delta N_3 + k_- N_3 = k_+ N_1 N_2 \end{cases}$$

De ce système ,on peut déduire deux lois de conservation pour le nombre total de molécules Hb et O_2 .

2. Dissociation du dioxygène :

La réaction de dégradation standard du dioxygène en monoxygène est généralement associée à des modèles hyperbolique d'écoulements de fluide plutôt qu'à la diffusion .En effet ,il s'agit d'une réaction très énergétique se produisant à très haute température (pour les véhicules de rentrée dans l'atmosphère par exemple) et avec des vitesses de réaction dépendant de manière critique de cette température.Mais pour notre propos ici, on oublie ces limitations et on considère le taux de dissociation $k_+ > 0$ de $n_1 = [O_2]$ dans $n_2 = [O]$,et inversement sa recombinaison avec taux $k_- > 0$



Cela mène à

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial t} - d_{N_1} \Delta N_1 + k_+ N_1 = k_- (N_2)^2 \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} - d_{N_2} \Delta N_2 + 2k_- (N_2)^2 = 2k_+ N_1 \end{cases}$$

avec une donnée initiale $N_1^0 \geq 0, N_2^0 \geq 0$. Selon la loi d'action de masse, le terme, $(N_2)^2$ apparait car la rencontre de deux atomes de monoxygène est nécessaire à la réaction .

Chapitre 2

Instabilité de Turing

2.1 Conditions de Turing pour formule les motifs

2.1.1 Condition de nos dimensionnalisation

Soit un système de réaction diffusion à deux espèces

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = D_A \Delta A + F(A, B) \\ \frac{\partial B}{\partial t} = D_B \Delta B + G(A, B) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où les fonctions de réactions F et G sont définies par

$$\begin{cases} F(A, B) = k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B \\ G(A, B) = k_4 - k_3 A^2 B \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Où les $D_A, D_B, k_i, i = 1, 4$ sont strictement positives.

Le système(2.1.2) est appelé la cinétique de Schnakenberg.

On introduit L comme une échelle de longueur et on pose

$$u = A \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v = B \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t^* = \frac{D_A t}{L^2}, \quad x^* = \frac{x}{L} \quad (2.1.3)$$

$$d = \frac{D_B}{D_A}, \quad a = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{k_4}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{L^2 k_2}{D_A}. \quad (2.1.4)$$

Prenant la dérivée partielle de A par rapport à t^* et x^* , donne

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^*} = \frac{L^2}{D_A} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{\partial A}{\partial x^*} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} = L \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.1.5)$$

Utilisons l'équation (2.1.5) pour calculer le laplacien de A par rapport à x^*

$$\Delta(x)A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{L^2} \Delta(x^*)A \quad (2.1.6)$$

Par les relations données de (2.1.3) ; on obtient

$$A = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \quad \text{donc} \quad \frac{\partial A}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*} \quad (2.1.7)$$

La première équation de (2.1.1) devient sous la forme

$$\frac{D_A}{L^2} \frac{\partial A}{\partial t^*} = \frac{D_A}{L^2} \Delta(x^*) A + F(A, B) \quad (2.1.8)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} = \Delta(x^*) A + \frac{L^2}{D_A} F(A, B) \quad (2.1.9)$$

Par suite de relation (2.1.7) on trouve

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} (k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B) \quad (2.1.10)$$

Alors que la remplacement de A et B par u et v et par l'utilisation de (2.1.3) on obtient

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[k_1 - k_2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u + k_3 \left[\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right] \quad (2.1.11)$$

En suite, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[k_1 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} u + k_3 \left(\frac{k_2}{k_3}\right) \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} u^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right]. \quad (2.1.12)$$

Il vient après un calcul simple

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} \left[k_1 \frac{k_2}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_2 u + k_2 u^2 v \right] \quad (2.1.13)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} k_2 \left[\frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - u + u^2 v \right] \quad (2.1.14)$$

On obtient la suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \frac{L^2}{D_A} k_2 [a - u + u^2 v] \quad (2.1.15)$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \gamma [a - u + u^2 v] \quad (2.1.16)$$

Enfin, nous obtenons la première équation non dimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t^*} = \Delta(x^*) u + \gamma f(u, v). \quad (2.1.17)$$

Prenant la dérivée partielle de B par rapport à t^* et x^* ; donne

$$\frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^*} = \frac{L^2}{D_A} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial x^*} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} = L \frac{\partial B}{\partial x} \quad (2.1.18)$$

Utilisons l'équation (2.1.18) pour calculer le Laplacien de B par rapport à x^*

$$\Delta(x)B = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{L^2} \Delta(x^*) B \quad (2.1.19)$$

Par les relations données de (2.1.3), on obtient

$$B = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \quad \text{donc} \quad \frac{\partial B}{\partial t^*} = \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*} \quad (2.1.20)$$

La deuxième équation de (2.1.1) devient sous la forme

$$\frac{D_A}{L^2} \frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{D_B}{L^2} \Delta(x^*) B + G(A, B) \quad (2.1.21)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial B}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) B + \frac{L^2}{D_A} G(A, B). \quad (2.1.22)$$

Par suite on trouve

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} [k_4 - k_3 A^2 B] \quad (2.1.23)$$

remplacement de A et B par u et v et par l'utilisation de (2.1.3) on obtient

$$\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} \left[k_4 - k_3 \left[\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right] \quad (2.1.24)$$

Il vient après un calcul simple

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} \left[k_4 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - k_3 \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} u \right]^2 \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} v \right] \quad (2.1.25)$$

on obtient (2.1.25) sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{D_B}{D_A} \Delta(x^*) v + \frac{L^2}{D_A} k_2 \left[\frac{k_4}{k_2} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} - u^2 v \right] \quad (2.1.26)$$

alors

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = d\Delta(x^*) v + \gamma [b - u^2 v] \quad (2.1.27)$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial t^*} = d\Delta(x^*) v + \gamma g(u, v) \quad (2.1.28)$$

Le système (2.1.1) est non dimensionné et prendre la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \gamma f(u, v) \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + \gamma g(u, v) \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (2.1.29)$$

avec les conditions au limite suivante

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

2.1.2 Le système Linéarisé

Le système (2.1.29) sans diffusion est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma g(u, v) \end{cases} \quad (2.1.30)$$

Cherchons les points d'équilibres

$$f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0$$

Considérons une perturbation w de l'état d'équilibre

$$w(t) = \begin{pmatrix} u(t) - u_0, \\ v(t) - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.31)$$

Pour $\|w\|$ petit et par la linéarisation autour de l'équilibre (u_0, v_0) , la perturbation est régie localement par l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \gamma J w \quad (2.1.32)$$

où J est la matrice jacobienne évaluée en (u_0, v_0) , la matrice J est donner par

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

2.1.3 Stabilité Sans Diffusion

Ce système linéaire est stable lorsque toutes les valeurs propres de γJ ont $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Le polynôme caractéristique de γJ est

$$\lambda^2 - \gamma(f_u + g_v)\lambda + \gamma^2(f_u g_v - f_v g_u) = 0 \quad (2.1.33)$$

il s'ensuit que les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\gamma[(f_u + g_v) + \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\gamma[(f_u + g_v) - \sqrt{(f_u + g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u)}}{2} \end{cases} \quad (2.1.34)$$

Donc la stabilité linéaire ($\text{Re}(\lambda) < 0$) est garantie si

$$\text{Tr}(J) = f_u + g_v < 0, \quad (2.1.35)$$

$$\det(J) = f_u g_v - f_v g_u > 0. \quad (2.1.36)$$

Les équations (2.1.35) - (2.1.36) sont les deux conditions pour que la solution de (2.1.30) soit stable. Les conditions (2.1.35) et (2.1.36) joueront un rôle important dans l'établissement du moment où l'instabilité de Turing peut se former.

2.1.4 Instabilité par diffusion

Nous devons considérer maintenant un couplage entre la réaction et la diffusion, et avec la linéarisation autour de l'équilibre (u_0, v_0) , le système d'équations aux dérivées partielles (2.1.29) devient

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + \gamma J w, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (2.1.37)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, nous cherchons des solutions pour (2.1.37) sous la forme

$$w = \sum_k c_k e^{\lambda_k t} \psi_k$$

où ψ est la solution de l'équation de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta \psi_k + k^2 \psi_k = 0, & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta} = 0. & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1.38)$$

Ici, $k^2 > 0$ est une constante positive. En substituant une fonction de test $c_k e^{\lambda_k t} \psi_k$ dans (2.1.37), on obtient

$$\lambda \psi_k c_k e^{\lambda t} = k^2 D \psi_k c_k e^{\lambda t} + \gamma J \psi_k c_k e^{\lambda t}$$

ce qui réduit à l'équation

$$\lambda \psi_k = D k^2 \psi_k + \gamma J \psi_k$$

par une écriture sous forme matricielle on obtient

$$[\lambda I - \gamma J + D k^2] \psi_k = 0, \quad \text{tel que } \psi_k \neq 0 \quad (2.1.39)$$

2.1.5 Les motifs de Turing dans un modèle à deux espèces

Soit $N = \lambda I - \gamma J + D k^2$. Ce système aura des solutions non triviales si $\det(N) = 0$, donc on a

$$\det(\lambda I - \gamma J + D k^2) = 0$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \lambda - \gamma f_u + k^2 & -\gamma f_v \\ -\gamma g_u & \lambda - \gamma g_v + dk^2 \end{vmatrix} = 0,$$

un calcul simple donne un polynôme d'ordre deux en λ

$$\begin{aligned} \lambda^2 + [(d+1)k^2 - \gamma(f_u + g_v)]\lambda + H(k^2) &= 0, \\ H(k^2) &= dk^4 - \gamma k^2(df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J). \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

L'équation (2.1.40) prend la forme

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

$$\alpha = (d+1)k^2 - \gamma(f_u + g_v), \quad (2.1.41)$$

$$\beta = dk^4 - \gamma k^2(df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J), \quad (2.1.42)$$

$$k^2(d+1) - \gamma(f_u + g_v) > 0.$$

Donc le seul moyen d'obtenir $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ est lorsque $H(k^2) < 0$ pour un certain k .

Nous pouvons vérifier cette condition à partir des solutions du polynôme (2.1.40).

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)}{2} - \frac{\sqrt{[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)]^2 - 4H(k^2)}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)}{2} + \frac{\sqrt{[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)]^2 - 4H(k^2)}}{2} \end{cases}$$

Parce que nous avons besoin de $\det(J) > 0$ à partir de la condition (2.1.36), nous pouvons voir que $H(k^2) < 0$ ne se produit que lorsque

$$df_u + g_v > 0 \quad (2.1.43)$$

L'inégalité (2.1.43) est une condition nécessaire mais insuffisante pour $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

Pour obtenir $H(k^2) < 0$ pour certains $k \neq 0$, nous exigeons que le minimum $H_{\min} < 0$. A partir de l'équation (2.1.42), la dérivée par rapport à k^2 est

$$2dk_m^2 - \gamma(df_u + g_v) = 0. \quad (2.1.44)$$

Ainsi on obtient

$$k_m^2 = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d} \quad (2.1.45)$$

et pour que cette quantité soit positive, il faut que $df_u + g_v > 0$.

Qui donne le minimum $H(k_m^2)$ comme suit

$$H_m = H(k_m^2) = dk_m^4 - \gamma k_m^2 (df_u + g_v) + \gamma^2 \det(J)$$

Pour que $H(k^2)$ soit strictement négatif pour un k différent de zéro, le minimum H_m doit être strictement négatif.

De l'équation (2.1.45), on obtient

$$H_m = H(k_m^2) = \gamma^2 \left[\det(J) - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} \right]$$

Ainsi, la condition que $H(k^2) < 0$ pour un $k^2 \neq 0$ est

$$\det(J) < \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}$$

pour $k \neq 0$, et à la bifurcation, quand $H(k_m^2) = H_m = 0$

$$\det(J) = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}$$

2.1.6 Le coefficient critique

A la bifurcation, lorsque $H(k_m^2) = H_m = 0$, nous avons besoin de

$$\begin{aligned} \det(J) &= \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}, \\ \det(J) &= f_u g_v - f_v g_u = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}. \end{aligned}$$

On obtient après un arrangement

$$d_c^2 f_u^2 + 2(2f_v g_u - f_u g_v) d_c + g_v^2 = 0$$

cela définit un coefficient de diffusion critique d_c comme racine appropriée.

Par conséquent, le nombre critique d'onde k_c est donné par

$$k_c^2 = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d_c} = \gamma \frac{\sqrt{\det(J)}}{\sqrt{d_c}} = \gamma \frac{\sqrt{f_u g_v - f_v g_u}}{\sqrt{d_c}}.$$

2.1.7 Les conditions de Turing pour la formation de motifs

Lorsque $H(k^2) < 0$, l'équation (2.1.40) a une solution $\lambda > 0$ pour la même gamme de nombres d'onde qui font que $H < 0$. De l'équation (2.1.40) avec $d > d_c$, la gamme des nombres d'onde instables est $k_1^2 < k^2 < k_2^2$, qui est obtenu à partir du quadratique

$$k_i^2 = \gamma \frac{df_u + g_v \pm \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}, \quad i = 1, 2$$

Ainsi,

$$k_1^2 < k^2 < k_2^2 \quad (2.1.46)$$

tel que

$$k_1^2 = \frac{\gamma}{2d} \left[df_u + g_v - \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)} \right], \quad (2.1.47)$$

$$k_2^2 = \frac{\gamma}{2d} \left[df_u + g_v + \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)} \right]. \quad (2.1.48)$$

L'expression $\lambda = \lambda(k^2)$ est appelée relation de dispersion. Dans un intervalle instable, $\text{Re } \lambda(k^2) > 0$ a un maximum pour k_m avec $d > d_c$. Cela implique qu'il existe un mode de croissance plus rapide dans la somme de w . Ainsi, nous avons

$$w \approx \sum_{k_1}^{k_2} c_k e^{\lambda(k)t} \psi_k \quad \text{pour les grands } t \quad (2.1.49)$$

Pour récapituler nos résultats pour l'instabilité induite par la diffusion d'un système de réaction diffusion de deux espèces.

Théorème

Considérons le système de réaction diffusion (2.1.29) avec le point d'équilibre (u_0, v_0) . Les conditions pour que les motifs de Turing se forment sont

$$f_u + g_v < 0, \quad (2.1.50)$$

$$f_u g_v - f_v g_u > 0, \quad (2.1.51)$$

$$df_u + g_v > 0, \quad (2.1.52)$$

$$\frac{(df_u + g_v)^2}{4d} > f_u g_v - f_v g_u. \quad (2.1.53)$$

Ou toutes les dérivées partielles sont évaluées à (u_0, v_0) : Si ces conditions sont remplies, il existe alors une gamme de motifs dépendant de γ ; les nombres d'ondes linéairement instables donnés dans (2.1.46)-(2.1.48). Ces motifs spatiaux sont les fonctions propres ψ_k avec les nombres d'onde k_1 et k_2 .

Notez que cela découle de (2.1.50) et (2.1.52) où $d \neq 1$; et f_u et g_v doivent avoir des signes opposés. Par exemple, si $f_u > 0$ et $g_v < 0$, $d > 1$, cela signifie que l'inhibiteur du système (2.1.29) doit diffuser plus rapidement que l'activateur.

2.2 Quelques modèles de systèmes de réaction diffusion

2.2.1 Système de Schnakenberg

Le modèle de Schnakenberg est connu comme l'un des modèles de diffusion de réaction les plus simples et les plus utilisés en morphogènes. Cela explique le comportement de l'activateur chimique en présence d'inhibiteur chimique. Ces équations de réaction-diffusion représentent une approche théorique d'une interaction chimique générique entre deux espèces.

Supposons que u soit l'activateur et v soit l'inhibiteur ou la substance. Le terme de réaction pour la substance activatrice est décrit comme une production constante (A), une consommation linéaire et la production de l'activateur en présence de l'inhibiteur (une réaction cinétique non linéaire). Le terme de réaction pour la substance inhibitrice est décrit comme une constante production (B) et une réaction cinétique non linéaire pour la consommation de l'activateur en présence de l'inhibiteur.

$$\begin{cases} f(u, v) &= D_u \Delta u + a - u + u^2 v \\ g(u, v) &= D_v \Delta v + b - u^2 v. \end{cases}$$

2.2.2 Système de Gray-Scott

Le système Gray-Scott est un système de réaction diffusion. Cela signifie qu'il modélise un processus qui consiste en une réaction et une diffusion. Dans le cas du modèle de Gray-Scott, cette réaction est une réaction chimique entre deux substances U et V , toutes deux diffusant dans le temps. Au cours de la réaction, U s'épuise, tandis que V est produit. Le système est caractérisé par deux paramètres : F est la vitesse à laquelle est réapprovisionné, et K contrôle la vitesse à laquelle V est retiré du système. La variation de ces paramètres conduit à un large éventail de modèles intéressants, dont certains semblent assez familiers.

Les deux substances diffusent dans le temps aux taux de diffusion D_u et D_v : Le système Gray-Scott est défini par deux équations qui décrivent le comportement de deux substances en réaction

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \Delta u - uv^2 + F(1 - u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \Delta v + uv^2 + (F + k)v \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Les variables dans ces équations u et v sont les concentrations des deux substances réactives U et V .

Sur le côté gauche de chaque équation se trouve la dérivée temporelle de l'une de ces concentrations, décrivant la vitesse à laquelle elle change. Les membres de droite des équations contiennent tous deux trois termes distincts. Le premier décrit la réaction entre les deux substances. Comme un U

et deux V réagissent, le terme correspondant inclut u à la puissance un et v à la puissance deux : uv^2 . Comme U est consommé par la réaction, le terme a un signe négatif dans la première équation. Dans la deuxième équation, il a un signe positif, comme cela se produit dans la réaction.

2.2.3 Le système de Brusselator

Prigogine et Lefever et Nicolis ont proposé un exemple maintenant appelé le Brusselator. C'est certainement le système le plus simple présentant des motifs de Turing

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_u \Delta u + A - (B + 1)u + u^2 v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_v \Delta v + Bu - u^2 v \end{cases}$$

Nous vérifions ci dessous qu'il existe un seul état stationnaire positif qui présente les conditions linéaires de l'instabilité de Turing. De plus la solution ne peut pas s'annuler, grâce au terme $A > 0$. Mais nous n'avons pas connaissance d'une preuve que les solutions restent bornées pour t large.

2.3 Systèmes activateurs inhibiteurs

Alan Turing dans Les Fondements Chimiques de la Morphogenèse en 1952 a expliqué comment les modèles émergent dans les formes vivantes. Il a proposé un mécanisme morphogénétique qui consiste en deux processus simultanés : les réactions cinétiques et la diffusion, qui affectent la concentration de substances spécifiques appelées morphogènes. Il a déclaré que le motif provient d'un état d'équilibre et constant qui est stable aux perturbations temporelles, mais devient instable en raison des perturbations spatiales. Turing a également proposé que cette instabilité soit due à la diffusion. Par conséquent, sa théorie peut être donnée par les conditions suivantes :

1. En l'absence de diffusion, c'est-à-dire lorsque le système n'est donné que par la cinétique chimique, l'état doit être stable aux petites perturbations. Nous appelons cet état de base d'équilibre et nous le notons ub .
2. Lorsque la diffusion a lieu, certains modes oscillatoires du système doivent être instables à de petites perturbations spatiales mais ils sont indépendants du temps. L'instabilité causée par la diffusion est appelée instabilité due à la diffusion. Nous avons une autre condition dans le cas de deux morphogènes :
3. Le coefficient de diffusion des deux substances doit être sensiblement différent. Nous constatons que ces conditions sont heuristiques. Par conséquent, notre objectif dans ce chapitre est

d'obtenir des conditions mathématiques équivalentes à celles que nous avons déjà données, c'est-à-dire des conditions que nos équations de réaction-diffusion doivent satisfaire pour que la formation de motifs puisse se produire. Cependant, il est compliqué de traiter directement ce type de systèmes et il faudra donc faire une analyse linéaire préalable. L'instabilité qui conduit à la formation de motifs est également appelée instabilité de Turing. Nous verrons dans la dernière section que ce type d'instabilité dans le cas de deux morphogènes conduit à un système activateur-inhibiteur, c'est-à-dire qu'un morphogène va induire la production de substance et, l'autre, la perte.

Chapitre 3

Application à la biologie

3.1 Formation de motifs

La formation de motif est un phénomène fascinant qui peut aider à expliquer comment les motifs se forment dans la nature. Bien que le modèle de Turing soit utile pour comprendre ce processus, il présente également des limites. Cependant, avec des recherches supplémentaires, nous pourrions mieux comprendre la façon dont les réactions-diffusions créent des motifs complexes et comment nous pouvons utiliser ce phénomène dans divers domaines.

En biologie, il peut être utilisé pour étudier la formation de motifs chez les organismes vivants, tels que les taches sur la peau des animaux. En physique, il peut être utilisé pour modéliser la formation de motifs dans les systèmes non-linéaires.

3.1.1 Motifs de schnakenberg

Rappelons que le système de schnakenberg est de la forme

$$\begin{cases} f(u, v) = a - u + u^2v, \\ g(u, v) = b - u^2v. \end{cases}$$

Dans le cas de la cinétique de Schnakenberg, il existe trois paramètres (a, b, c) strictement positifs.

3.1.1.1 Les points d'équilibre

Les points d'équilibre sont obtenus par $f(u, v) = g(u, v) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} a - u + u^2v &= 0, \\ b - u^2v &= 0. \end{aligned}$$

cela implique que le point d'équilibre est

$$(u_0, v_0) = \left(a + b, \frac{b}{(a+b)^2} \right)$$

la jacobienne du système au point d'équilibre (u_0, v_0) donne

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} -1 + 2uv & u^2 \\ -2uv & -u^2 \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

par suite

$$J = \begin{pmatrix} \frac{b-a}{b+a} & (a+b)^2 \\ \frac{-2b}{b+a} & -(a+b)^2 \end{pmatrix}$$

3.1.1.2 Instabilité induite par la diffusion pour le système de Schnakenberg

et en utilisant la condition $f_u g_v - f_v g_u < 0$, on obtient

$$\text{Tr}(J) = \frac{b-a}{b+a} - (a+b)^2 < 0,$$

par conséquent

$$0 < b - a < (a+b)^3.$$

De même, la condition $f_u g_v - f_v g_u > 0$, donne

$$\det J = \left[\left(\frac{2b}{b+a} \right) (a+b)^2 \right] - \left[\left(\frac{b-a}{b+a} \right) (a+b)^2 \right].$$

D'où

$$\begin{aligned} \det J &= b^2 + a^2 + 2ab, \\ &= (a+b)^2 > 0. \end{aligned}$$

la condition dit que ,

$$df_u + g_v > 0,$$

ce qui donne par conséquent

$$d(b-a) > (b+a)^3.$$

La condition

$$\frac{(df_u + g_v)^2}{4d} > f_u g_v - f_v g_u \Leftrightarrow (df_u + g_v)^2 > 4d(f_u g_v - f_v g_u)$$

Ainsi on a

$$[d(b-a) - (b+a)^3]^2 > 4d(b+a)^4.$$

Par résumé suivant, nous obtenons les conditions pour la cinétique de Schnakenberg dans lesquelles on a une formation motifs de Turing.

$$0 < b-a < (a+b)^3, \quad (3.1.1)$$

$$(a+b)^2 > 0, \quad (3.1.2)$$

$$d(b-a) > (b+a)^3, \quad (3.1.3)$$

$$[d(b-a) - (b+a)^3]^2 > 4d(b+a)^4. \quad (3.1.4)$$

Ces inégalités définissent un domaine dans l'espace des paramètres (a, b, c) , appelé espace de formation de motifs ou espace de Turing pour la cinétique de Schnakenberg.

La solution d'équilibre homogène de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + a - u + u^2 v, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + b - u^2 v. \quad (3.1.6)$$

deviendra instable sous la moindre perturbation spatiale si les conditions (3.1.1)-(3.1.4) sont satisfaites. Nous considérons le problème propre de Helmholtz noté(*) :

$$\begin{cases} \Delta \psi_k + k^2 = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

(ψ) est la solution de cette équation, et choisissons le domaine planaire $\Omega = (0, p) \times (0, q)$ pour les constantes positives p, q . Par la séparation des variables, la solution générale est

$$\Omega(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} A_n \cos\left[\frac{n\pi x}{p}\right] B_m \cos\left[\frac{m\pi y}{q}\right] \quad (3.1.7)$$

Considérons l'équation (3.1.1.2) avec l'équation $\omega = \sum_k c_k e^{\lambda_k t} \psi_k$ et l'équation de Helmholtz(*) Maintenant, la solution instable à motifs spatiaux est donnée par

$$\omega(t, x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} e^{\lambda(k^2)t} A_n \cos\left[\frac{n\pi x}{p}\right] B_m \cos\left[\frac{m\pi y}{q}\right]$$

ou

$$k^2 = \pi^2 \left[\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} \right], n, m \in \mathbb{Z}$$

la bande de nombres d'ondes de

$$k_1^2 < k^2 < k_2^2 \quad (3.1.8)$$

et

$$k_2^2 = \frac{\gamma}{2d} [df_u + g_u + \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}] \quad (3.1.9)$$

,est donnée par

$$\gamma\Gamma_1(a, b, d) = k_1^2 < k^2 < k_2^2 = \gamma\Gamma_2(a, b, d) \quad (3.1.10)$$

On utilisons les inégalités (3.1.1.2) et (3.1.1.2),on obtient

$$\Gamma_1(a, b, d) = \frac{df_u + g_u - \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}$$

D'après la cinétique de Schnakenberg ,on trouve

$$\Gamma_1 = \frac{[d(b-a) - (b+a)^3] - \sqrt{[d(b-a) - (b+a)^3]^2 - 4d \det(J)}}{2d(a+b)}. \quad (3.1.11)$$

et pour

$$\Gamma_2(a, b, d) = \frac{df_u + g_v + \sqrt{(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u)}}{2d}$$

Ce qui donne par similaire

$$\Gamma_2(a, b, d) = \frac{[d(b-a) - (b+a)^3] + \sqrt{[d(b-a) - (b+a)^3]^2 - 4d \det(J)}}{2d(a+b)}. \quad (3.1.12)$$

les paramètre dans (3.1.1.2)en termes de longueur d'onde $\omega = \frac{2\pi}{k}$,les longueurs d'onde limitées par des modes avec une borne inférieure et supérieure ω_1 et ω_2 ,ou

$$\omega_1^2 = \left[\frac{2\pi}{k_2}\right]^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma\Gamma_2(a, b, d)} < \omega^2 < \omega_2^2 = \frac{4d}{\gamma\Gamma_2(a, b, d)} \quad (3.1.13)$$

Les paramètres de (2.1.37)expliquent le type de rôle que joue dans le système de réaction-diffusion(2.1.1)

3.1.2 Motifs de Poisson zèbre

Hongyong Zhao [6], a étudié la formation de motifs pour un type de poisson, l'auteur a utilisé le système de Schnackenberg comme modèle mathématique pour cette étude. avec des techniques et simulation numériques, quelques catégories de motifs de Turing sont obtenues, des taches, des bandes et des hexagonaux. En plus de l'effet de la diffusion croisée. Les figures suivantes montrent certains types de ces motifs.

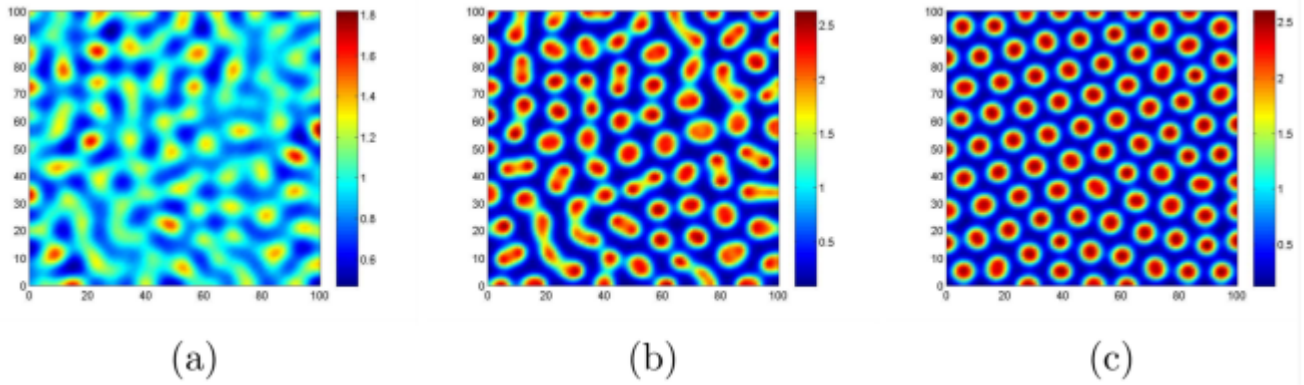


Figure 3.1 – Motifs sous forme des taches dans différents instants.

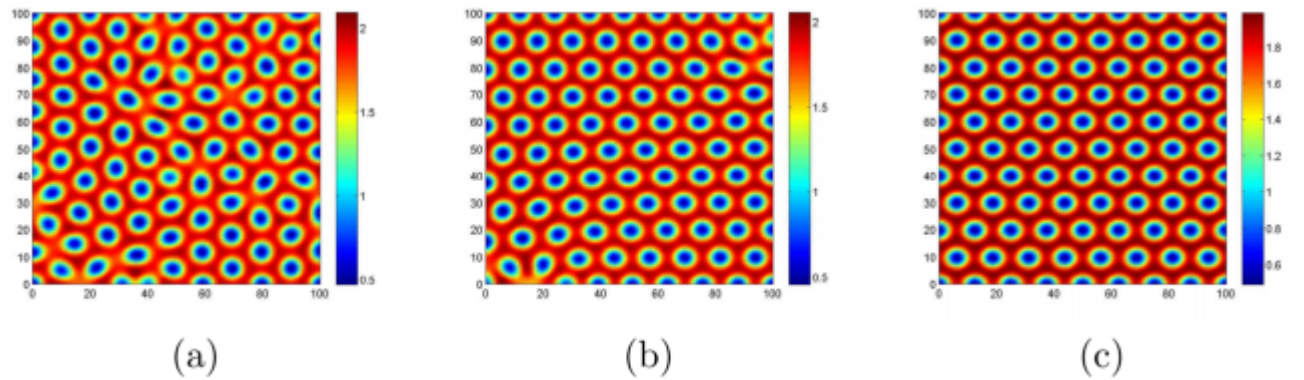


Figure 3.2 – Motifs sous forme des hexagones dans différents instants.

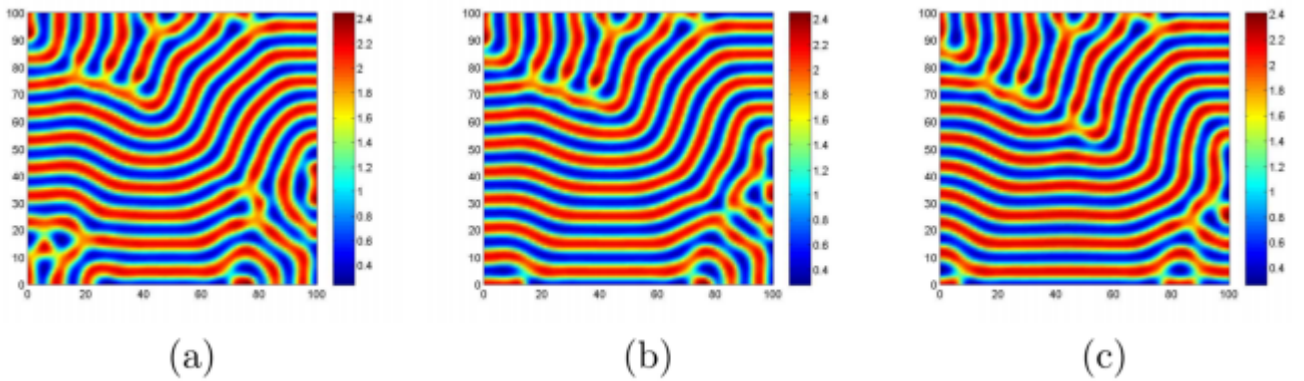


Figure 3.3 – Motifs sous forme des bandes dans différents instants.



Figure 3.4. Poissons zèbres avec des motifs de taches et de rayures dans la nature

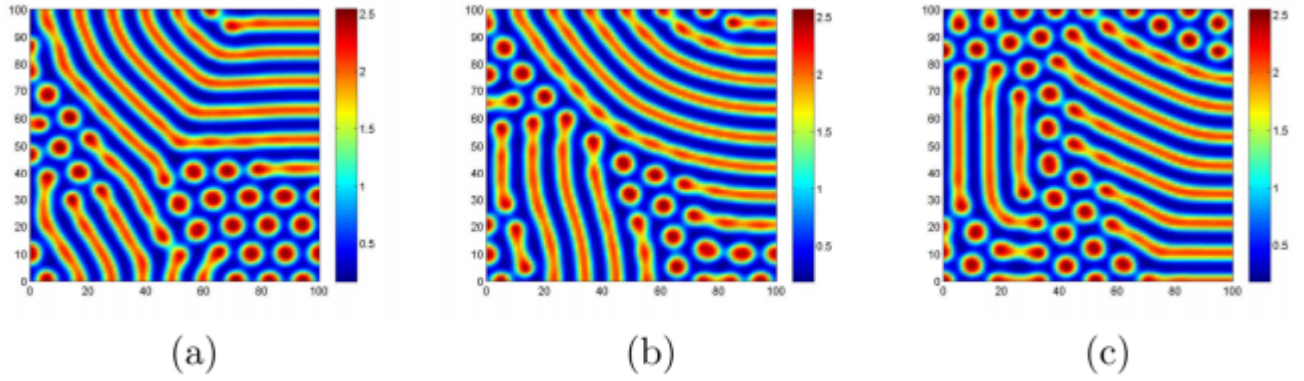


Figure 3.5—Motifs sous forme des taches et des bandes dans différents instants

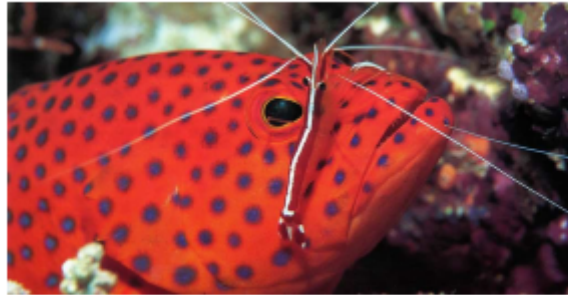


Figure 3.6—Poissons zèbres avec des motifs de taches dans la nature

3.1.3 Les motifs d'un système Proie-Prédateur

En particulier, l'instabilité due à la diffusion, communément appelée instabilité de Turing, conduit à l'apparition des soi-disant modèles de Turing. L'étude de ces modèles dans les modèles spatiaux de population a récemment connu une activité et un intérêt croissants. Motivés par toutes ces considérations, nous incluons à la fois l'auto diffusion et la diffusion croisée dans

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1+\eta\alpha y} - d_1x - d_2x^2 - \frac{\beta xy}{a+bax+x^2} =: f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{c\beta xy}{a+bax+x^2} - my =: g(x, y) \end{cases} \quad (3.1.14)$$

et étudions le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{rx}{1+\eta\alpha y} - d_1x - d_2x^2 - \frac{\beta xy}{a+bax+x^2} + \gamma_{11}\Delta x + \gamma_{12}\Delta y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{c\beta xy}{a+bax+x^2} - my + \gamma_{21}\Delta x + \gamma_{22}\Delta y \\ x(\mathbf{x}, 0) = x_0(\mathbf{x}), \quad y(\mathbf{x}, 0) = y_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \sum_{i,j=1}^2 \gamma_{ij}\xi_i\xi_j \geq d|\xi|^2, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Plus précisément, nous nous intéressons à l'étude de l'impact de la diffusion croisée sur le modèle (3.1.15)

Dans le premier exemple, nous montrons à la fois la solution x et y , pour apprécier la correspondance

des modèles dans les deux fonctions : en raison du choix de coefficients de diffusion croisée positifs, nous observons toujours que des zones "chaudes", ou à haute densité pour une variable correspondent à des zones " froides" ou de faible densité pour l'autre variable au même endroit. Parce que ce comportement est commun à tous les exemples considérés, dans certains des autres cas, nous avons décidé de montrer l'évolution temporelle d'une seule des solutions, pour illustrer les différents modèles sans redondances dans la représentation.

Voir le tableau :

Nom	Description	Valeur
r	Taux de natalité des proies	
η	Niveau de peur	0.5
α	Sensibilité du prédateur à la taxis	
d_1	Taux de mortalité naturelle des proies	0.1
d_2	Mortalité due à la compétition intra-proie	0.2
β	Taux de prédation	0.5
a	Constante de demi-saturation	0.1
b	Limite de tolérance à la prédation	0.5
c	Efficacité de conversion de la biomasse	1
m	Taux de mortalité naturelle du prédateur	0.25

Tableau 1. Paramètres du modèle (1) et leurs valeurs dans les simulations numériques.

Exemple 1. Dans les paramètres du tableau 2, on considère d'abord l'effet des petits taux de diffusion : on fixe $a_{11} = 0,01$, $a_{22} = 0,1$ et $a_{12} = 0,01$. Alors c'est $\gamma_{21}^{cr} = 0,01132$ et l'analyse faiblement non linéaire conduit à $b_1, b_2 > 0$. Nous fixons $a_{21} = 0,015$ pour que les deux conditions de stabilité des taches et des rayures soient satisfaites et exécutons la simulation sur le carré $[0, 100][0, 100]$ jusqu'à ce que la solution se stabilise. [La figure.1] montre le motif mixte taches/rayures prédit par l'analyse théorique sur les deux solutions x et y . Ici, et dans toutes les figures suivantes, les zones à haute densité sont représentées en jaune et celles à faible densité en bleu. Le temps de simulation T est reporté dans la légende de la figure. Dans le même paramétrage, avec une légère modification d'un seul coefficient de diffusion ($a_{11} = 0,05$) la valeur critique devient $\gamma_{21}^{cr} = 0,02437$ et à nouveau les conditions de stabilité des rayures et des taches sont remplies. Une fois choisi $a_{21} = 0,032$, [la figure 8] montre comment le motif des taches dans la solution x évolue finalement vers un motif mixte.

	Examples 1 and 2	Example 3	Example 4
r	0.18	0.3	0.35
α	2.5	1.0	2.0
a	0.1	0.5	0.4
m	0.25	0.25	0.2
x^*	0.1734	0.5	0.347
y^*	0.0273	0.156	0.209

Tableau 2. Valeurs des paramètres adoptées dans les exemples rapportés. Pour les autres paramètres, les valeurs fixes restent celles rapportées dans le Tableau 1. La valeur d'équilibre (x^*, y^*) est également indiquée.

Remarque :

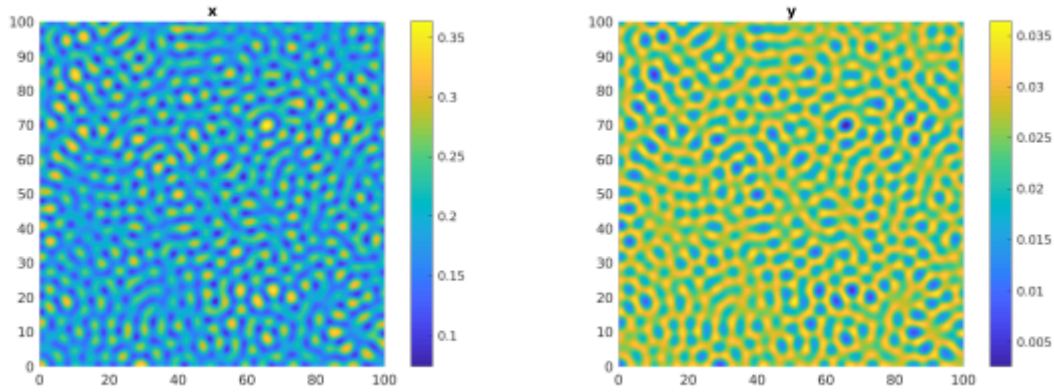


FIGURE.1/Graphiques des solutions du système (2)-(5) dans la configuration de paramètres de l'exemple 1 pour $T = 1500$. Ici, $\gamma_{21} = 0.015$.

Panneau de gauche : solution x /, panneau de droite : solution y .

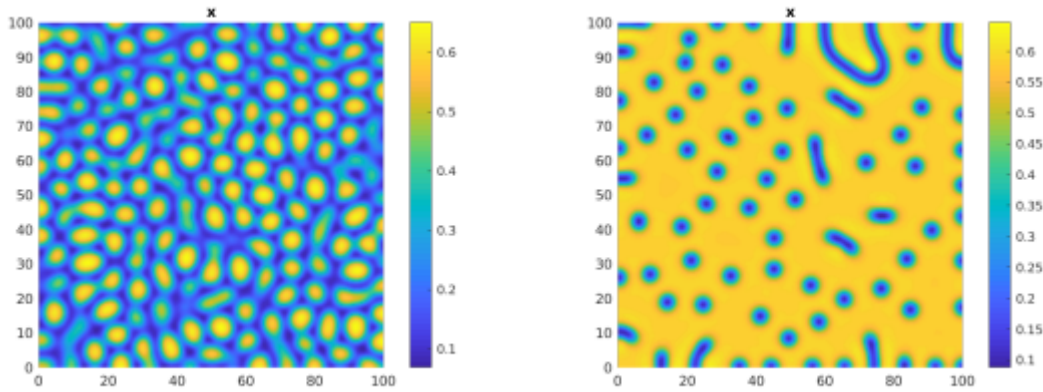


FIGURE.2/Graphiques de la solution x du système (2)-(5) dans la configuration de paramètres de l'exemple 1 pour $T = 1500$ (panneau de gauche) et $T = 3000$ (panneau de droite). Ici, $\gamma_{21} = 0.032$

Exemple 2. Pour étudier l'effet de taux de diffusion plus élevés, nous considérons $a_{11} = 1$, $a_{22} = 10$ et $a_{12} = 0,1$. Alors c'est $\gamma_{21}^{cr} = 1.1628$ et l'analyse faiblement non linéaire conduit à $b_1, b_2 > 0$. Nous fixons $a_{21} = 1.3$ pour remplir les conditions de stabilité des rayures et exécutons les simulations, obtenant des motifs qui émergent sous forme de points irréguliers puis se stabilisent dans les grandes bandes représentées sur [la figure.3] pour le temps $T = 5000$. Il convient de noter

comment les valeurs plus élevées de la diffusion entraînent des motifs plus grands. [La figure.4] suivante, se référant à des simulations réalisées pour $a_{21} = 0,8$ jusqu'à $T = 3000$, montre comment le motif se stabilise dans les grandes taches, avec la correspondance habituelle entre les zones de forte densité pour une espèce et les zones de faible densité pour l'autre. Montrons également dans ce paramétrage comment différents niveaux de peur h affectent à la fois la valeur d'équilibre de la population de prédateurs et le moment de l'apparition du modèle : [la figure.5] montre les résultats de simulation pour la population de prédateurs dans le même cadre que [la figure.3] lorsque les modèles se différencient par différents niveaux de peur : dans le panneau de gauche, c'est $h = 0,1$ et $T = 6000$, tandis que dans le panneau de droite, c'est $h = 1$ et $T = 4000$. Ces graphiques doivent être comparés avec le panneau inférieur droit de [la figure.3].

Il pourrait être clairement vu que des niveaux de peur plus élevés entraînent des valeurs plus faibles pour y et qu'une structure de modèle similaire est atteinte, même si à des moments de simulation différents. De plus, d'autres expériences (non présentées ici) avec des valeurs encore plus élevées de h , ont prouvé qu'un élargissement excessif de la gamme de modes instables peut conduire à l'instabilité de ces modèles.

Exemple 3. Dans les deux exemples suivants, nous étudions différents réglages de paramètres, conduisant à différents points d'équilibre, comme détaillé dans [le tableau.2] . En fixant $a_{11} = 0,25$, $a_{22} = 0,5$, $a_{12} = 0,1$, c'est $\gamma_{21}^{cr} = 0,231115$ et l'analyse faiblement non linéaire prédit que des rayures stables peuvent apparaître. Nous fixons $a_{21} = 0,35$ et exécutons la simulation. [La figure.12] montre l'évolution de la solution x d'un motif de taches transitoires (pour $T = 600$) au motif de rayures stables attendu pour $T = 2000$. Il convient de noter qu'en raison des diffusions choisies, dans ce réglage les rayures le motif est étroit et différemment orienté dans différentes zones du domaine spatial.

Exemple 4. Dans ce paramétrage, l'équilibre interne est $E(0,347, 0,209)$; pour le système spatial, une fois fixé $a_{11} = 0,2$, $a_{22} = 1$, $a_{12} = 0,1$, c'est $\gamma_{21}^{cr} = 0,2781$ et l'analyse faiblement non linéaire conduit à $b_1, b_2 > 0$. On fixe $a_{21} = 0,3$, très proche du seuil critique de sorte que seules les conditions de stabilité des points soient remplies et exécutez la simulation jusqu'à ce que la solution se stabilise à environ $T = 6000$. [La figure.7] montre les modèles de points prédits par l'analyse théorique pour les solutions x et y .

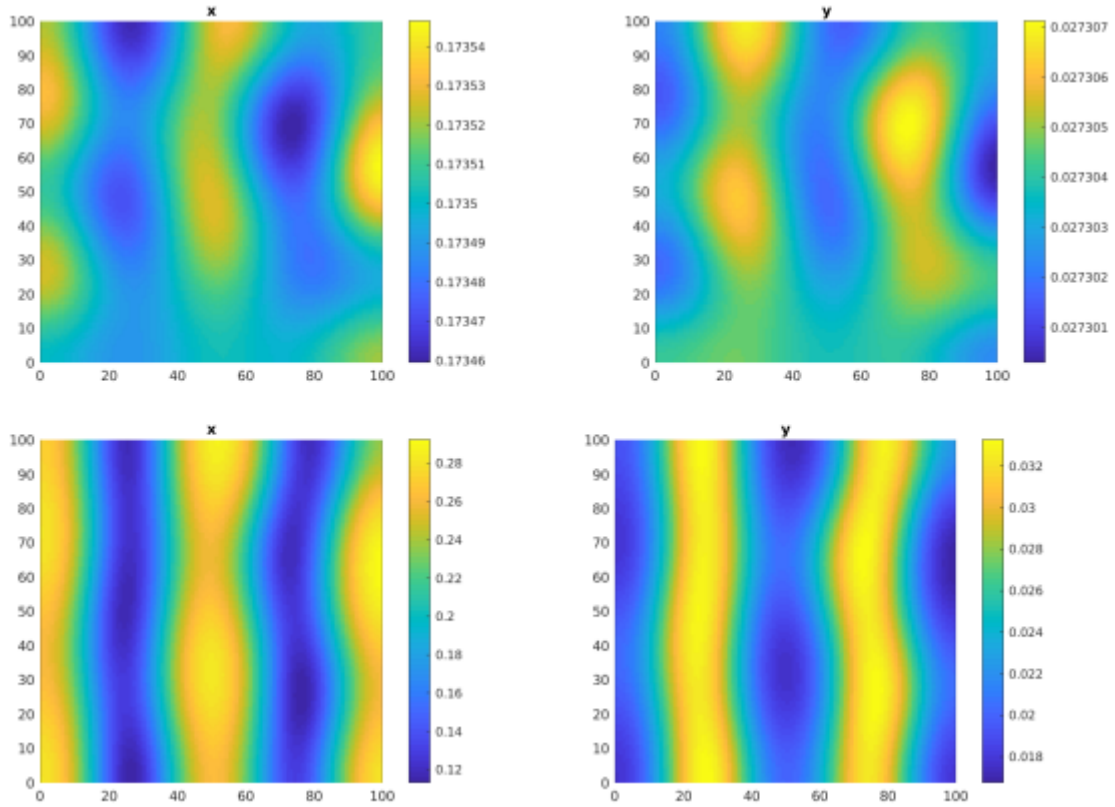


FIGURE.3/Graphiques des solutions x et y du système (2)-(5) dans la configuration de paramètres de l'exemple 2 pour $T = 2000$ (première rangée) /et $T = 5000$ (deuxième rangée). Ici, $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{22} = 10$, $\gamma_{12} = 0.1$ et $\gamma_{21} = 1.5$.

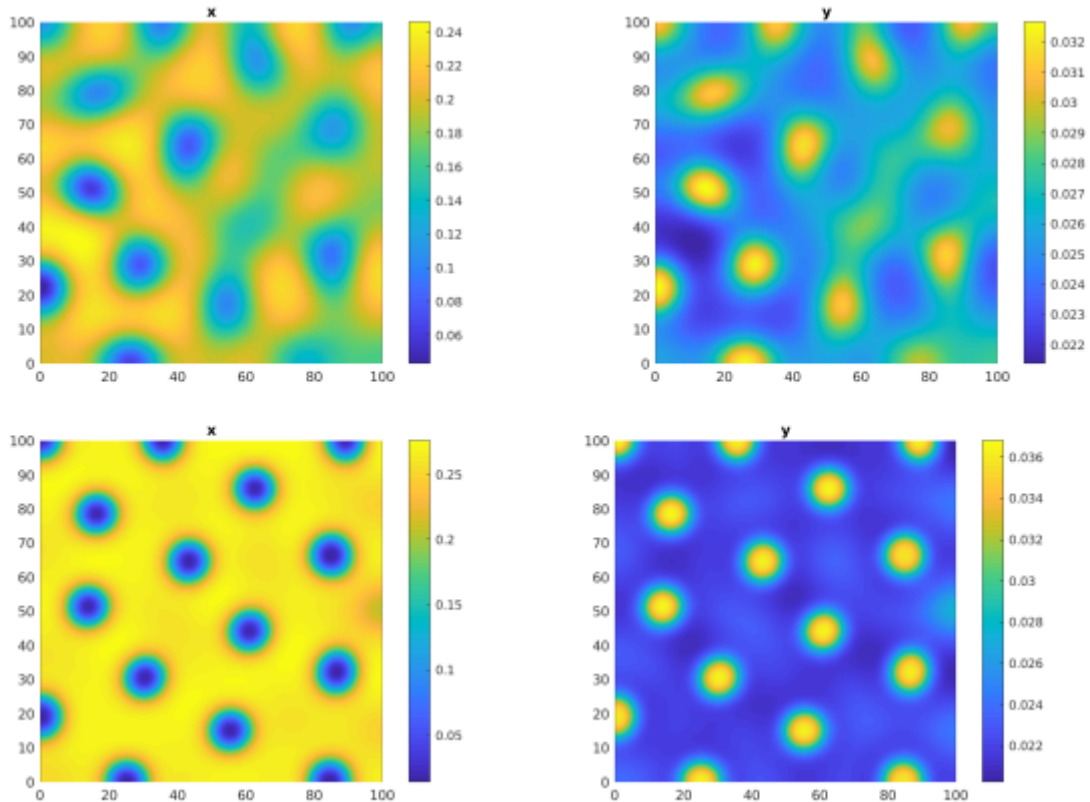


FIGURE.4/Graphiques des solutions x et y du système (2)-(5) dans la configuration de paramètres de l'exemple 2 pour $T = 1500$ (première rangée) et $T = 3000$ (deuxième rangée). Ici, $\gamma_{11} = 0.1$, $\gamma_{22} = 10$, $\gamma_{12} = 0.01$ et $\gamma_{21} = 0.8$.

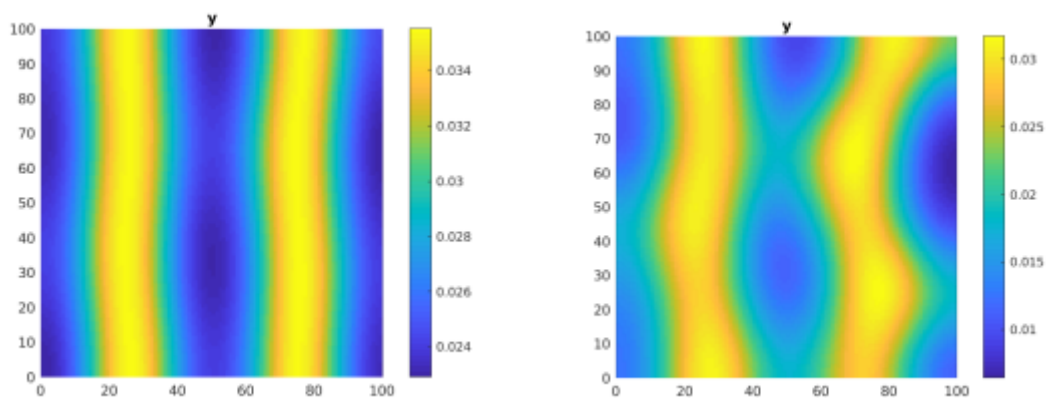


FIGURE.5/Graphiques de la solution y du système (2)-(5) dans la même configuration de paramètres de l'exemple 2, à l'exception de $\eta = 0.1, T = 6000$ (panneau de gauche) et $\eta = 1, T = 4000$ (panneau de droite). Ici, $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{22} = 10$, $\gamma_{12} = 0.1$ et $\gamma_{21} = 1.3$. Les valeurs d'équilibre correspondantes pour le système d'ODE (1) sont $(0.1734, 0.0305)$ et $(0.1374, 0.0243)$, respectivement.

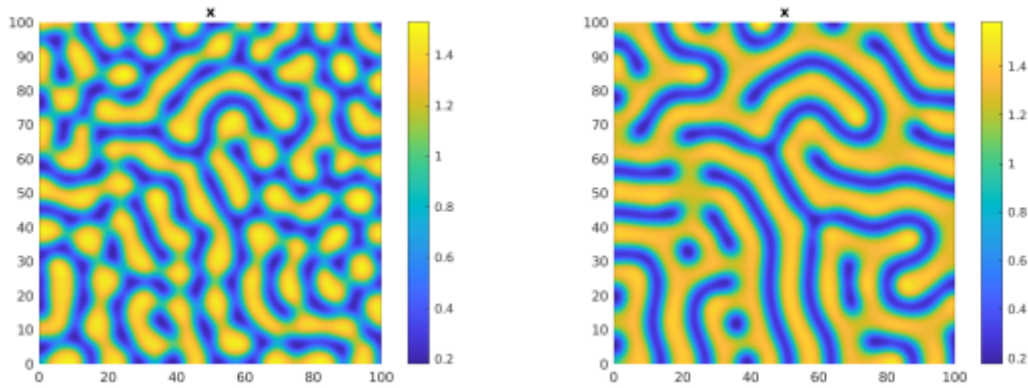


FIGURE.6/Graphiques de la solution x du système(2)-(5) dans la configuration de paramètres de l'exemple 3 pour $T = 500$ et $T = 1000$. Ici, $\gamma_{21} = 0.35$.

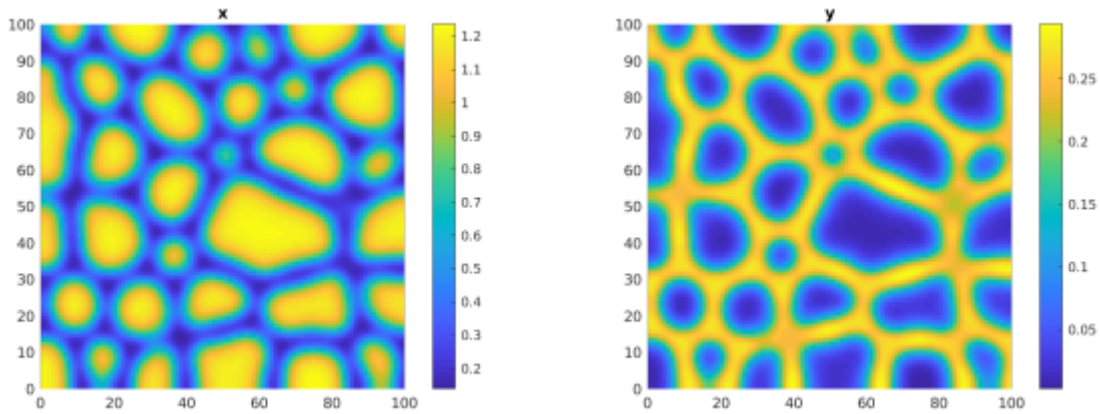


FIGURE.7/Graphiques des solutions x (panneau de gauche) et y (panneau de droite) du système (2)-(5) dans la configuration de paramètres de l'exemple 4 pour $T = 6000$. Ici, $\gamma_{21} = 0.3$.

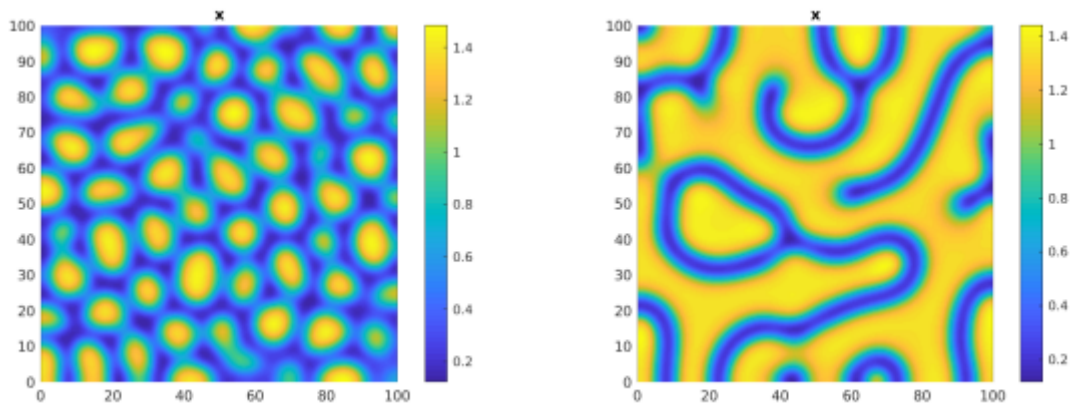


FIGURE.8 Graphiques de la solution x du système(2)-(5) dans la configuration de paramètres de l'exemple 4 pour $T = 1000$ et $T = 2000$. Les motifs pour la solution y (non montrée) sont complémentaires à ceux-ci. Ici, $\gamma_{21} = 0.35$

Remarque :

Cependant, lorsque nous choisissons une valeur plus élevée pour le paramètre de bifurcation $a_{21} = 0,35$, les motifs de taches perdent leur stabilité et évoluent rapidement en rayures, comme le montre [la figure.8] suivante.

Conclusions : Dans cet travail, nous avons exploré l'instabilité de Turing induite par la diffusion croisée dans un système prédateur-proie avec peur et défense de groupe. En fait, nous avons trouvé que l'auto diffusion seule n'induit pas d'instabilité de Turing ; au contraire, la diffusion croisée est le facteur essentiel provoquant l'apparition des modèles spatiaux. Les conditions d'instabilité induites par la diffusion croisée ont été obtenues par l'analyse de stabilité linéaire. Le coefficient de diffusion croisée a_{21} a été considéré comme le paramètre de bifurcation et le seuil de Turing $a_{21} = \gamma_{21}^{cr}$ a été évalué numériquement et analytiquement. En effectuant une analyse faiblement non linéaire, nous avons écrit les équations d'amplitude près de la valeur de bifurcation de Turing et nous avons obtenu les conditions pour que différentes formes de motif, telles que des hexagones (taches) et des rayures se produisent. Des simulations numériques ont confirmé ces résultats théoriques dans différents réglages de paramètres. Ils ont également exploré qualitativement la relation entre la valeur haute/basse des coefficients de diffusion et l'échelle des motifs obtenus. Enfin, les choix de modélisation spécifiques ont entraîné un effet modéré du niveau de peur sur l'instabilité spatiale de l'équilibre interne, affectant simplement le moment de l'apparition des modèles, en comparaison avec d'autres modèles considérés dans la littérature [7, 8], où la variation du niveau de peur a induit des changements spectaculaires dans la structure du modèle. Cette constatation, principalement due à la représentation adoptée de la défense de groupe, rend le modèle proposé plus approprié pour représenter différents scénarios où, comme discuté, la peur des proies affecte principalement l'évolution des prédateurs, en abaissant leur valeur d'équilibre. Les méthodes et les résultats de cette étude peuvent fournir des défis et des idées sur l'étude de la formation de modèles spatiaux dans d'autres systèmes de proies prédateurs et dans de nombreux autres domaines des mathématiques appliquées.[32]

3.2 Dynamique du motif d'un système immunitaire de réaction diffusion

3.2.1 Quelques notions médicaux du cancer

3.2.1.1 Définition du cancer

Le cancer est un groupe de maladies associées à une croissance anormale des cellules. Sans aucun contrôle, la maladie peut continuer à progresser, entraînant finalement une mort prématurée. Ils peuvent survenir n'importe où dans le corps et peuvent affecter des personnes de tous âges, couches socio-économiques et races. Le cancer est la première cause de morbidité et de mortalité dans le monde.

3.2.1.2 Le tumeur et son Types

Une tumeur est une masse ou une croissance. Certaines masses sont cancéreuses, mais beaucoup ne le sont pas,

1. Les masses qui ne sont pas cancéreuses sont dites bénignes.
2. Les masses cancéreuses sont appelées malignes.

Ce qui rend le cancer différent, c'est qu'il peut se propager à d'autres parties du corps, contrairement aux tumeurs bénignes. Les cellules cancéreuses peuvent se détacher du site d'origine du cancer. Ces cellules peuvent se déplacer vers d'autres parties du corps et se retrouver dans les ganglions lymphatiques ou d'autres organes du corps, causant des problèmes de fonctionnement normal.

3.2.1.3 Certains signes et symptômes généraux du cancer

Voici quelques-uns des signes et symptômes les plus courants qui peuvent être causés par le cancer. Cependant, chacun de ces problèmes peut également être causé par d'autres problèmes.

1. Fatigue ou fatigue extrême qui ne s'améliore pas avec le repos.
2. Perte ou prise de poids de 10 livres ou plus sans raison connue problèmes alimentaires tels que manque de faim, difficulté à avaler, douleurs au ventre ou nausées et vomissements.
3. Gonflement ou bosses n'importe où dans le corps.
4. Épaississement ou grosseur au niveau du sein ou d'une autre partie du corps
5. Douleur, particulièrement nouvelle ou sans raison connue, qui ne disparaît pas ou s'aggrave
Changements cutanés tels qu'une masse qui saigne ou devient squameuse, un nouveau grain

de beauté ou un changement dans un grain de beauté, une plaie qui ne guérit pas, ou une couleur jaunâtre de la peau ou des yeux (jaunisse).

6. Toux ou enrrouement persistant
7. Saignements ou ecchymoses inhabituels sans raison connue Changement des habitudes intestinales, comme la constipation ou la diarrhée, qui ne disparaissent pas ou un changement dans l'apparence de vos selles.

3.2.1.4 Les stades du cancer :

Lorsqu'un cancer est découvert, des tests sont effectués pour voir quelle est sa taille et sil s'est propagé a partir de son point de départ. C'est ce qu'on appelle le stade du cancer. Un stade inférieur (comme un stade 1 ou 2) signifié que le cancer ne s'est pas beaucoup propagé. Un nombre plus élevé (comme un stade 3 ou 4) signifie qu'il s'est propagé davantage. L'étape 4 est l'étape la plus élevée. Le stade du cancer est très important dans le choix du meilleur traitement pour une personne.

3.2.1.5 Propagation du cancer :

Le cancer peut se propager de son point de départ (le site primaire) a d'autres parties du corps. Lorsque les cellules cancéreuses se détachent d'une tumeur, elles peuvent se déplacer vers d'autres parties du corps par la circulation sanguine ou le système lymphatique. Les cellules cancéreuses qui voyagent dans le sang peuvent atteindre des organes distants. Si elles traversent le système lymphatique, les cellules cancéreuses peuvent se retrouver dans les ganglions lymphatiques. Quoi qu'il en soit, la plupart des cellules cancéreuses échappées meurent ou sont tuées avant de pouvoir commencer a se développer ailleurs. Mais un ou deux pourraient s'installer dans une nouvelle zone, commencer a se développer et former de nouvelles tumeurs. Cette propagation du cancer a une nouvelle partie du corps est appelée métastase.

3.2.2 L'étude dynamique de motif de cellules cancéreuses

Grâce à la théorie du contrôle et à l'analyse de stabilité linéaire de l'équilibre local, nous obtenons la condition optimale à partir de laquelle le système perd sa stabilité et un motif de Turing apparaît. En combinant l'analyse mathématique et la simulation numérique, nous montrons les motifs possibles et comment ces motifs évoluent. De plus, nous établissons un lien entre les motifs complexes et le mécanisme biologique en utilisant les résultats d'une étude précédente publiée dans Nature Cell Biology. Les résultats de cet article peuvent nous aider à mieux comprendre la signification biologique du système immunitaire. Pour un système de réaction-diffusion, le mécanisme

biologique de la formation des motifs a été proposé par Turing, l'instabilité de Turing sur les réseaux a été proposée pour comprendre la morphogènes multicellulaire.

3.2.2.1 Le modèle mathématique

Comme nous le savons tous, les cellules immunitaires jouent un rôle important dans un corps sain, et certaines méthodes ont été proposées pour traiter certaines maladies par le biais de médicaments. Dans cette section, nous considérons un modèle de compétition à deux espèces avec des capacités de transport finies pour les cellules cancéreuses et les cellules immunitaires [9], et un traitement efficace a été obtenu en contrôlant la quantité d'un médicament. En général, cela peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = f(P, Q) \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = g(P, Q) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

P représente la densité des cellules cancéreuses et Q représente la densité des cellules immunitaires. La signification des paramètres peut être obtenue dans la référence

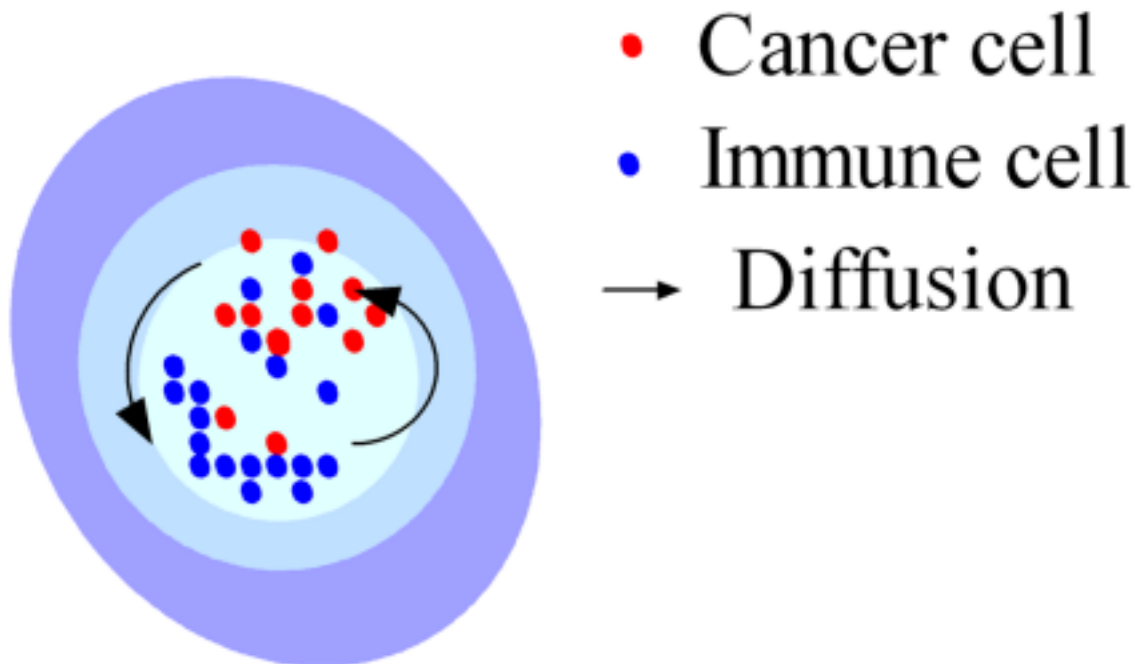


FIG.1. cellule cancéreuse et cellule immunitaire avec diffusion

La diffusion est connue pour être souvent causée par l'intensité de la pression et de la densité, ce qui peut parfois déstabiliser l'état d'équilibre stable. Ensuite, la diffusion des cellules cancéreuses avec peu de protéines d'adhérence aggraverait l'organisme, tandis que la diffusion des cellules immunitaires se produirait également pour protéger l'organisme (Fig. 1). Par conséquent, nous

devons prendre en compte l'effet de la diffusion sur le modèle. Dans cet article, nous avons modifié le système (3.2.2.1), ajouté le terme de diffusion au système et obtenu un système de réaction-diffusion avec des conditions aux limites nulles comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = f(P, Q) + d_1 \nabla^2 P \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = g(P, Q) + d_2 \nabla^2 Q \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Ici, on prend l'équilibre

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

Alors, la forme standard du système linéaire de (3.2.2.1) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} + D \nabla^2 \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

De façon standard, on suppose que (P, Q) prend la forme suivante dans l'espace de Fourier :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = (A - Dk^2) \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} + Bu, R = C \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

La substitution de la formulation ci-dessus dans (3.2.2.1) fournit l'équation caractéristique

$$x = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

et les racines de l'équation caractéristique sont

$$x' = Ax + Bu \quad (3.2.7)$$

$$R = Cx$$

Enfin, nous obtenons la valeur critique k_c^2 est un condition nécessaire d'instabilité de Turing

$$H = \frac{1}{2}(x^T Mx + u^T Nu) + \lambda(Ax + Bu) \quad (3.2.8)$$

Clairement, nous pouvons valider le résultat de la figure 1 en sélectionnant la paramètre approprié.

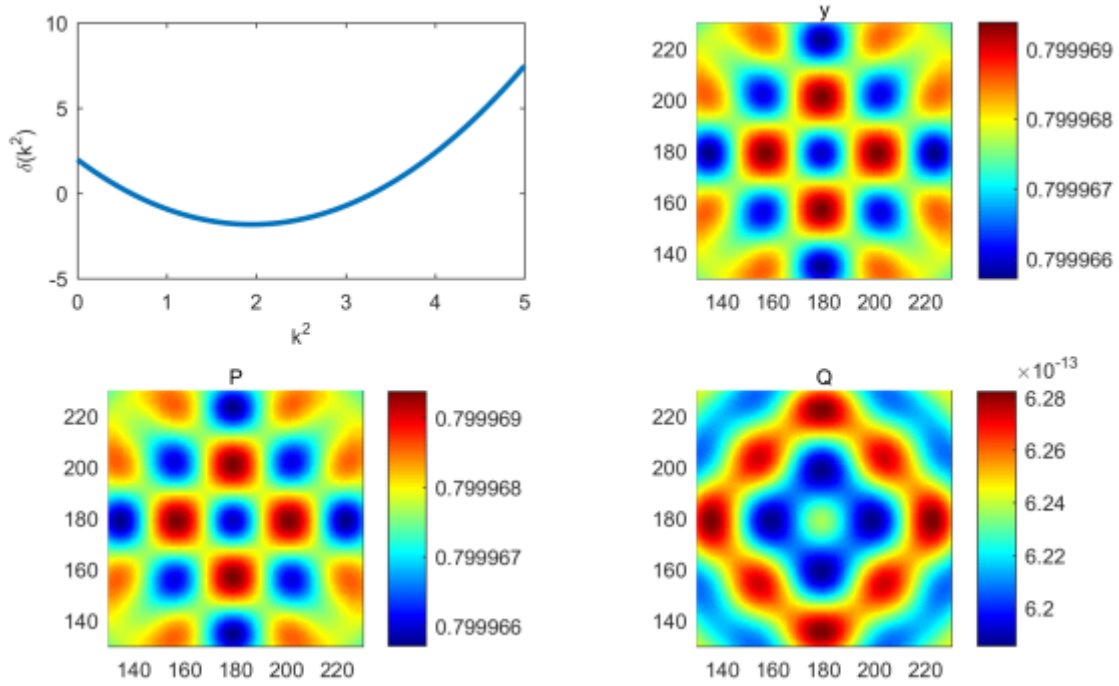


Fig. 2. Instabilité de Turing sans contrôleur. (a) Courbe de dispersion indiquant l'apparition de l'instabilité de Turing. (b) Formation de motif de la sortie (positive) sans contrôleur. (c) Formation de motif des cellules cancéreuses sans contrôleur. (d) Formation de motif des cellules immunitaires sans contrôleur

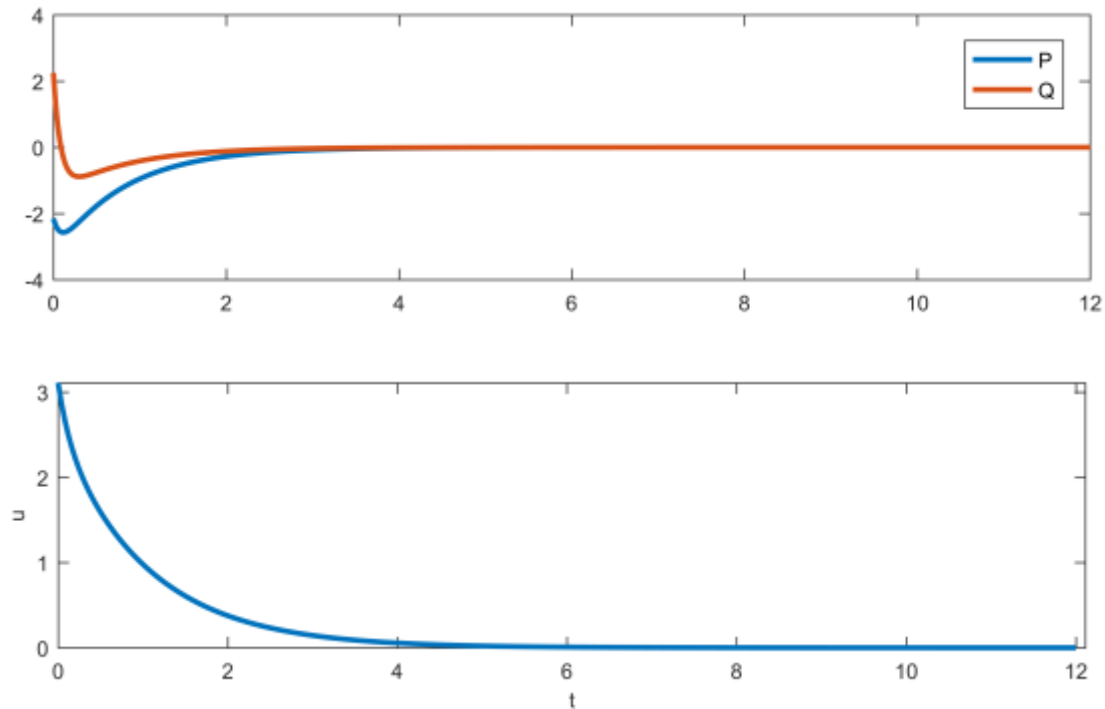


Fig. 3. Les courbes de distribution et le contrôleur. (a) Courbes de distribution des cellules cancéreuses et des cellules immunitaires pour le Système (5). (b) Courbe (contrôleur) indiquant la quantité de médicament à administrer.

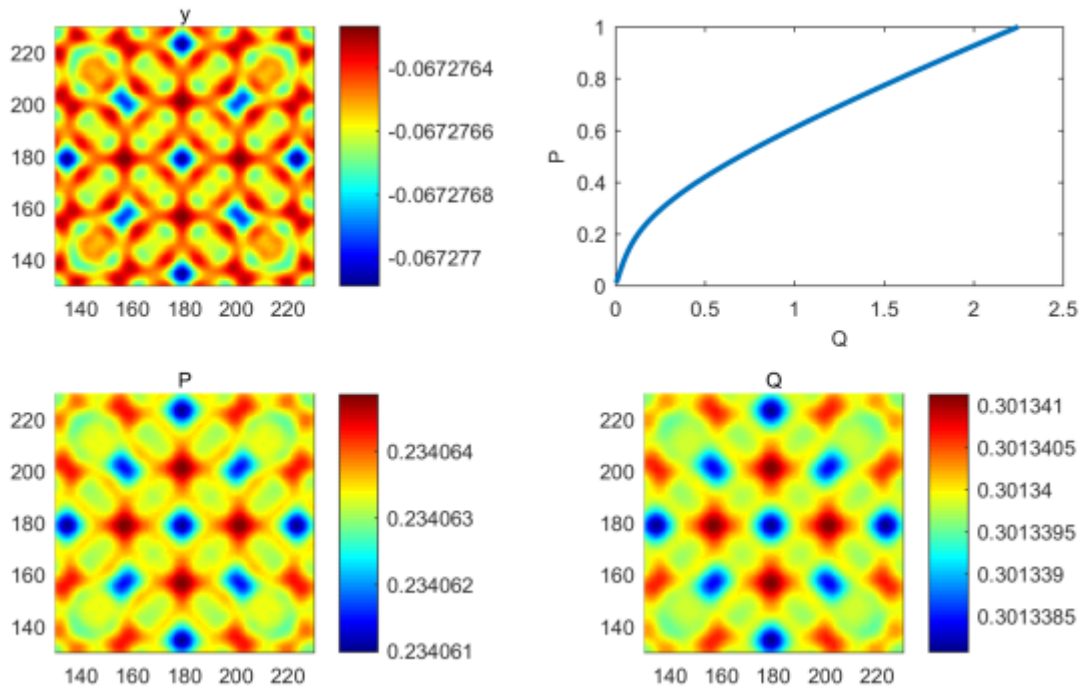


Fig.4. Formation de motif avec un contrôleur. (a) Formation de motif de la sortie lorsque le médicament curatif est pris. (b) Trajectoire optimale. (c) Formation de motif des cellules cancéreuses. (d) Formation de motif des cellules immunitaires.

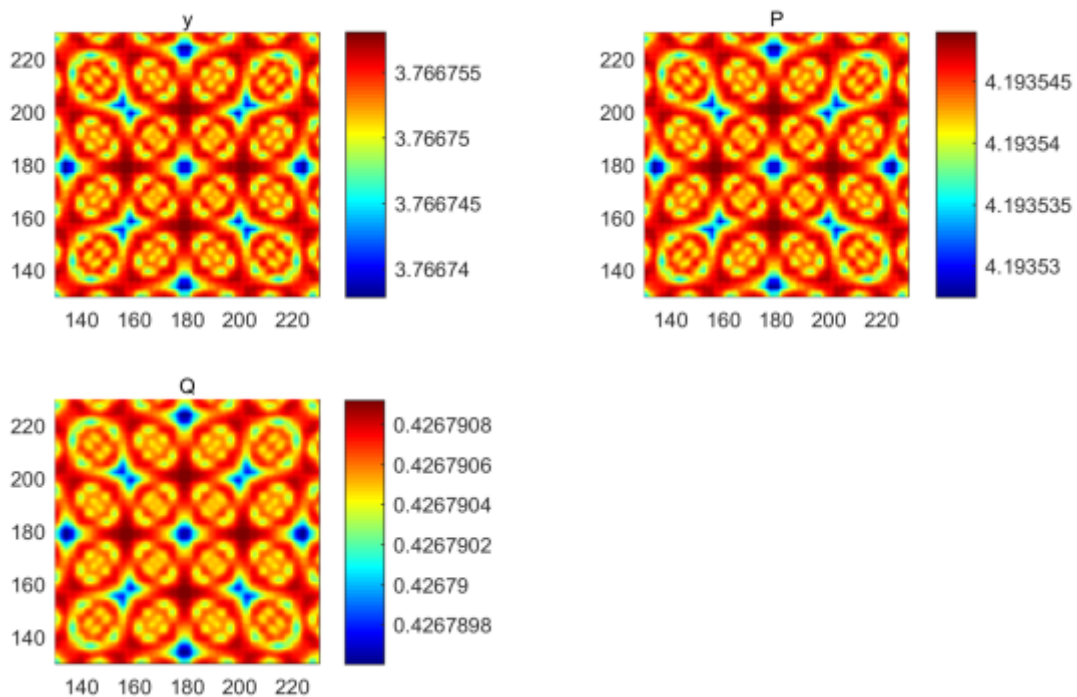


Fig.5. Formation de motif avec un contrôleur lorsque $\alpha = 8$. (a) Formation de motif de la sortie. (b) Formation de motif des cellules cancéreuses. (c) Formation de motif des cellules immunitaires.

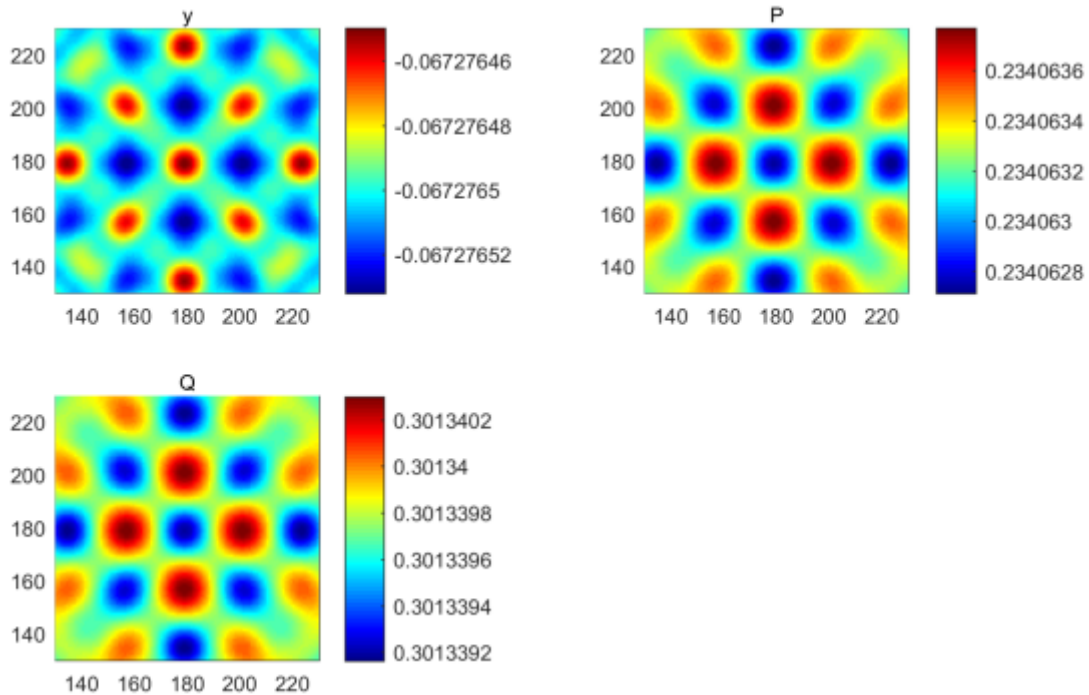


Fig.6. Formation de motif avec un contrôleur lorsque $d1 = 2.5$. (a) Formation de motif de la sortie. (b) Formation de motif des cellules cancéreuses. (c) Formation de motif des cellules immunitaires.

3.2.2.2 Discussion

Les systèmes de réaction-diffusion ont souvent été étudiés [11-30], et des motifs plus complexes impliquant certains mécanismes biologiques ont émergé. Comprendre comment contrôler ces motifs est très important. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire la théorie du contrôle dans un système de réaction-diffusion. Les protéines d'adhérence sont connues pour être essentielles à la formation des tissus épithéliaux normaux et sont des oppresseurs de tumeurs [10]. Les cellules cancéreuses se diffusent facilement lorsque le motif en tâche est isolé, et les cellules normales sont fixées car le motif en forme de rayures les relie les unes aux autres. Dans cet article, nous présentons une analyse systématique de la manière de contrôler la formation de motifs dans des conditions d'instabilité de Turing [figure 2], où les cellules cancéreuses sont dominantes. Ensuite, nous proposons une méthode théorique pour rendre le système immunitaire efficace [figure 4] en utilisant un médicament [figure 3] associé à la théorie moderne du contrôle, ce qui peut être utilisé pour traiter certaines maladies. De plus, en effectuant une série de simulations numériques, il est constaté qu'un système avec un régulateur présente une dynamique spatiale riche [figures 2 et 4] et peut être considéré comme la coexistence de cellules cancéreuses et de cellules immunitaires, qui peuvent être contrôlées. Cependant, le motif

formé est le motif en taches [figures 5 et 6], dans lequel le terrain en forme de taches est le pire [31]. Bien que le médicament ait été pris, la condition s'aggravera lorsque la prolifération et la diffusion des cellules cancéreuses sont plus rapides. Par conséquent, nous proposons une manière d'orienter la médication clinique pour le traitement de certaines affections. De plus, cette recherche représente une avancée importante dans la recherche sur les équations de réaction-diffusion, notamment en ce qui concerne le développement de motifs non linéaires dans des systèmes complexes.

En outre, ces efforts amélioreront notre compréhension du mécanisme biologique de la formation de motifs en utilisant la théorie du contrôle dans un modèle spécifique et permettront de déterminer les points clés pour fournir des conseils possibles en réglant les principales propriétés des systèmes biologiques[34].

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons trouvé les conditions de formation des motifs selon le mécanisme de Alan Turing, puis nous avons donné des exemples de ces motifs et de certains de leurs types. Prenez, par exemple, les motifs qui se forment sur le corps du poisson, le deuxième exemple est la formation de motifs de certains types de cancer et leur effet sur la vitesse de sa propagation dans le corps du patient. Nous pouvons étudier l'effet de la formation de motifs et de ses types sur certaines maladies telles que la maladie de Crohn.

Bibliographie

- [1] F. Rothe, Uniform bounds from bounded-Lp-functionals in reaction-diffusion equations, *J. Differential Equations*, 45 (1982), pp. 207-233.
- [2] J. Morgan, S. Waggoner, Global existence for a class of quasi linear reaction diffusion systems, *Commun. Appl. Anal.*, 8 (2004). 153-166
- [3] M. Pierre, D. Schmitt, Blowup in reaction-diffusion systems with dissipation of mass, *SIAM Rev.*, 42 (2000). 93-106 (electronic).
- [4] M. Pierre, Global existence in reaction-diffusion systems with control of mass : a survey, *Milan J. Math.*, 78 (2010), pp. 417-455.
- [5] S. L. Hollis, R. H. Martin, JR., and M. Pierre, Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 18 (1987), pp. 744-761.
- [6] H. Zhao, Q. Zhang and L. Zhu, The spatial Dynamics of a zebrafish model with cross-diffusions, *Mathematical Biosciences and Engineering*, Volume 14, Number 4, August 2017 pp 1035-1054.
- [7] Upadhyay, R. ; Mishra, S. Population dynamic consequences of fearful prey in a spatiotemporal predator-prey system. *Math. Biosci. Eng.* 2018, 16, 338–372.
- [8] Mishra, S. ; Upadhyay, R.K. Strategies for the existence of spatial patterns in predator-prey communities generated by cross-diffusion. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2020, 51, 103018
- [9] Murray JD, *Mathematical Biology I : An Introduction*. Springer. New York. 2002.
- [10] Kourtidis A, Ngok SP, Pulimeno P, Feathers RW, Carpio LR, Baker TR, et al. Distinct E-cadherin-based complexes regulate cell behaviour through miRNA processing or Src and p120 catenin activity. *Nature Cell Biology.* 2015 ; 17(9) :1145–1157.
- [11] Turing A. The chemical basis of morphogenesis. *Trans. R. Soc. B.* 1952 ; 237(641) :37–72.
- [12] Liu H, Wang W. The Amplitude Equations of an Epidemic Model. *Science Technology and Engineering.* 2010 ; 10(8) :1929–1933.
- [13] Dutt AK. Amplitude equation for a diffusion-reaction system : The reversible Selkov model. *AIP advances.* 2012 ; 2(4) :1–24.
- [14] Zheng QQ, Shen JW. Dynamics and pattern formation in a cancer network with diffusion. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2015 ; 27(1) :93–109.
- [15] Sun GQ, Huang CH, Wu ZY. Pattern dynamics of a Gierer-Meinhardt model with spatial effects. *Nonlinear Dynamics.* 2017 ; 88(2) :1385–1396.
- [16] Sun GQ, Wang SL, Ren Q, Jin Z, Wu YP. Effects of time delay and space on herbivore dynamics : linking inducible defenses of plants to herbivore outbreak. *Scientific Reports.* 2015 ; 5 : 11246.
- [17] Li L, Jin Z, Li J. Periodic solutions in a herbivore-plant system with time delay and spatial

- diffusion. *Applied Mathematical Modelling*. 2016 ; 40 : 4765–4777.
- [18] Li L. Patch invasion in a spatial epidemic model. *Applied Mathematics and Computation*.2015 ; 258 : 342–349.
- [19] Lee I, Cho UI. Pattern Formations with Turing and Hopf Oscillating Pattern. *Bull. Korean Chem. Soc.* 2000 ; 21(12) :1213–1216.
- [20] Maini PK, Woolley TE, Baker RE, Gaffney EA, Lee SS. Turing's model for biological pattern formation and the robustness problem. *Interface Focus*.2012 ;2 :487–496.
- [21] Vanag VK, Epstein IR. Cross-diffusion and pattern formation in reaction-diffusion systems. *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2009 ; 11 :897–912.
- [22] Fanelli D, Cianci C, Patti FD. Turing instabilities in reaction-diffusion systems with cross diffusion. *Eur. Phys. J. B.* 2013 ; 86(142) :1–8.
- [23] Shi J, Xie Z, Little K. Cross-diffusion induced instability and stability in reaction-diffusion systems. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 2011 ; 1(1) :95–119.
- [24] Thattai M, Oudenaarden V. Intrinsic noise in gene regulatory networks. *Proc Natl Acad Sci USA*. 2001 ; 98(15) :8614–8619.
- [25] Viney M, E. Reece S. Adaptive noise. *Proc. R. Soc. B.* 2013 ; 280 :20131104.
- [26] Othmer H, Scriven L. Instability and dynamic pattern in cellular networks. *J. Theor. Biol.* 1971 ; 32 (507) :507–537.
- [27] Nakao H, Mikhailov A. Turing patterns in network-organized activator-inhibitor systems. *Nature Physics*. 2010 ; 6 :544–550.
- [28] Nakao H, Mikhailov A, Turing patterns on networks, arXiv :0807.1230v1 [nlin.PS] (2008).
- [29] Hata S, Nakao and H, Mikhailov AS. Global feedback control of Turing patterns in network-organized activator-inhibitor systems. *Europhysics Letters*. 2012 ; 98 :64004.
- [30] Coron JM. *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society. USA. 2007.
- [31] Gain J, Merry B, Marais P. Parallel, realistic and controllable terrain synthesis. *Computer Graphics Forum*.2015 ;34(2) :105–116.
- [32] M Francesca Carfora, I Torricollo .Cross-diffusion-driven instability in a predator-prey system with fear and group defense .*Mathematics*. 2020 ;8-15, mdpi.com
- [33] M Zaidi .Etude des solutions globales de certains systèmes de réaction-diffusion par des méthodes fonctionnelles. 2021 ;12-13.
- [34] Q Zheng, J Shen, Z Wang - *PLoS One*, Pattern dynamics of the reaction-diffusion immune system. 2018 ;1-11.