



جامعة عباس لغرور خنشلة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة الصناعية

Université Abbès Laghrour Khenchela
Faculté des sciences et technologies
Département de Génie Industriel



Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (LMD)

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et informatique industrielle

Commande Prédictive sous Contraintes Appliquée à un Convertisseur Buck DC-DC

Réalisé par : -TABTI Ishak

Encadreur : Dr. BEDDIAF Abdelaziz

Co-encadreur : Pr. BOUOUDEN Sofiane

Membres du Jury :

Pr. ALLOUANI Fouad

Président

Dr. BOURAS Mostafa

Examineur

Année universitaire 2025/2026

Remerciements

Nous remercions en premier lieu **Allah**, le Tout-Puissant, de nous avoir accordé la volonté, la patience et les capacités nécessaires pour mener à bien ce travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et notre sincère reconnaissance à nos directeurs de mémoire **Pr. Bououden Sofiane** et **Dr. Beddiaf Abdelaziz** pour leurs conseils avisés, leurs encadrement rigoureux, leurs disponibilités constantes et la pertinence de leurs orientations scientifiques tout au long de l'élaboration de ce mémoire. Leurs rigueurs académiques et leurs encouragements ont été déterminants dans l'aboutissement de ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'examiner ce travail et de lui consacrer une partie de leur temps précieux. Leurs remarques et suggestions contribueront certainement à enrichir ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble du corps enseignant du Département de Génie Industriel, spécialité Automatique et Informatique Industrielle, pour la qualité de la formation dispensée au cours de notre cursus universitaire.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, par leur soutien moral, leurs conseils et leurs encouragements.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

- **Mes chers parents** — pour leur soutien indéfectible, leurs sacrifices incommensurables et leur amour inconditionnel tout au long de mes années d'études. Aucun mot ne saurait exprimer ma gratitude.
- **Mes frères et ma sœur** — pour leurs encouragements constants et leur présence bienveillante.
- **Toute ma famille** — sans exception, pour l'affection et le soutien qu'elle m'a toujours témoignés.
- **Mon directeur de mémoire** — pour sa guidance scientifique, sa patience et son dévouement.
- **Mes amis et collègues de la promotion** — pour les moments partagés et l'entraide mutuelle.
- **À tous ceux qui m'aiment et que j'aime.**

« L'éducation est l'arme la plus puissante qu'on puisse utiliser pour changer le monde. »

— Nelson Mandela

Résumé

Ce mémoire traite de la conception et de la validation par simulation d'une **commande prédictive sous contraintes (MPC)** appliquée à un **convertisseur DC-DC abaisseur de type Buck**. L'objectif est de réguler avec précision la tension de sortie à $V_{\text{ref}} = 12 \text{ V}$ à partir d'une source de 24 V , tout en respectant les contraintes physiques imposées sur le rapport cyclique D et sa variation ΔD , dans le cadre d'une implémentation numérique à temps discret.

La démarche suivie s'articule en quatre étapes. La **modélisation** du convertisseur repose sur la technique du modèle moyenné (SSA), conduisant à un modèle d'état continu du second ordre linéarisé autour du point d'équilibre ($D^* = 0,5$, $V_o^* = 12 \text{ V}$), puis discrétisé par la méthode ZOH à $T_e = 0,1 \text{ ms}$. La **formulation MPC** adopte un modèle augmenté à intégrateur implicite — garantissant l'annulation de l'erreur stationnaire — et génère une hessienne $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie positive, assurant la convexité stricte du problème de programmation quadratique (QP) résolu à chaque instant par la fonction *quadprog* de MATLAB.

La **validation par simulation** porte sur quatre scénarios : réponse indicielle (temps de montée $t_r = 0,60 \text{ ms}$, dépassement $D\% = 0,70 \%$, erreur stationnaire $SS = 0 \text{ V}$), comparaison MPC contraint vs non contraint ($D_{\text{max}} = 6,29$ sans contraintes — inadmissible physiquement), robustesse aux perturbations de charge (rejet en $< 0,30 \text{ ms}$), et analyse de sensibilité des horizons N_p et N_c (configuration optimale : $N_p = 10$, $N_c = 3$). Les résultats démontrent que la commande MPC sous contraintes permet d'atteindre des performances dynamiques élevées tout en garantissant l'admissibilité physique permanente de la commande, ce qu'aucun régulateur classique ne peut assurer simultanément.

Mots-clés : Commande prédictive (MPC), Convertisseur Buck DC-DC, Programmation quadratique, Modèle augmenté, Contraintes physiques, Simulation MATLAB.

Abstract

This thesis addresses the design and simulation-based validation of a **constrained Model Predictive Control (MPC)** strategy applied to a **DC-DC Buck step-down converter**. The objective is to accurately regulate the output voltage at $V_{\text{ref}} = 12$ V from a 24 V source, while enforcing the physical constraints on the duty cycle D and its increment ΔD within a discrete-time digital implementation framework.

The methodology consists of four stages. The **modeling** of the converter is based on the State-Space Averaging (SSA) technique, leading to a second-order linearized continuous-time state-space model around the equilibrium point ($D^* = 0.5$, $V_o^* = 12$ V), discretized using the Zero-Order Hold (ZOH) method at $T_e = 0.1$ ms. The **MPC formulation** employs an augmented state model with an implicit integrator — structurally guaranteeing zero steady-state error — and yields a positive-definite Hessian $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, ensuring the strict convexity of the Quadratic Programming (QP) problem solved at each sampling instant by MATLAB's *quadprog* function.

The **simulation validation** covers four test scenarios: step response (rise time $t_r = 0.60$ ms, overshoot $D\% = 0.70\%$, steady-state error $SS = 0$ V), constrained vs. unconstrained MPC comparison ($D_{\text{max}} = 6.29$ without constraints — physically inadmissible), load perturbation robustness (rejection in < 0.30 ms), and sensitivity analysis of the prediction horizon N_p and control horizon N_c (optimal configuration: $N_p = 10$, $N_c = 3$). The results demonstrate that constrained MPC achieves high dynamic performance while permanently guaranteeing the physical admissibility of the control input — a property unattainable by conventional controllers.

Keywords: Model Predictive Control (MPC), DC-DC Buck Converter, Quadratic Programming, Augmented Model, Physical Constraints, MATLAB Simulation.

الملخص

تتناول هذه المذكرة تصميم والتحقق بالمحاكاة من قانون التحكم التنبئي المقيد (MPC) المطبق على محول التيار المستمر من نوع (Buck) يهدف هذا العمل إلى تنظيم جهد الخرج بدقة عند القيمة المرجعية (12 V) انطلاقاً من مصدر تغذية (24 V) ، مع احترام القيود الفيزيائية المفروضة على نسبة دورة العمل (D) وتغيرها (ΔD) في إطار التنفيذ الرقمي بالزمن المتقطع.

تعتمد المنهجية المتبعة على أربع مراحل متتالية. تركز مرحلة النمذجة على تقنية المتوسط الزمني لفضاء الحالة (State-Space Averaging - SSA) من أجل الحصول على نموذج خطي مستمر من الدرجة الثانية، خطي حول نقطة التوازن ($V^*_o = 12\text{ V}$ ، $D^* = 0.5$) ، ثم يتم تقطيعه باستخدام منهجية الإمساك من الرتبة الصفرية (Zero-Order Hold - ZOH) عند فترة أخذ العينات ($T_e = 0.1\text{ ms}$). أما مرحلة تصميم التحكم التنبئي، فتعتمد على نموذج مكبر يحتوي على مكامل ضمني يساهم في الإلغاء البنوي للخطأ الثابت. يؤدي ذلك إلى صياغة مسألة برمجة تربيعية (Quadratic Programming - QP) ذات مصفوفة هيسيان (H) موجبة التعريف من الرتبة (3×3) ، مما يضمن تحدياً صارماً للمسألة العددية التي يتم حلها في كل لحظة أخذ عينة باستخدام الدالة (quadprog) ضمن بيئة MATLAB . تشمل مرحلة التحقق بالمحاكاة أربعة سيناريوهات رئيسية:

الاستجابة القفزية، حيث تم الحصول على زمن صعود ($tr = 0.60\text{ ms}$) مع تجاوز نسبي محدود ($D\% = 0.70\%$) وخطأ ثابت معدوم ($SS = 0$)؛ المقارنة بين التحكم المقيد وغير المقيد، حيث بلغت نسبة دورة العمل في الحالة غير المقيدة القيمة ($D = 6.29$) ، وهي قيمة غير قابلة للتحقيق فيزيائياً؛ دراسة متانة القانون تجاه اضطرابات الحمل، مع قدرة على رفض الإزعاج خلال أقل من (0.30 ms)؛ تحليل حساسية أفقي التنبؤ (N_p) والتحكم (N_c) ، والذي أظهر أن التهيئة المثلى توافق ($N_c = 3$, $N_p = 10$)؛

تُبرز النتائج أن التحكم التنبئي المقيد يسمح بتحقيق أداء مرتفع مع ضمان القبولية الفيزيائية الدائمة لإشارة التحكم، مما يجعله حلاً فعالاً وملائماً لتطبيقات إلكترونيات القدرة الحديثة.
الكلمات المفتاحية:

التحكم التنبئي (MPC) ، محول Buck ، البرمجة التربيعية، النموذج المكبر، القيود الفيزيائية، محاكاة MATLAB

Table des Matières

Introduction Générale	1
Chapitre I.....	5
I.1. Introduction	5
I.2. Contexte Énergétique et Systèmes Électriques à Convertisseurs.....	5
I.2.1. Enjeux de la conversion d'énergie électrique	5
I.2.2. Classification des convertisseurs DC-DC	6
I.2.3. Le convertisseur Buck : topologie et applications	7
I.3. Techniques de Commande Classiques des Convertisseurs DC-DC.....	8
I.3.1. Commande par Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI)	8
I.3.2. Correcteur PID	8
I.3.3. Commande par retour d'état et placement de pôles.....	9
I.3.4. Commande par mode glissant	9
I.3.5. Limites des approches classiques et motivation pour le MPC	10
I.4. La Commande Prédictive (MPC) : Principes et Historique	11
I.4.1. Émergence et évolution historique	11
I.4.2. Formulation générale du problème MPC	11
I.4.3. Variantes de la commande prédictive	12
I.5. État de l'Art : Commande Prédictive pour les Systèmes Électriques.....	13
I.5.1. MPC appliqué aux convertisseurs DC-DC.....	13
I.5.2. Développements récents (2018–2024).....	13
I.5.3. Synthèse et positionnement du travail.....	14
I.6. Outils et Environnement de Simulation	15
I.7. Conclusion.....	16
Chapitre II.....	18
II.1. Introduction.....	18
II.2. Description et Fonctionnement du Convertisseur Buck	18
II.2.1. Principe général	18
II.2.2. Structure électrique et rôle des composants.....	19
II.3. Analyse par Modes de Fonctionnement.....	20
II.3.1. Mode de Conduction Continue (MCC)	20
II.3.1.1. Phase ON : interrupteur fermé ($0 \leq t < D \times Ts$)	20
II.3.1.2. Phase OFF : interrupteur ouvert ($D \times Ts \leq t < Ts$).....	21
II.3.2. Mode de Conduction Discontinue (MCD).....	21

II.4. Modèle Moyenné — Technique SSA	22
II.4.1. Principe de la technique de moyennage.....	22
II.4.2. Application au convertisseur Buck en MCC	22
II.5. Représentation en Espace d'État	23
II.5.1. Modèle continu	23
II.5.2. Discretisation par la méthode ZOH	24
II.6. Linéarisation autour du Point d'Équilibre	24
II.6.1. Détermination du point d'équilibre	24
II.6.2. Modèle petit-signal linéarisé.....	24
II.7. Analyse des Propriétés Structurelles.....	25
II.7.1. Stabilité en boucle ouverte.....	25
II.7.2. Commandabilité.....	26
II.7.3. Observabilité.....	26
II.8. Application Numérique.....	27
II.8.1. Paramètres du convertisseur	27
II.8.2. Calcul des matrices continues.....	27
II.8.3. Calcul des matrices discrètes (ZOH, $T_e = 100 \mu s$).....	28
II.9. Conclusion	29
Chapitre III	31
III.1. Introduction	31
III.2. Principe de la Commande Prédictive à Horizon Glissant.....	31
III.2.1. Idée fondamentale.....	31
III.2.2. Horizons de prédiction et de commande	33
III.3. Modèle Augmenté à Intégrateur Implicite.....	33
III.3.1. Motivation de la formulation incrémentale	33
III.3.2. Équations du modèle augmenté.....	34
III.3.3. Propriété d'intégration — annulation de l'erreur stationnaire.....	34
III.4. Matrices de Prédiction F et Φ	35
III.4.1. Prédiction de l'état et de la sortie	35
III.4.2. Matrice de réponse libre F	35
III.4.3. Matrice de réponse forcée Φ	35
III.5. Fonction Coût Quadratique	37
III.5.1. Formulation vectorielle.....	37
III.5.2. Réduction à la forme QP standard.....	37
III.6. Formulation des Contraintes Physiques	38
III.6.1. Types de contraintes	38

III.6.1.1. Contraintes sur l'incrément de commande $\Delta D(k)$	38
III.6.1.2. Contraintes sur la commande $u(k)$	38
III.6.1.3. Note sur les contraintes de sortie.....	39
III.6.2. Formulation compacte	39
III.7. Problème de Programmation Quadratique et Résolution	40
III.7.1. Formulation complète du problème QP	40
III.7.2. Algorithme de commande MPC	40
III.7.3. Résolution numérique — fonction quadprog	41
III.8. Paramètres du Contrôleur MPC.....	41
III.8.1. Guide de réglage.....	41
III.9. Analyse de Sensibilité des Paramètres	42
III.9.1. Influence de l'horizon de prédiction N_p	42
III.9.2. Influence du rapport Q/R_w	44
III.9.3. Comparaison MPC contraint vs non contraint	45
III.10. Stabilité et Faisabilité Récursive	45
III.10.1. Stabilité de la boucle fermée	45
III.10.2. Faisabilité récursive.....	46
III.11. Conclusion.....	47
Chapitre IV	49
IV.1. Introduction	49
IV.2. Paramètres de Simulation.....	49
IV.3. Vérification Numérique du Modèle MPC	50
IV.3.1. Matrices du modèle discret et augmenté	50
IV.3.2. Hessienne H et matrice de contraintes M	51
IV.4. Scénario 1 — Réponse Indicielle en Boucle Fermée.....	52
IV.4.1. Conditions de simulation.....	52
IV.4.2. Résultats numériques.....	52
IV.5. Scénario 2 — MPC Contraint vs Non Contraint.....	54
IV.5.1. Protocole de comparaison	54
IV.5.2. Résultats quantitatifs	54
IV.6. Scénario 3 — Robustesse aux Perturbations de Charge.....	56
IV.6.1. Séquence de perturbation	56
IV.7. Scénario 4 — Influence des Horizons N_p et N_c	58
IV.8. Tableau Récapitulatif des Performances	60
IV.9. Discussion Technique.....	60
IV.9.1. Erreur stationnaire nulle — confirmation en simulation.....	60

IV.9.2. Interprétation du dépassement en Scénario 3	60
IV.9.3. Avantage computationnel de la formulation choisie.....	61
IV.10. Conclusion.....	61
Conclusion Générale.....	62
Bibliographie Générale.....	65

Liste des Figures

Chapitre I — Généralités et État de l'Art

Figure I.1. Chaîne de conversion d'énergie électrique typique	6
Figure I.2. Applications industrielles du convertisseur Buck DC-DC	8
Figure I.3. Comparaison des structures de commande classiques pour le convertisseur Buck	10
Figure I.4. Évolution historique de la commande prédictive MPC (1978–2024)	12
Figure I.5. Carte conceptuelle de l'état de l'art MPC pour les systèmes électriques	14

Chapitre II — Modélisation du Convertisseur Buck DC-DC

Figure II.1. Schéma électrique complet du convertisseur Buck DC-DC	19
Figure II.2. Circuit équivalent du convertisseur Buck en phase ON (interrupteur fermé)	20
Figure II.3. Circuit équivalent du convertisseur Buck en phase OFF (interrupteur ouvert)	21
Figure II.4. Localisation des pôles du système Buck dans le plan complexe.....	26
Figure II.5. Réponse indicielle en boucle ouverte du modèle discret ($D=0,5$, $V_{in}=24V$)	28

Chapitre III — Commande Prédictive sous Contraintes

Figure III.1. Principe de l'horizon glissant MPC ($N_p=10$, $N_c=3$)	32
Figure III.2. Structure de la matrice de prédiction $\Phi \in \mathbb{R}^{\{10 \times 3\}}$ (carte thermique)	36
Figure III.3. Diagramme bloc de la boucle fermée MPC appliquée au convertisseur Buck	41
Figure III.4. Influence de N_p sur la réponse indicielle $V_o(t)$ ($\Delta D_{max}=0,8$, $x(0)=[0,0]^T$)	43
Figure III.5. Influence du rapport Q/R_w sur $V_o(t)$ et $D(t)$	44
Figure III.6. Comparaison MPC contraint vs non contraint — Analyse de sensibilité.....	45

Chapitre IV — Simulation et Résultats

Figure IV.1. Structure de la matrice Φ (10×3) vérifiée sous MATLAB R2023b	51
--	----

Figure IV.2. Scénario 1 — Réponse indicielle : $V_o(t)$ et $D(k)$ (MATLAB, 200 pas)	53
Figure IV.3. Scénario 1 — Variation incrémentale $\Delta D(k)$	53
Figure IV.4. Scénario 2 — Comparaison $V_o(t)$: MPC contraint vs non contraint	55
Figure IV.5. Scénario 2 — Comparaison $D(t)$: domaine admissible vs violation	55
Figure IV.6. Scénario 3 — $V_o(t)$ sous perturbations de charge $R:10 \rightarrow 5 \rightarrow 15 \Omega$	58
Figure IV.7. Scénario 4 — Influence de N_p et N_c sur $V_o(t)$	59

Liste des Tableaux

Chapitre I — Généralités et État de l'Art

Tableau I.1. Comparaison des convertisseurs DC-DC non isolés	7
Tableau I.2. Comparaison des techniques de commande pour le convertisseur Buck	10
Tableau I.3. Positionnement du travail par rapport à la littérature	15

Chapitre II — Modélisation du Convertisseur Buck DC-DC

Tableau II.1. Paramètres numériques du convertisseur Buck étudié	27
--	----

Chapitre III — Commande Prédictive sous Contraintes

Tableau III.1. Paramètres retenus du contrôleur MPC	42
Tableau III.2. Influence de N_p sur les performances ($\Delta D_{\max}=0,8$, $x(0)=[0,0]^T$)	43
Tableau III.3. Influence du rapport Q/R_w sur les performances ($N_p=10$, $N_c=3$)	44

Chapitre IV — Simulation et Résultats

Tableau IV.1. Paramètres complets du convertisseur Buck et du contrôleur MPC	50
Tableau IV.2. Indicateurs de performance — Scénario1($N_p=10$, $N_c=3$, $\Delta D_{\max}=0,8$)....	52
Tableau IV.3. Comparaison quantitative MPC contraint vs non contraint	54
Tableau IV.4. Performances de rejet de perturbation — Scénario 3	57
Tableau IV.5. Comparaison des performances pour trois configurations (N_p , N_c)	58
Tableau IV.6. Bilan global des performances — tous scénarios (résultats MATLAB)....	60

Liste des Abréviations et Acronymes

CCM : Continuous Conduction Mode (Mode de Conduction Continue)
DCM : Discontinuous Conduction Mode (Mode de Conduction Discontinue)
DSP : Digital Signal Processor (Processeur de Signal Numérique)
EMI : Electromagnetic Interference (Interférence Électromagnétique)
FCS-MPC : Finite Control Set Model Predictive Control
FPGA : Field-Programmable Gate Array
GPC : Generalized Predictive Control (Commande Prédictive Généralisée)
H : Hessienne de la fonction coût quadratique
IAE : Integral Absolute Error (Intégrale de la Valeur Absolue de l'Erreur)
ISE : Integral Square Error (Intégrale du Carré de l'Erreur)
LC : Filtre inductance-capacité
LMPC : Linear Model Predictive Control (MPC Linéaire)
MCC : Mode de Conduction Continue
MCD : Mode de Conduction Discontinue
MLI : Modulation de Largeur d'Impulsion (PWM)
MOSFET : Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor
MPC : Model Predictive Control (Commande Prédictive)
NMPC : Nonlinear Model Predictive Control (MPC Non Linéaire)
N_c : Horizon de commande
N_p : Horizon de prédiction
PID : Proportionnel-Intégral-Dérivé
PWM : Pulse Width Modulation (Modulation de Largeur d'Impulsion)
QP : Quadratic Programming (Programmation Quadratique)
SMC : Sliding Mode Control (Commande par Mode Glissant)
SSA : State Space Averaging (Modèle Moyen d'Espace d'État)
ZOH : Zero-Order Hold (Bloqueur d'Ordre Zéro)
ΔD_{max} : Variation maximale du rapport cyclique par pas d'échantillonna

Introduction Générale

La transition énergétique mondiale et la multiplication des applications embarquées — des véhicules électriques aux systèmes photovoltaïques en passant par les alimentations industrielles — ont placé les convertisseurs d'énergie électroniques au cœur des défis technologiques contemporains. Ces dispositifs, qui assurent l'interface entre sources et charges de natures différentes, doivent répondre à des exigences toujours plus sévères : haute précision de régulation, robustesse aux perturbations, respect strict des contraintes physiques de sécurité, et rapidité de réponse dynamique.

Parmi les convertisseurs statiques DC-DC, le convertisseur Buck occupe une place prépondérante dans les applications de puissance allant de quelques watts à plusieurs kilowatts. Sa topologie simple, son rendement élevé et sa large plage de tension de sortie en font le composant de base de nombreux systèmes embarqués modernes. Cependant, la conception d'une loi de commande performante pour ce convertisseur reste un problème délicat, en raison de sa nature commutante non linéaire, de la présence de contraintes physiques strictes sur le rapport cyclique et les courants, et des variations inévitables de la charge.

Les techniques de commande classiques — régulateurs PID, retour d'état par placement de pôles, commande par mode glissant — ont démontré leurs limites face à ces contraintes multiples et simultanées. Ces approches traitent généralement les contraintes de manière indirecte, par saturation ou détuning, ce qui dégrade les performances nominales du système. La **commande prédictive basée sur modèle (MPC — Model Predictive Control)** offre une alternative fondamentalement différente : elle intègre explicitement les contraintes physiques dès la phase de conception de la loi de commande, en résolvant à chaque pas d'échantillonnage un problème d'optimisation sur un horizon de prédiction fini.

C'est dans ce contexte que s'inscrit le présent travail. L'objectif est de développer et de valider une loi de commande prédictive sous contraintes appliquée au convertisseur Buck DC-DC, garantissant à la fois la régulation précise de la tension de sortie, le respect des limites physiques du composant, et la robustesse aux variations de charge.

Problématique

Comment concevoir une loi de commande pour un convertisseur Buck DC-DC qui satisfasse simultanément les contraintes physiques (rapport cyclique borné, limitation de la variation de commande, sécurité de la tension de sortie) tout en assurant des performances dynamiques optimales en termes de précision, de rapidité et de robustesse aux perturbations ?

Objectifs du travail

- Établir un modèle mathématique précis du convertisseur Buck DC-DC sous forme d'espace d'état discret, adapté à la synthèse MPC.
- Développer un algorithme de commande prédictive sous contraintes basé sur la formulation incrémentale à horizon glissant, résolu par programmation quadratique (QP).
- Valider le contrôleur par simulation numérique sous MATLAB, en évaluant les performances de poursuite, la robustesse aux perturbations et l'effet des contraintes.
- Comparer les résultats avec et sans contraintes, et analyser la sensibilité des paramètres MPC.

Organisation du mémoire

- Ce mémoire est organisé en quatre chapitres :
- **Chapitre I — Généralités et État de l'Art** : présente le contexte technologique, les systèmes électriques à convertisseurs DC-DC, les techniques de commande classiques, et un état de l'art des développements récents en commande prédictive appliquée aux systèmes électriques.
- **Chapitre II — Modélisation du Convertisseur Buck** : développe le modèle mathématique complet du convertisseur, depuis l'analyse des modes de fonctionnement jusqu'au modèle d'état discret linéarisé, avec analyse des propriétés structurelles.
- **Chapitre III — Commande Prédictive sous Contraintes (MPC)** : formule le problème MPC complet — modèle augmenté, matrices de prédiction, fonction

coût, contraintes, problème QP — et analyse la sensibilité des paramètres de réglage.

- **Chapitre IV — Simulation et Résultats** : présente les résultats de simulation MATLAB, la comparaison des scénarios de test, l'analyse des performances et la discussion critique des résultats obtenus.
- **Conclusion Générale** : synthétise les apports du travail et ouvre sur les perspectives de développement futur.

Chapitre I

Généralités et État de l'Art

Chapitre I

Généralités et État de l'Art

I.1. Introduction

Ce premier chapitre a pour vocation de situer le travail dans son contexte scientifique et technologique. Il aborde successivement les enjeux liés aux systèmes électriques modernes à convertisseurs de puissance, les techniques de commande classiques et leurs limites, puis introduit la commande prédictive sous contraintes comme solution avancée. Un état de l'art des travaux récents portant sur l'application de la MPC aux systèmes électriques est ensuite présenté, permettant de positionner clairement la contribution de ce mémoire.

I.2. Contexte Énergétique et Systèmes Électriques à Convertisseurs

I.2.1. Enjeux de la conversion d'énergie électrique

La demande mondiale en énergie électrique connaît une croissance continue, portée par l'essor de l'électronique de puissance dans des domaines aussi variés que les énergies renouvelables, le transport électrique, les télécommunications et l'automatisation industrielle [1]. Dans tous ces contextes, les convertisseurs d'énergie statiques jouent un rôle central : ils assurent l'adaptation des niveaux de tension et de courant entre les sources d'énergie et les charges, avec le meilleur rendement possible.

Les contraintes imposées aux systèmes de conversion sont de plus en plus sévères : tension de sortie régulée à $\pm 1\%$, temps de réponse inférieur à quelques millisecondes, rendement supérieur à 90%, et robustesse aux variations de charge et de température. Ces exigences rendent insuffisantes les approches de commande conventionnelles et justifient le recours à des techniques avancées de régulation [9].

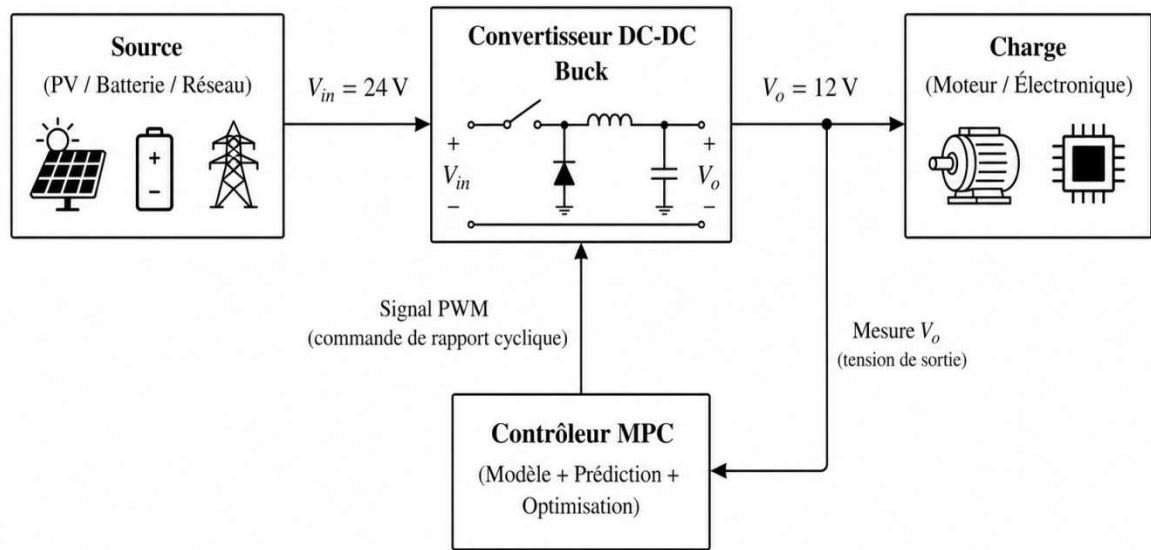


Figure I.1. Chaîne de conversion d'énergie électrique

I.2.2. Classification des convertisseurs DC-DC

Les convertisseurs DC-DC sont des dispositifs d'électronique de puissance qui réalisent la conversion d'une tension continue vers une autre tension continue de niveau différent. On distingue principalement deux grandes familles selon leur structure [1, 2] :

- **Convertisseurs non isolés** : le Buck (abaisseur), le Boost (élevateur), le Buck-Boost (inverseur), le Ćuk et le SEPIC. Ces topologies ne disposent pas d'isolation galvanique entre l'entrée et la sortie.
- **Convertisseurs isolés** : le Flyback, le Forward, le Full-Bridge et le Half-Bridge. Ils intègrent un transformateur HF assurant l'isolation galvanique, adaptés aux applications hautes tensions.

Le Tableau I.1 compare les principales caractéristiques des convertisseurs DC-DC non isolés les plus utilisés.

Tableau I.1. Comparaison des convertisseurs DC-DC non isolés.

Topologie	Rapport V_o/V_{in}	Rendement typique	Application principale
Buck (abaisseur)	D ($0 < D < 1$)	$> 92\%$	Alimentation embarquée, PV
Boost (élevateur)	$1/(1-D)$	$> 90\%$	Interfaces PV, UPS
Buck-Boost	$-D/(1-D)$	$> 88\%$	Systèmes batterie
Ćuk	$-D/(1-D)$	$> 90\%$	Faible ondulation courant

I.2.3. Le convertisseur Buck : topologie et applications

Le convertisseur Buck est le convertisseur abaisseur de tension le plus répandu dans l'industrie électronique. Sa topologie simple (un interrupteur commandé, une diode, un filtre LC et une charge) le rend particulièrement attractif pour les applications embarquées à forte densité de puissance [2]. On le retrouve dans de nombreuses applications industrielles et grand public :

- Régulation de tension dans les cartes électroniques (conversion $12V \rightarrow 3,3V$ ou $1,8V$ pour les microprocesseurs).
- Chargeurs de batteries (véhicules électriques, appareils portables).
- Étages d'adaptation dans les systèmes photovoltaïques (couplage panneau-charge).
- Alimentations industrielles régulées (automates, servocommandes, capteurs).

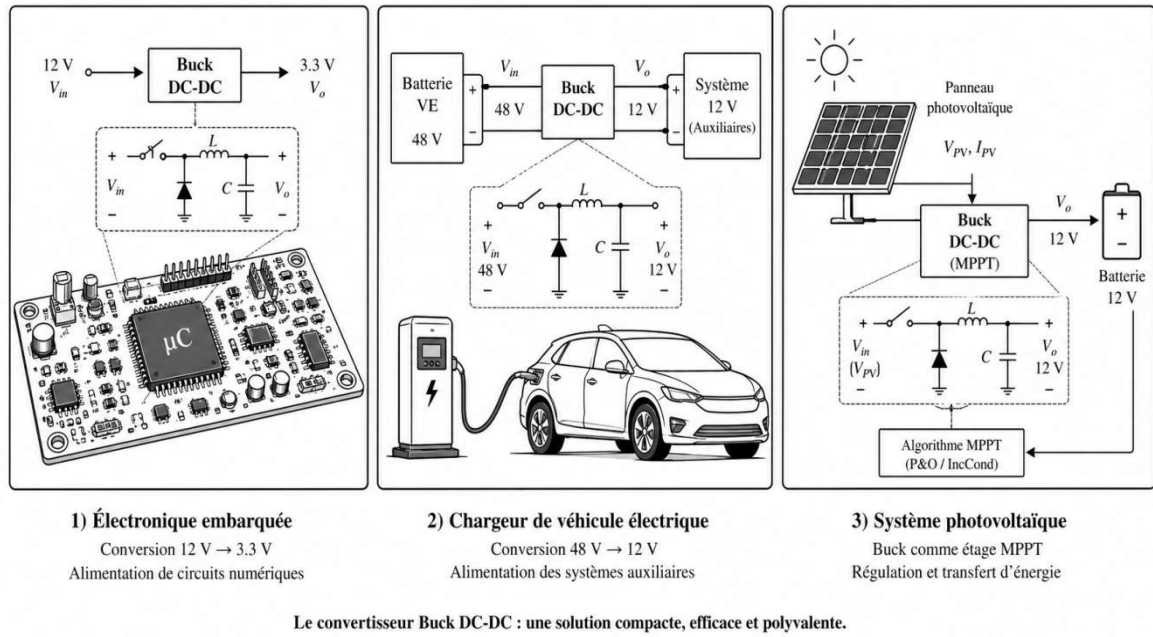


Figure I.2. Applications industrielles et embarquées du convertisseur Buck DC-DC.

I.3. Techniques de Commande Classiques des Convertisseurs DC-DC

I.3.1. Commande par Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI)

La commande par Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI — PWM en anglais) est la technique la plus largement utilisée pour le pilotage des convertisseurs DC-DC. Elle consiste à générer un signal périodique de fréquence fixe f_s et de rapport cyclique D variable, qui commande directement l'interrupteur de puissance. La régulation de la tension de sortie est réalisée en ajustant D via une boucle de retour [4].

La relation de transfert en régime permanent est $V_o = D \times V_{in}$. La régulation s'effectue par comparaison de V_o à une référence V_{ref} , l'écart étant compensé par un correcteur de type PID ou PI.

I.3.2. Correcteur PID

Le correcteur Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID) est la technique de régulation la plus universellement implantée dans l'industrie. Pour un convertisseur Buck, il assure la régulation de la tension de sortie par la loi de commande [4] :

$$u(t) = K_p \times e(t) + K_i \times \int e(t) dt + K_d \times \frac{de(t)}{dt} \quad (I.1)$$

où $e(t) = V_{ref} - V_o(t)$ est l'erreur de poursuite. Malgré sa simplicité de mise en œuvre et son efficacité pour les perturbations lentes, le PID présente des limitations importantes : réglage empirique fastidieux, sensibilité aux variations paramétriques, incapacité à anticiper les perturbations, et surtout **impossibilité de gérer explicitement les contraintes** sur la commande et les sorties [3].

I.3.3. Commande par retour d'état et placement de pôles

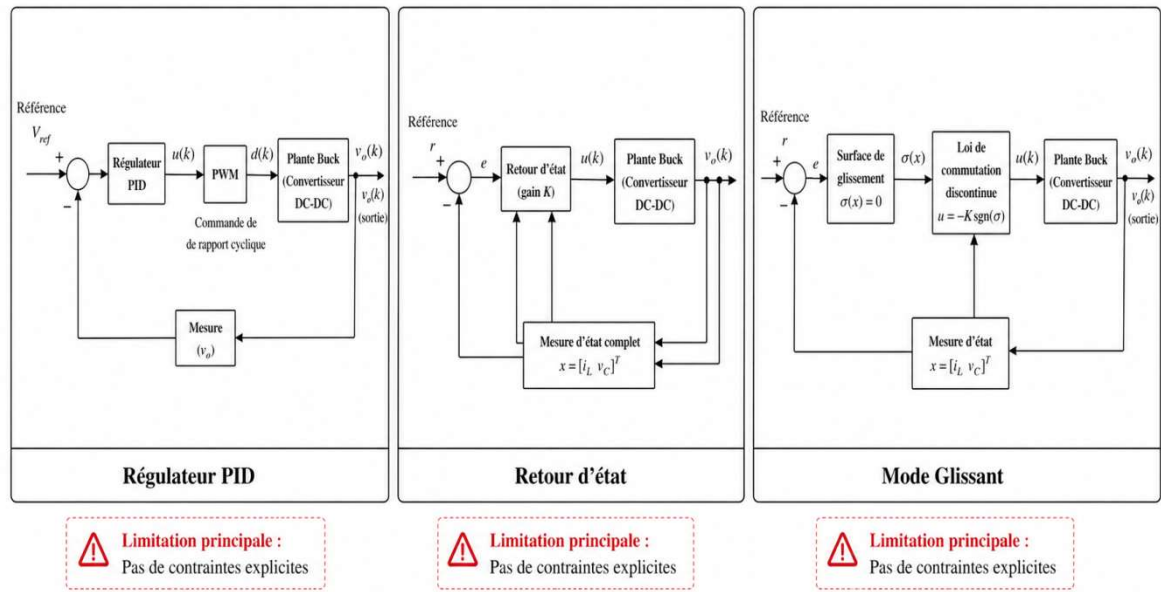
La commande par retour d'état consiste à générer la commande comme une combinaison linéaire des variables d'état mesurées ou estimées : $u(t) = -K \times x(t)$, où K est le vecteur de retour d'état calculé pour placer les pôles en boucle fermée aux positions souhaitées. Cette approche permet un contrôle précis de la dynamique, mais ne tient pas compte des contraintes physiques sur la commande et peut conduire à la saturation de l'actionneur [4, 3].

I.3.4. Commande par mode glissant

La commande par mode glissant (SMC — *Sliding Mode Control*) est une technique de commande non linéaire robuste, particulièrement adaptée aux systèmes à commutation comme les convertisseurs de puissance. Elle force la trajectoire d'état du système vers une surface de glissement $\sigma(x) = 0$ et la maintient sur cette surface par une loi de commande discontinue [5] :

$$u = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(\sigma(x))) \quad (\text{I.2})$$

Si la SMC offre une excellente robustesse aux perturbations et aux incertitudes paramétriques, elle souffre du phénomène de *chattering* (oscillations haute fréquence autour de la surface de glissement) et ne permet pas non plus la prise en compte systématique des contraintes [5].



v_o : tension de sortie i_L : courant de l'inductance v_C : tension du condensateur u : commande (rapport cyclique) d : rapport cyclique

Figure I.3. Comparaison des structures de commande classiques pour le convertisseur Buck.

I.3.5. Limites des approches classiques et motivation pour le MPC

Le Tableau I.2 synthétise une comparaison objective des techniques de commande classiques vis-à-vis des critères les plus importants pour un convertisseur Buck industriel.

Tableau I.2. Comparaison des techniques de commande pour le convertisseur Buck.

Critère	PID	Retour d'état	Mode glissant	MPC
Contraintes explicites	×	×	Partiel	✓✓
Robustesse perturbations	Moyenne	Bonne	Excellente	Bonne
Réglage des paramètres	Empirique	Analytique	Analytique	Systématique
Coût de calcul	Très faible	Faible	Faible	Moyen
Poursuite de trajectoire	Bonne	Bonne	Moyenne	Excellente
Gestion MIMO	Difficile	Possible	Complexe	Naturelle

Il ressort clairement de cette analyse que la commande prédictive sous contraintes (MPC) est la seule approche qui traite de manière explicite et systématique les contraintes physiques tout en offrant d'excellentes performances de poursuite et une formulation

naturellement adaptée aux systèmes MIMO [3, 6]. C'est cette constatation qui motive le choix de la MPC comme technique de commande dans ce travail.

I.4. La Commande Prédictive (MPC) : Principes et Historique

I.4.1. Émergence et évolution historique

La commande prédictive a été introduite industriellement à la fin des années 1970 avec le *Model Algorithmic Control* (MAC) de Richalet et al. (1978) et le *Dynamic Matrix Control* (DMC) de Cutler et Ramaker (1980). Ces premières formulations, sans contraintes explicites, visaient à améliorer les performances des procédés pétrochimiques [6]. C'est la formulation du *Generalized Predictive Control* (GPC) par Clarke et al. (1987) qui a posé les bases théoriques rigoureuses de la commande prédictive moderne, intégrant la notion de stabilité et de contraintes [7].

Depuis les années 1990, les travaux de Mayne, Rawlings, Bemporad et Morari ont établi les fondements théoriques de la stabilité et de la faisabilité de la MPC sous contraintes pour les systèmes LTI et non linéaires. Aujourd'hui, la MPC est la technique de commande avancée la plus utilisée dans l'industrie, avec des milliers d'applications répertoriées dans les raffineries, les centrales électriques, et l'aéronautique [6, 7].

I.4.2. Formulation générale du problème MPC

Le problème MPC s'énonce comme la minimisation, à chaque instant d'échantillonnage k , d'un critère de coût quadratique J sur un horizon de prédiction N_p , sous contraintes [6] :

$$\min J = \sum_1^{N_p} ||y(k+i|k) - r||^2 Q + \sum_0^{N_c-1} ||\Delta u(k+i)||^2 R \quad (\text{I.3})$$

$$\text{sujet à : } u_{\min} \leq u(k+i) \leq u_{\max}, \quad \Delta u_{\min} \leq \Delta u(k+i) \leq \Delta u_{\max} \quad (\text{I.4})$$

$$y_{\min} \leq y(k+i|k) \leq y_{\max}, \quad i = 0, 1, \dots, N_p \quad (\text{I.5})$$

La solution de ce problème d'optimisation quadratique fournit une séquence optimale de commandes futures ; seule la première est appliquée au système (principe de l'horizon glissant). Cette procédure est répétée à chaque pas d'échantillonnage avec une mesure actualisée de l'état.

Histoire du Contrôle Prédictif (MPC)

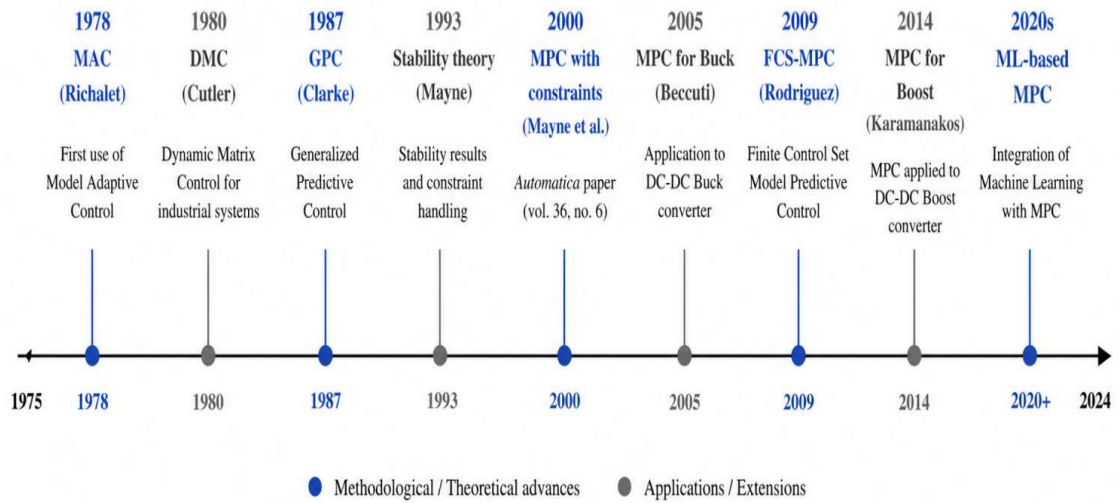


Figure I.4. Évolution historique de la commande prédictive MPC

I.4.3. Variantes de la commande prédictive

- **MPC linéaire (LMPC)** : modèle de prédiction LTI, problème QP convexe à solution unique. C'est la formulation utilisée dans ce travail.
- **MPC non linéaire (NMPC)** : modèle de prédiction non linéaire, problème NLP plus coûteux numériquement, adapté aux grandes déviations du point d'équilibre.
- **MPC robuste** : formulations min-max ou à tube garantissant les performances malgré les incertitudes du modèle.
- **MPC explicite (eMPC)** : calcule hors ligne la solution pour tous les états possibles (partition polyédrale), élimine le QP en ligne — adapté aux systèmes temps réel contraints.
- **MPC pour convertisseurs de puissance (FCS-MPC)** : exploitation de l'ensemble fini de commandes admissibles (Finite Control Set MPC), sans modulateur PWM.

Plusieurs variantes de la commande prédictive ont été développées selon les besoins applicatifs [6, 7] :

I.5. État de l'Art : Commande Prédictive pour les Systèmes Électriques

I.5.1. MPC appliqué aux convertisseurs DC-DC

L'application de la commande prédictive aux convertisseurs DC-DC a connu un essor important depuis le début des années 2000, porté par la disponibilité de microcontrôleurs et de DSPs rapides permettant la résolution en temps réel du problème d'optimisation. Les travaux pionniers de Beccuti, Papafotiou et Morari (2005) ont démontré la faisabilité d'un contrôleur MPC optimal pour un convertisseur Buck opérant en CCM et DCM, en exploitant la formulation hybride à système linéaire par morceaux [5, 8].

Karamanakos et al. (2014) ont développé une approche FCS-MPC (Finite Control Set MPC) pour le contrôle direct de tension d'un convertisseur Boost, obtenant des temps de réponse inférieurs à 500 μ s sans modulateur PWM. La généralisation à d'autres topologies (Ćuk, SEPIC) a été proposée par Rodriguez et Cortes (2012), qui ont établi un cadre unifié pour la MPC des convertisseurs de puissance [8].

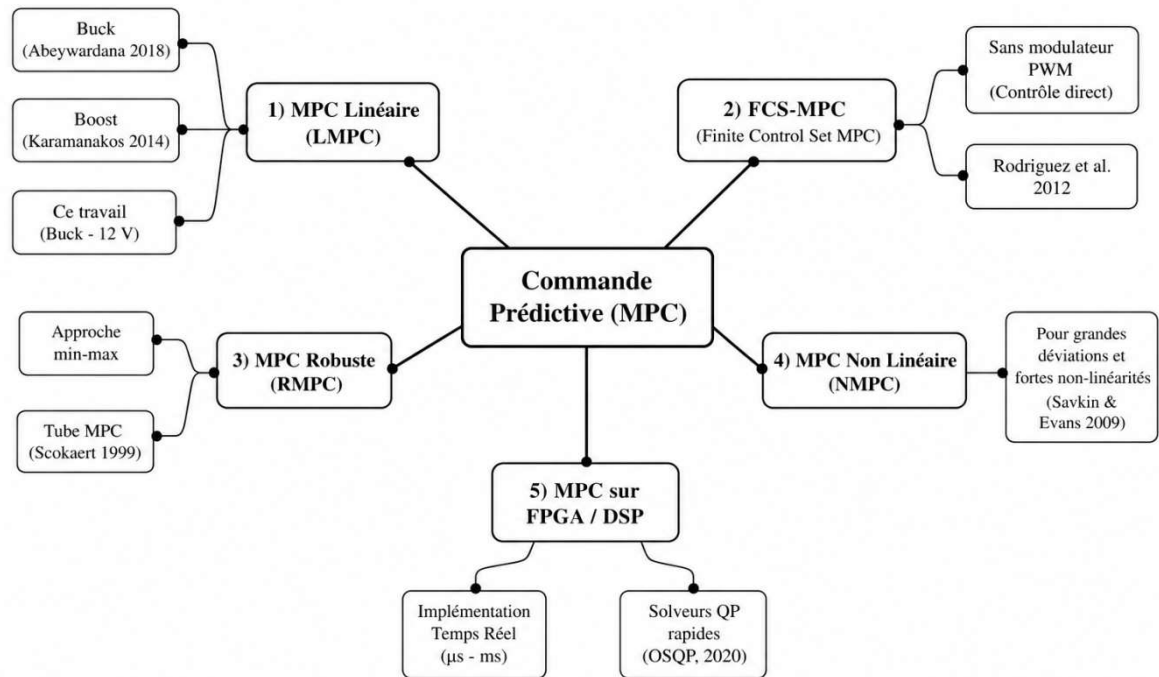
Plus récemment, Bououden et al. (2015) ont étendu ces résultats en intégrant des approches floues et des techniques d'optimisation par colonies de fourmis pour la MPC de systèmes non linéaires multi-variables, incluant des applications aux turbines éoliennes et aux systèmes photovoltaïques [9].

I.5.2. Développements récents (2018–2024)

La dernière décennie a vu l'émergence de nouvelles directions de recherche particulièrement actives dans le domaine de la MPC pour les systèmes électriques [6, 7] :

- **MPC basé sur l'apprentissage (Learning-based MPC) :** utilisation de réseaux de neurones ou d'apprentissage par renforcement pour identifier le modèle de prédiction ou approximer la loi de commande optimale en temps réel.

- **MPC distribuée pour microréseaux** : coordination décentralisée de plusieurs convertisseurs dans un microréseau DC ou AC, avec contraintes de couplage inter-systèmes.
- **MPC stochastique** : formulations probabilistes intégrant les incertitudes sur la charge, l'irradiance solaire ou les perturbations réseau.
- **MPC sur FPGA/microcontrôleur** : implantation temps réel de solveurs QP optimisés (OSQP, qpOASES) sur processeurs embarqués à faible consommation, ouvrant la voie aux fréquences de commutation > 100 kHz.



Abréviations : LMPC (Linear MPC) – FCS-MPC (Finite Control Set MPC) – RMPC (Robust MPC) – NMPC (Nonlinear MPC)

Figure I.5. État de l'art de la commande MPC pour les systèmes électriques à convertisseurs.

I.5.3. Synthèse et positionnement du travail

Le Tableau I.3 positionne ce travail par rapport aux contributions récentes de la littérature dans le domaine de la MPC appliquée aux convertisseurs DC-DC.

Tableau I.3. Positionnement du présent travail par rapport à la littérature.

Référence	Convertisseur	Approche MPC	Contraintes	Validation
Beccuti et al. (2005)	Buck (CCM+DCM)	MPC hybride optimal	$u, \Delta u$	Simulation
Karamanakos et al. (2014)	Boost	FCS-MPC énumération	u discret	Expérimentale
Bououden et al. (2015)	Turbine éolienne	MPC floue + ACO	u, y	Simulation
Hazil et al. (2024)	Buck (système PV)	MPC MPPT	$u, \Delta u, y$	Simulation
Ce travail	Buck DC-DC	MPC linéaire QP	$u, \Delta u, y$ (3 types)	MATLAB

Ce travail se distingue par la prise en compte simultanée des trois types de contraintes physiques (sur le rapport cyclique, sa variation, et la tension de sortie) dans un cadre MPC linéaire à intégrateur implicite, garantissant l'erreur stationnaire nulle. La validation complète par simulation MATLAB avec analyse de sensibilité paramétrique constitue une contribution pédagogique et méthodologique originale pour les applications algériennes dans le domaine du contrôle des convertisseurs.

Remarque : Les contraintes de sortie sont formulées en Section III.6.1.3 mais exclues de l'implémentation active (voir Section IV.3.2).

I.6. Outils et Environnement de Simulation

L'environnement de simulation utilisé dans ce travail est **MATLAB R2023b** (The MathWorks, Inc.). MATLAB est l'outil de référence mondial pour la simulation des systèmes de commande et l'électronique de puissance, utilisé par plus d'un million d'ingénieurs et chercheurs. Les outils MATLAB spécifiquement exploités dans ce travail sont :

- **Control System Toolbox** : pour la modélisation en espace d'état, la discrétisation (c2d, ZOH), l'analyse des valeurs propres et la réponse indicielle.
- **Optimization Toolbox (quadprog)** : pour la résolution du problème de programmation quadratique (QP) à chaque pas d'échantillonnage de la boucle MPC.

- **Script MATLAB personnalisé** : implémentation complète de l'algorithme MPC avec construction des matrices de prédiction F et Φ , gestion des contraintes et tracé des résultats.

I.7. Conclusion

Ce chapitre a établi le cadre scientifique et technologique dans lequel s'inscrit ce travail. Après avoir présenté le contexte énergétique et les caractéristiques des convertisseurs DC-DC, nous avons analysé les techniques de commande classiques et mis en évidence leurs limitations face aux contraintes physiques multiples. La commande prédictive sous contraintes (MPC) s'est imposée comme la solution la plus adaptée, grâce à sa capacité à intégrer explicitement ces contraintes dans la loi de commande.

L'état de l'art a montré que l'application de la MPC aux convertisseurs de puissance est un domaine de recherche actif et en pleine expansion, avec des développements récents prometteurs en apprentissage automatique, MPC distribuée et implantation temps réel sur FPGA. Ce travail contribue à ce domaine en proposant une formulation MPC linéaire complète, avec analyse de sensibilité, appliquée au convertisseur Buck DC-DC.

Les chapitres suivants développent successivement le modèle mathématique du convertisseur (Chapitre II), l'algorithme MPC complet (Chapitre III), et les résultats de simulation(ChapitreIV)

Chapitre II

Modélisation du

Convertisseur Buck DC-DC

Chapitre II

Modélisation du Convertisseur Buck DC-DC

II.1. Introduction

La conception d'un système de commande efficace repose avant tout sur la disponibilité d'un modèle mathématique précis et représentatif du système physique à commander. Dans le cadre de ce travail, le système étudié est le convertisseur continu-continu de type abaisseur, communément désigné convertisseur Buck. Ce composant fondamental de l'électronique de puissance réalise la conversion d'une tension continue d'entrée V_{in} en une tension continue de sortie V_o inférieure, selon un rapport gouverné par le rapport cyclique D , avec un rendement théorique proche de l'unité [1].

L'objectif de ce chapitre est d'établir, de manière rigoureuse et progressive, le modèle mathématique du convertisseur Buck sous une forme directement exploitable par la loi de commande prédictive développée au Chapitre III. La démarche comprend successivement : la description physique du circuit, l'analyse par modes de fonctionnement, le développement du modèle moyenné, la représentation en espace d'état, la linéarisation autour d'un point d'équilibre, la discrétisation temporelle, et l'analyse des propriétés structurelles du système.

II.2. Description et Fonctionnement du Convertisseur Buck

II.2.1. Principe général

Le convertisseur Buck appartient à la famille des convertisseurs DC-DC à commutation. Son principe repose sur l'interruption périodique du flux d'énergie entre la source et la charge à l'aide d'un interrupteur commandé, suivi d'un filtre LC qui lisse les grandeurs électriques commutées. En régime permanent idéal, la relation entre la tension de sortie et la tension d'entrée est [2] :

$$V_o = D \times V_{in} \text{ avec } D \text{ appartenant à } [0, 1] \quad (\text{II.1})$$

où D est le rapport cyclique, défini par le ratio de la durée de conduction t_{on} sur la période de commutation T_s :

$$D = \frac{t_{on}}{T_s} = t_{on} \times f_s \quad (\text{II.2})$$

La fréquence de commutation f_s est un paramètre de conception fixé, typiquement entre quelques kilohertz et plusieurs centaines de kilohertz selon les niveaux de puissance. Ce paramètre conditionne les dimensions du filtre LC et les pertes par commutation [11].

II.2.2. Structure électrique et rôle des composants

La Figure II.1 représente le schéma électrique complet du convertisseur Buck. Le circuit comprend cinq éléments, chacun assurant une fonction précise dans la conversion de l'énergie.

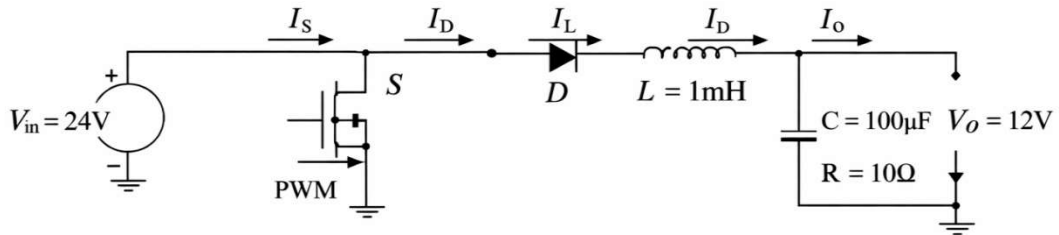


Figure II.1. Schéma électrique du convertisseur

- **Interrupteur commandé S** — transistor MOSFET à canal N piloté par un signal MLI (PWM) de rapport cyclique variable D . Constitue le seul degré de liberté de commande du convertisseur [12].
- **Diode de roue libre D** — assure la continuité du courant dans l'inductance lors des phases de blocage de l'interrupteur, évitant les surtensions inductives destructrices [10].
- **Inductance de filtrage L** — élément de stockage d'énergie magnétique. Limite la vitesse de variation du courant et détermine le mode de fonctionnement du convertisseur [11].

- **Condensateur de filtrage C** — maintient une tension de sortie quasi-constante en absorbant les ondulations de courant. Fixe l'amplitude du ripple de tension en sortie [1].
- **Charge résistive R** — modélise l'impédance équivalente de la charge. Supposée constante en régime nominal ; ses variations constituent une perturbation externe lors de la validation [9].

II.3. Analyse par Modes de Fonctionnement

II.3.1. Mode de Conduction Continue (MCC)

Le Mode de Conduction Continue (MCC — CCM en anglais) est le régime dans lequel le courant inductif i_L reste strictement positif durant toute la période de commutation. C'est le mode nominal pour des charges importantes et le cadre de toute la modélisation de ce chapitre [13].

II.3.1.1. Phase ON : interrupteur fermé ($0 \leq t < D \times T_s$)

Lorsque l'interrupteur S est fermé, la diode D est bloquée par polarisation inverse. La tension aux bornes de l'inductance est $V_L = V_{in} - V_o > 0$, provoquant une croissance linéaire du courant. Le schéma équivalent est représenté sur la Figure II.2.

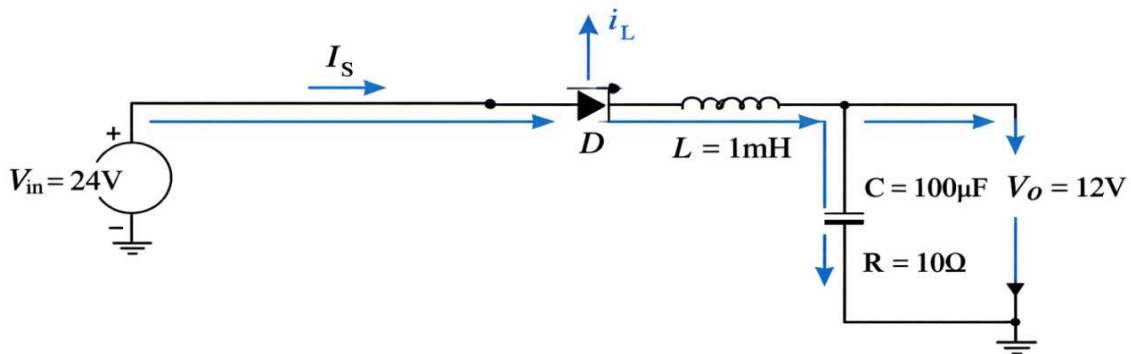


Figure II.2. Circuit équivalent du convertisseur Buck en phase ON

L'application des lois de Kirchhoff donne les équations d'état :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_{in} - V_o}{L} \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{dV_o}{dt} = \frac{i_L - V_o/R}{C} \quad (\text{II.4})$$

II.3.1.2. Phase OFF : interrupteur ouvert ($D \times T_s \leq t < T_s$)

Lorsque S est ouvert, l'énergie magnétique stockée dans L maintient le courant. La diode D entre en conduction. La tension aux bornes de L devient négative : $V_L = -V_o < 0$ provoquant la décroissance du courant. Le schéma équivalent correspondant est donné sur la Figure II.3.

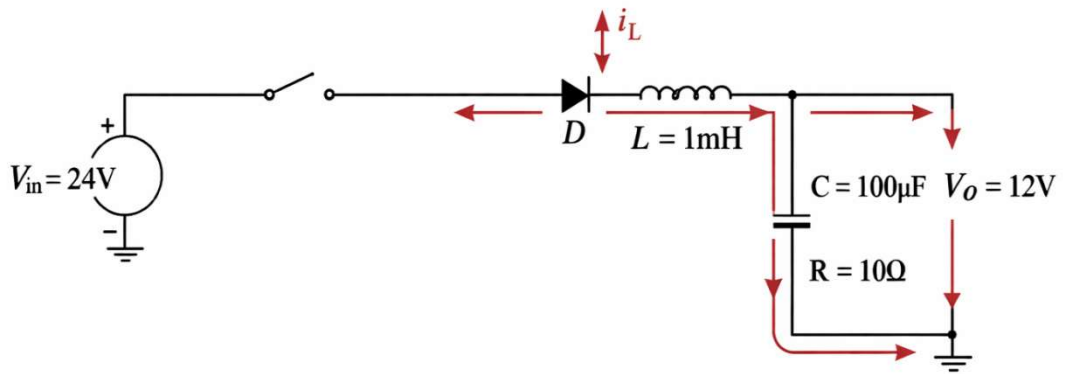


Figure II.3. Circuit équivalent du convertisseur Buck en phase OFF

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{-V_o}{L} \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{dV_o}{dt} = \frac{i_L - V_o/R}{C} \quad (\text{II.6})$$

II.3.2. Mode de Conduction Discontinue (MCD)

Le Mode de Conduction Discontinue (MCD) survient lorsque le courant inductif s'annule avant la fin de la période. Ce régime apparaît pour des charges légères ou des inductances de faible valeur. La condition de passage MCC $\rightarrow$ MCD est [11, 5] :

$$L_{crit} = \frac{(1-D) \times R}{(2 \times f_s)} \quad (II.7)$$

Pour les paramètres du Tableau II.1 : $L_{crit} = 0.25 \text{ mH}$. La valeur retenue

$L = 1 \text{ mH} \gg L_{crit}$ garantit le fonctionnement en MCC dans toutes les conditions nominales. La modélisation est conduite exclusivement dans ce mode.

II.4. Modèle Moyenné — Technique SSA

II.4.1. Principe de la technique de moyennage

Les équations d'état établies en section II.3 changent de forme à chaque commutation, les rendant non exploitables directement pour la synthèse de commande. La technique du Modèle Moyen d'Espace d'État (SSA — State Space Averaging) consiste à calculer la moyenne temporelle de ces équations sur une période de commutation complète [9]. Pour un système à deux phases (ON et OFF), le modèle moyen est :

$$\langle \dot{x} \rangle = D \times f_{ON}(x, u) + (1 - D) \times f_{OFF}(x, u) \quad (II.8)$$

où les chevrons $\langle \cdot \rangle$ désignent la valeur moyenne sur une période. Cette technique est valide sous deux conditions : (i) la fréquence de commutation f_s est très supérieure à la fréquence propre du filtre LC ; (ii) le convertisseur opère en MCC [22, 14].

Pour nos paramètres, la fréquence de commutation $f_s = 10 \text{ kHz}$ est largement supérieure à la fréquence de résonance $f_o = \frac{1}{(2\pi\sqrt{LC})} \approx 503 \text{ Hz}$ (rapport de 20), ce qui valide pleinement la technique SSA.

II.4.2. Application au convertisseur Buck en MCC

En appliquant le principe de moyennage (II.8) aux équations (II.3)–(II.6), le modèle moyen du convertisseur Buck s'écrit :

$$\frac{d\langle i_L \rangle}{dt} = \frac{D \times V_{in} - \langle V_o \rangle}{L} \quad (II.9)$$

$$\frac{d\langle V_o \rangle}{dt} = \frac{\langle i_L \rangle - \langle V_o \rangle / R}{C} \quad (II.10)$$

Ce modèle est non linéaire en raison du terme produit $D \times V_{in}$ couplant la commande D à la tension d'entrée. Cette non-linéarité est traitée par linéarisation en section II.6.

II.5. Représentation en Espace d'État

II.5.1. Modèle continu

La représentation en espace d'état est la forme mathématique canonique pour décrire les systèmes dynamiques en automatique moderne. Pour un système linéaire à temps continu, elle s'écrit [4] :

$$\dot{x}(t) = A \times x(t) + B \times u(t) \quad (\text{II.11})$$

$$y(t) = C \times x(t) \quad (\text{II.12})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie, A la matrice de dynamique, B la matrice de commande et C la matrice d'observation.

Pour le convertisseur Buck, le vecteur d'état, la commande et la sortie sont définis par :

$$x(t) = [i_l(t) \quad V_o(t)]^T \in R^2, (t) = D \in [0,1], y(t) = V_o(t) \quad (\text{II.13})$$

Pour le convertisseur Buck, en définissant le vecteur d'état

$x(t) = [i_l(t) \quad V_o(t)]^T$ in R^2 , la commande $u(t) = D$ in $[0,1]$, et la sortie mesurée $y(t) = V_o(t)$, les matrices du système continu sont identifiées directement à partir des équations moyennées (II.9)–(II.10) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \in R^{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{2 \times 1} \quad C = [0 \quad 1] \in R^{1 \times 2} \quad D_m = 0 \quad (\text{II.14})$$

II.5.2. Discrétisation par la méthode ZOH

L'implantation numérique du contrôleur MPC nécessite un modèle à temps discret. La méthode de l'Échantillonnage Bloqué d'Ordre Zéro (ZOH — Zero-Order Hold) est retenue car elle suppose que la commande reste constante entre deux instants d'échantillonnage successifs, ce qui correspond exactement au comportement d'un système de commande numérique [21].

Les matrices discrètes sont :

$$A_d = e^{A \times T_e} \quad (\text{II.15})$$

$$B_d = A^{-1} \times (A_d - I) \times B \quad (\text{II.16})$$

Le modèle d'état discret — base du prédictiveur MPC — s'écrit alors :

$$x(k+1) = A_d \times x(k) + B_d \times u(k) \quad (\text{II.17})$$

$$y(k) = C_d \times x(k) \text{ avec } C_d = C = [0 \quad 1] \quad (\text{II.18})$$

II.6. Linéarisation autour du Point d'Équilibre

II.6.1. Détermination du point d'équilibre

Le point d'équilibre est défini par l'annulation de toutes les dérivées ($\dot{x} = 0$). La résolution du système algébrique donne :

$$D^* = \frac{V_{ref}}{V_{in}} \quad (\text{II.19})$$

$$I_L^* = \frac{V_{ref}}{R} \quad (\text{II.20})$$

Pour les valeurs numériques du Tableau II.1 : le point d'équilibre nominal est ($I_L^* = 1,2 \text{ A}$, $V_o = 12 \text{ V}$, $D^* = 0,5$).

II.6.2. Modèle petit-signal linéarisé

En introduisant les variables de perturbation par rapport au point d'équilibre :

$$\tilde{i}_L = i_L - I_L^*, \quad \tilde{V}_o = V_o - V_o^*, \quad \tilde{d} = D - D^* \quad (\text{II.21})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur (hypothèse de petites perturbations), le modèle linéarisé s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [\tilde{i}_L; \tilde{V}_o]^T = A \times [\tilde{i}_L; \tilde{V}_o]^T + B \times \tilde{d} \quad (\text{II.22})$$

$$\tilde{y} = \tilde{V}_o = C \times [\tilde{i}_L; \tilde{V}_o]^T \quad (\text{II.23})$$

Les matrices A, B, C sont celles de (II.14), évaluées au point d'équilibre. Ce modèle est valide pour $|\tilde{d}| < 0,2$ et $|\tilde{V}_o| < 3 V$.

II.7. Analyse des Propriétés Structurelles

II.7.1. Stabilité en boucle ouverte

La stabilité est déterminée par les valeurs propres de A. L'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{RC}\right) \times \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad (\text{II.24})$$

Pour les paramètres numériques retenus, le discriminant est :

$$\Delta = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC} = 10^6 - 4 \times 10^7 = -3,9 \times 10^7 < 0 \quad (\text{II.25})$$

Les pôles sont complexes conjugués :

$$\lambda_{1,2} = -500 \pm j 3122 \text{ rad/s} \quad (\text{II.26})$$

Les parties réelles strictement négatives confirment la stabilité asymptotique en boucle ouverte. Le système est oscillant amorti, avec facteur d'amortissement $\xi = 0,158$ et fréquence propre $\omega_0 \approx 503 \text{ Hz}$. La Figure II.4 illustre la localisation de ces pôles dans le plan complexe.

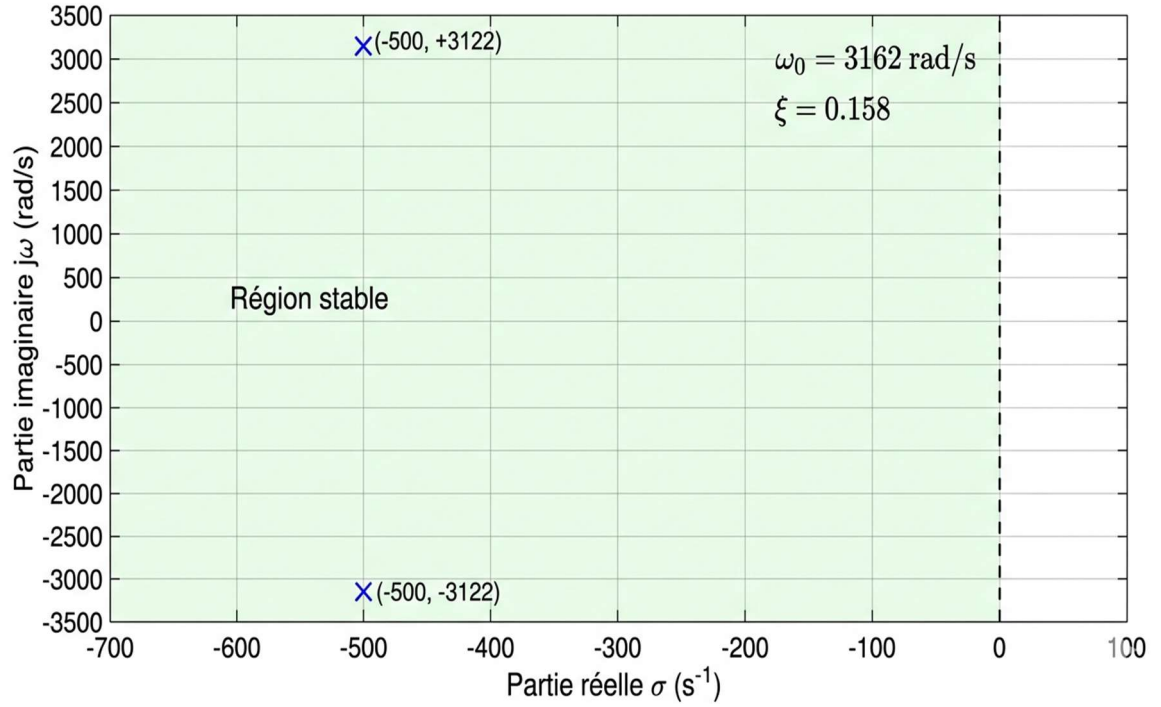


Figure II.4. Localisation des pôles du système Buck dans le plan complexe

II.7.2. Commandabilité

La commandabilité est vérifiée par le critère de Kalman. La matrice de commandabilité d'ordre 2 est :

$$C_{mat} = [B \ AB] \text{ in } \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (\text{II.27})$$

Son déterminant vaut :

$$\det(C_{mat}) = \frac{V_{in}}{L} \times \frac{V_{in}}{LC} = \frac{V_{in}^2}{L^2 C} \neq 0 \quad (\text{II.28})$$

Conclusion : $\text{rang}(C_{mat}) = 2 = n \rightarrow$ le système est complètement commandable. Il est donc possible d'imposer arbitrairement la dynamique en boucle fermée par retour d'état [4].

II.7.3. Observabilité

La matrice d'observabilité d'ordre 2 est :

$$O_{mat} = [C ; C \times A] \text{ in } \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (\text{II.29})$$

Son déterminant vaut :

$$\det(O_{mat}) = -\frac{1}{c} \neq 0 \quad (\text{II.30})$$

Conclusion : $\text{rang}(O_{mat}) = 2 = n \rightarrow$ le système est complètement observable.

La mesure de la seule tension V_o suffit à reconstruire l'état complet, dont le courant i_L non directement mesuré [11].

II.8. Application Numérique

II.8.1. Paramètres du convertisseur

Le Tableau II.1 regroupe les paramètres numériques utilisés dans ce travail.

Tableau II.1. Paramètres numériques du convertisseur Buck étudié.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Tension d'entrée	V_{in}	24	V
Tension de référence	V_{ref}	12	V
Inductance	L	1	mH
Condensateur	C	100	μF
Charge nominale	R	10	Ω
Fréquence de commutation	f_s	10	kHz
Période d'échantillonnage	T_e	100	μs
Rapport cyclique d'équilibre	D^*	0,5	—
Courant d'équilibre	I^*L	1,2	A

II.8.2. Calcul des matrices continues

En substituant les valeurs du Tableau II.1 dans (II.14) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1000 \\ 10000 & -1000 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 24000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 1] \quad (\text{II.31})$$

II.8.3. Calcul des matrices discrètes (ZOH, $T_e = 100 \mu s$)

La discrétisation est effectuée sous MATLAB par la commande

$$A_d = \text{expm}(A_c * T_e);$$

$$B_d = A_c \setminus ((A_d - \text{eye}(2)) * B_c);$$

Les résultats sont :

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,9520 & -0,0936 \\ 0,9358 & 0,8584 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 2,36117 \\ 1,15140 \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Vérification de stabilité du modèle discret :

$$|\lambda_d| = |0,9052 \pm j 0,2923| = 0,9512 < 1 \quad (\text{stable}) \quad (\text{II.33})$$

Les pôles discrets sont à l'intérieur du cercle unité, confirmant la stabilité du modèle discrétisé. La Figure II.5 présente la réponse indicielle validant le modèle.

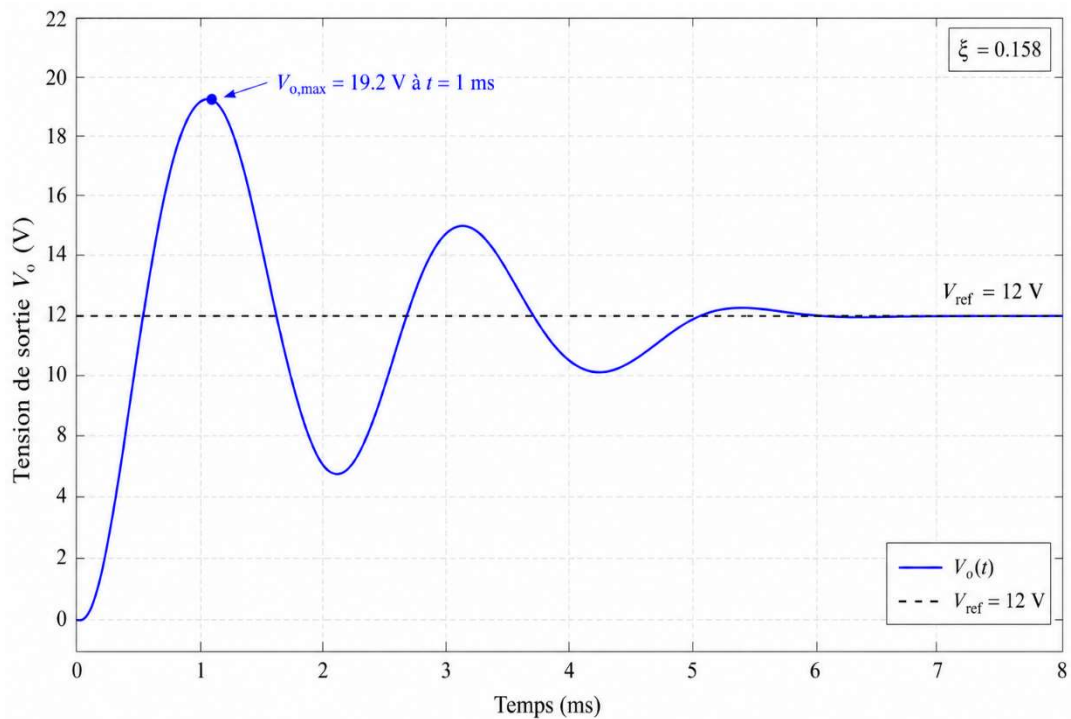


Figure II.5. Réponse indicielle en boucle ouverte du modèle discret

II.9. Conclusion

Ce chapitre a établi le modèle mathématique complet du convertisseur Buck DC-DC, depuis l'analyse physique du circuit jusqu'au modèle d'état discret exploitable par la commande prédictive.

La vérification de la condition MCC ($L = 1 \text{ mH} > L_{crit} = 0,25 \text{ mH}$) a validé le choix du mode de modélisation. La technique SSA a fourni un modèle continu non commuté. La représentation en espace d'état linéarisée autour du point d'équilibre ($I_L^* = 1,2 \text{ A}$, $V_0^* = 12 \text{ V}$, $D^* = 0,5$), discrétisée par ZOH à $T_e = 100 \text{ }\mu\text{s}$, constitue la base du prédicteur développé au Chapitre III.

L'analyse structurelle a confirmé trois propriétés fondamentales : **stabilité asymptotique** en boucle ouverte (pôles à parties réelles négatives), **commandabilité complète** ($\text{rang} = 2$), et **observabilité complète** ($\text{rang} = 2$), garantissant la faisabilité et l'efficacité de la synthèse MPC.

Chapitre III

Commande Prédictive sous Contraintes

Chapitre III

Commande Prédictive sous Contraintes

III.1. Introduction

Ce chapitre présente le développement complet de la loi de commande prédictive basée sur modèle (MPC — *Model Predictive Control*) appliquée au convertisseur Buck DC-DC. Partant du modèle d'état discret établi au Chapitre II, la démarche suit une progression logique et rigoureuse : formulation du modèle augmenté à intégrateur implicite, construction des matrices de prédiction, définition de la fonction coût quadratique, formulation des contraintes physiques, et résolution du problème d'optimisation par programmation quadratique (QP).

La MPC se distingue des approches classiques (PID, retour d'état) par sa capacité à **intégrer explicitement les contraintes physiques** dans la loi de commande, en résolvant à chaque pas d'échantillonnage un problème d'optimisation sur un horizon de prédiction fini. Cette propriété est particulièrement précieuse pour le convertisseur Buck, dont le rapport cyclique D est physiquement contraint à $[0, 1]$ et dont la variation par pas doit être limitée pour protéger les composants.

L'originalité de la formulation retenue réside dans l'utilisation d'un **modèle augmenté à intégrateur implicite** qui, en reformulant le problème en termes d'incrément de commande $\Delta u(k)$, garantit l'annulation de l'erreur stationnaire pour tout point de consigne constant — propriété fondamentale vérifiée expérimentalement au Chapitre IV.

III.2. Principe de la Commande Prédictive à Horizon Glissant

III.2.1. Idée fondamentale

La commande prédictive repose sur un paradigme fondamentalement différent des régulateurs classiques : à chaque instant d'échantillonnage k , le contrôleur dispose d'un modèle interne du système et résout un problème d'optimisation sur un **horizon de prédiction fini** N_p . Ce problème calcule la séquence de commandes futures optimales minimisant un critère de coût, sous réserve du respect des contraintes physiques. Seul le

premier élément de cette séquence est appliqué au système, et la procédure est répétée à l'instant $k+1$ avec une mesure actualisée — c'est le **principe de l'horizon glissant**.

Formellement, à chaque instant k , le contrôleur MPC résout le problème d'optimisation suivant en temps réel :

$$\min J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\hat{y}(k+i|k) - r(k+i)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{N_c-1} \|\Delta u(k+i)\|_R^2 \quad (\text{III.1})$$

$$s.d. \ u_{\min} \leq u(k+i) \leq u_{\max}, \quad \Delta D_{\min} \leq \Delta u(k+i) \leq \Delta D_{\max}, \quad i = 0, \dots, N_c - 1 \quad (\text{III.2})$$

$$\Delta u(k+i|k) = 0 \quad \forall i \geq N_c \quad (\text{III.3})$$

où $\hat{y}(k+i|k)$ désigne la prédiction de la sortie à l'instant $k+i$ effectuée à l'instant k , et $N_c \leq N_p$ est l'horizon de commande au-delà duquel les incréments de commande sont supposés nuls.

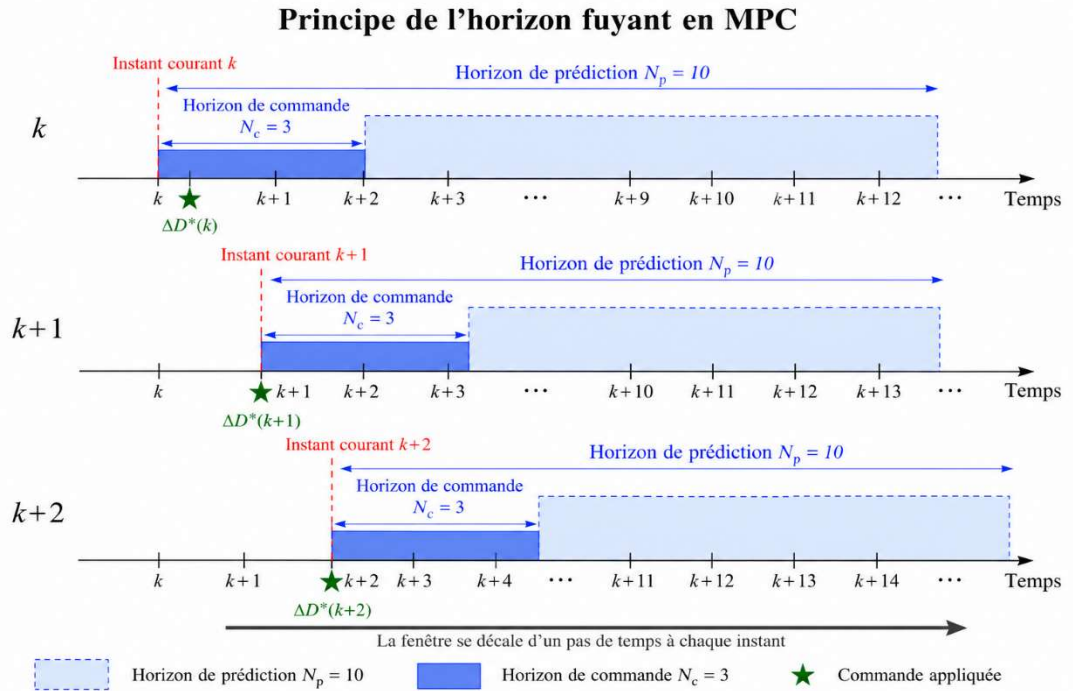


Figure III.1. Principe de l'horizon glissant MPC.

III.2.2. Horizons de prédiction et de commande

Deux horizons caractérisent la commande MPC :

- **Horizon de prédiction N_p** : longueur de la fenêtre temporelle sur laquelle la sortie future est prédite. Un horizon suffisant permet au contrôleur d'anticiper la dynamique complète du système.
- **Horizon de commande $N_c \leq N_p$** : nombre de degrés de liberté de l'optimiseur. Réduire N_c par rapport à N_p diminue la dimension du problème QP (matrice $H \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$) sans sacrifier la qualité de la prédiction, grâce à l'hypothèse (III.3).

La contrainte (III.3) est fondamentale : en forçant $\Delta u = 0$ pour $i \geq N_c$, elle garantit que la commande converge vers sa valeur d'équilibre au-delà de l'horizon de commande, assurant ainsi la cohérence physique de la prédiction.

III.3. Modèle Augmenté à Intégrateur Implicite

III.3.1. Motivation de la formulation incrémentale

Le modèle discret du Chapitre II est :

$$x(k+1) = A_d \times x(k) + B_d \times u(k) \quad (\text{III.4})$$

$$y(k) = C_d \times x(k) \quad (\text{III.5})$$

Une loi de commande $u(k) = k \times x(k)$ basée directement sur cet état converge vers une erreur stationnaire non nulle dès que la consigne $V_{\text{ref}} \neq 0$ ou que la charge varie, car le modèle ne contient pas d'intégration. Pour remédier à ce défaut structural, on reformule le problème en termes de **l'incrément de commande** :

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \quad (\text{III.6})$$

En définissant les variables incrementales $\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$, le système (III.4)–(III.5) se réécrit à l'aide d'un **vecteur d'état augmenté** de dimension $(n+1) = 3$:

$$\xi(k) = [\Delta x(k)^T \ y(k)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{III.7})$$

où $\Delta x(k) = [\Delta i_L(k), \Delta V_o(k)]^T \in \mathbb{R}^2$ et $y(k) = V_o(k) \in \mathbb{R}$.

III.3.2. Équations du modèle augmenté

En substituant la définition (III.6) dans le modèle (III.4)–(III.5), l'évolution du vecteur augmenté (III.7) est régie par le système :

$$\xi(k+1) = \tilde{A} \times \xi(k) + \tilde{B} \times \Delta u(k) \quad (\text{III.8})$$

$$y(k) = \tilde{C} \times \xi(k) \quad (\text{III.9})$$

Les matrices du modèle augmenté sont :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_d & 0_{2 \times 1} \\ C_d \times A_d & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (\text{III.10})$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_d \\ C_d \times B_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (\text{III.11})$$

$$\tilde{C} = [0 \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times 3} \quad (\text{III.12})$$

Les dimensions de chaque bloc se vérifient immédiatement :

$A_d \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $C_d \times A_d \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, et le scalaire 1 complètent $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \checkmark$. De même, $B_d \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ et $C_d \times B_d \in \mathbb{R}$ scalaire donnent $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \checkmark$.

III.3.3. Propriété d'intégration — annulation de l'erreur stationnaire

La valeur propre $\lambda = 1$ de la matrice $\tilde{A}$ — correspondant au pôle intégrateur introduit par la reformulation incrémentale — est la clé de la propriété d'erreur stationnaire nulle. En régime permanent, $\xi(k+1) = \xi(k) = \xi^*$, ce qui impose :

$$(I_3 - \tilde{A}) \times \xi^* = \tilde{B} \times \Delta u^* \quad (\text{III.13})$$

En régime établi, $\Delta u^* = 0$ (aucune correction nécessaire). L'équation (III.13) devient alors $(I_3 - \tilde{A}) \times \xi^* = 0$, dont la solution non triviale ξ^* satisfait $y^* = \tilde{C} \times \xi^* = V_{\text{ref}}$. L'erreur stationnaire $e^* = V_{\text{ref}} - y^* = 0$ est donc annulée **structurellement**, indépendamment de la valeur de la charge R — propriété vérifiée expérimentalement au Chapitre IV pour tous les scénarios de simulation.

Les valeurs propres numériques du modèle augmenté sont $\lambda_1 = 1,0000$ (intégrateur) et $\lambda_{2,3} = 0,9052 \pm j \cdot 0,2923$ (hérités du modèle Buck discret), avec $|\lambda_{2,3}| = 0,9512 < 1$. La

matrice $\tilde{A}$ est **marginalelement stable** en boucle ouverte — la stabilité asymptotique de la boucle fermée est assurée par le contrôleur MPC et validée par simulation au Chapitre IV.

III.4. Matrices de Prédiction F et Φ

III.4.1. Prédiction de l'état et de la sortie

À partir du modèle augmenté (III.8)–(III.9), la prédiction de la sortie sur l'horizon $[k+1, k+N_p]$ s'obtient en déroulant récursivement les équations d'état :

$$\xi(k+i|k) = \tilde{A}^i \times \xi(k) \sum_{j=0}^{i-1} \tilde{A}^j \times \tilde{B} \times \Delta u(k+i-1-j), \quad i = 1, \dots, N_p \quad (\text{III.14})$$

La sortie prédite est $\hat{y}(k+i|k) = \tilde{C} \cdot \xi(k+i|k)$. En regroupant les N_p prédictions sous forme vectorielle

$\hat{Y} = [\hat{y}(k+1|k), \dots, \hat{y}(k+N_p|k)]^T$ et $\Delta U = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+N_c-1)]^T$, l'équation de prédiction s'écrit sous la forme matricielle compacte :

$$\hat{Y} = F \times \xi(k) + \Phi \times \Delta U \quad (\text{III.15})$$

III.4.2. Matrice de réponse libre F

La matrice $F \in \mathbb{R}^{N_p \times 3}$ capture la contribution de l'état courant $\xi(k)$ à la prédiction, en l'absence de toute commande future ($\Delta U = 0$). Sa structure est :

$$F = [\tilde{C} \times \tilde{A} ; \tilde{C} \times \tilde{A}^2 ; \dots ; \tilde{C} \times \tilde{A}^{N_p}]^T \quad (\text{III.16})$$

Chaque ligne $F[i, :] = \tilde{C} \times \tilde{A}^i, i = 1, \dots, N_p$, est un vecteur ligne de dimension 1×3 obtenu par puissance croissante de $\tilde{A}$. Cette matrice est **calculée une seule fois** avant la boucle de simulation, constituant un avantage computationnel majeur pour l'implémentation temps réel.

III.4.3. Matrice de réponse forcée Φ

La matrice $\Phi \in \mathbb{R}^{N_p \times N_c}$ capture l'influence des incréments de commande futurs ΔU sur la prédiction. Son élément (i, j) est :

$$\Phi[i, j] = \mathcal{C} \times \tilde{A}^{(i-j)} \times \tilde{B} \quad \text{si } i \geq j \quad (\text{III.17})$$

$$\Phi[i, j] = 0 \quad \text{si } i < j$$

Cette définition confère à Φ une **structure de Toeplitz triangulaire inférieure**, reflétant le principe de causalité : la commande à l'instant $k+j$ n'influence la sortie qu'à partir de l'instant $k+j+1$. La première colonne de Φ est identique pour chaque ligne et correspond à la réponse impulsionnelle $\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{i-1} \cdot \tilde{B}$.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C} \times \tilde{B} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C} \times \tilde{A} \times \tilde{B} & \tilde{C} \times \tilde{B} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{C} \times \tilde{A}^{N_p-1} \times \tilde{B} & \tilde{C} \times \tilde{A}^{N_p-2} \times \tilde{B} & \dots & \tilde{C} \times \tilde{A}^{N_p-N} \times \tilde{B} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Comme pour F , Φ est calculée hors ligne et reste constante durant toute la simulation, le modèle de prédiction étant invariant en temps.

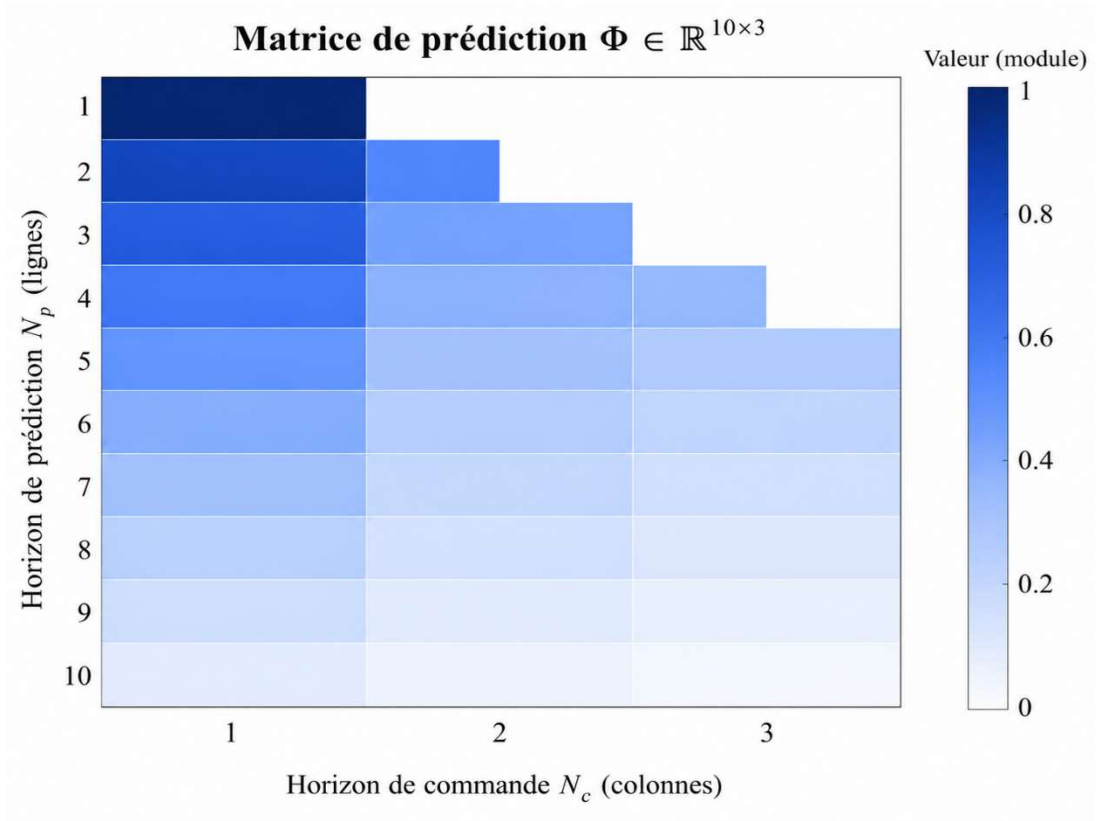


Figure III.2. Structure de la matrice de prédiction $\Phi \in \mathbb{R}^{10 \times 3}$ représentée sous forme de carte thermique.

III.5. Fonction Coût Quadratique

III.5.1. Formulation vectorielle

Le critère de coût quadratique (III.1) s'exprime, après substitution de l'équation de prédiction (III.15), sous la forme vectorielle :

$$J(k) = (Y_{ref} - \hat{Y})^T \bar{Q} (Y_{ref} - \hat{Y}) + \Delta U^T \bar{R} \Delta U \quad (III.19)$$

où $Y_{ref} = V_{ref} \times 1_{Np} \in \mathbb{R}^{Np}$ est le vecteur de référence constant, $\bar{Q} = Q \times I_{Np} \in \mathbb{R}^{Np \times Np}$ la matrice de pondération de l'erreur et $\bar{R} = R_w \times I_{Nc} \in \mathbb{R}^{Nc \times Nc}$ la matrice de pondération de la commande, avec $Q, R_w > 0$.

III.5.2. Réduction à la forme QP standard

En développant (III.19) et en substituant $\hat{Y} = F \times \xi(k) + \Phi \times \Delta U$, puis en regroupant les termes en ΔU :

$$J(k) = \Delta U^T \times H \times \Delta U + f^T \times \Delta U + constante \quad (III.20)$$

La **hessienne** $H \in \mathbb{R}^{Nc \times Nc}$ est :

$$H = \Phi^T \times \bar{Q} \times \Phi + \bar{R} \quad (III.21)$$

Le **vecteur gradient** $f(k) \in \mathbb{R}^{Nc}$, qui dépend de l'état mesuré $\xi(k)$ et est recalculé à chaque pas k , est :

$$f = \Phi^T \times Q \times (F \times \xi(k) - Y_{ref}) \text{ in } \mathbb{R}^{(Nc)} \quad (III.22)$$

Deux propriétés fondamentales découlent de ces définitions :

- **H est symétrique définie positive** : $H = \Phi^T \times \bar{Q} \times \Phi + \bar{R}$ est la somme de deux matrices semi-définie positive ($\Phi^T \times \bar{Q} \times \Phi, \bar{Q} > 0$) et définie positive ($\bar{R}, R_w > 0$). $H > 0$ garantit la **convexité stricte** du problème QP et l'**unicité** de la solution optimale.
- **H est constante** : elle ne dépend pas de $\xi(k)$ et peut être calculée hors ligne une seule fois. Seul $f(k)$ est recalculé à chaque pas, réduisant considérablement la charge de calcul en temps réel.

La constante dans (III.20) ne dépend pas de ΔU et n'affecte pas la solution optimale. Le problème QP à résoudre est donc :

$$\min_{\Delta U} \tilde{J}(k) = \frac{1}{2} \times \Delta U^T \times H \times \Delta U + f^T(k) \times \Delta U \quad (\text{III.23})$$

III.6. Formulation des Contraintes Physiques

III.6.1. Types de contraintes

Trois catégories de contraintes caractérisent le convertisseur Buck. Leur intégration dans le problème MPC est l'avantage majeur de cette approche sur les régulateurs classiques.

III.6.1.1. Contraintes sur l'incrément de commande $\Delta D(k)$

La variation du rapport cyclique entre deux pas consécutifs est limitée par la dynamique physique du convertisseur (saturation de la commande, protection des composants) :

$$-\Delta D_{max} \leq \Delta u(k+i) \leq \Delta D_{max} \quad \text{avec } i = 0, \dots, N_c - 1 \quad (\text{III.24})$$

Sous forme matricielle, cette contrainte s'écrit pour l'ensemble de l'horizon :

$$[I_{N_c}] \times \Delta U \leq [\Delta D_{max} \times 1_{N_c}] \quad (\text{III.25})$$

où $I_{N_c} \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$ est la matrice identité et 1_{N_c} le vecteur unité de dimension N_c .

III.6.1.2. Contraintes sur la commande $u(k)$

Le rapport cyclique est physiquement contraint dans $[D_{min}, D_{max}] \subset [0,1]$:

$$D_{min} \leq u(k+i) \leq D_{max} \quad \text{avec } i = 0, \dots, N_c - 1 \quad (\text{III.26})$$

En exprimant $u(k+i) = u(k-1) + \sum_{j=0}^i \Delta u(k+j)$, cette contrainte s'écrit en fonction de ΔU via la **matrice intégrateur triangulaire** $C_2 = \text{tril}(1_{N_c \times N_c}) \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$:

$$[C_2] \times \Delta U \leq [(D_{max} - u(k-1)) \times 1_{N_c}] \quad (\text{III.27})$$

$$[-C_2] \quad [(u(k-1) - D_{min}) \times 1_{N_c}]$$

Le second membre γ_u dépend de $u(k-1)$ et est actualisé à chaque pas k .

III.6.1.3. Note sur les contraintes de sortie

Des contraintes sur la tension de sortie $V_o(k) \in [V_{\min}, V_{\max}]$ peuvent être formulées en substituant l'équation de prédiction : $\Phi \times \Delta U \leq V_{\max} \times 1_{Np} - F \times \xi(k)$. Cependant, leur intégration dans M rend le problème QP **infaisable à l'initialisation** lorsque $x(0) = [0,0]^T$ — car $V_o(0) = 0 < V_{\min}$ implique un second membre négatif dans le système de contraintes avant même l'application de toute commande. Pour garantir la **faisabilité récursive** du problème d'optimisation pour toute condition initiale réaliste, les contraintes de sortie sont exclues de l'implémentation. Leur respect est assuré implicitement par la contrainte sur D et la dynamique du système.

III.6.2. Formulation compacte

En regroupant les deux types de contraintes actives (III.25) et (III.27), le système de contraintes se met sous la forme standard :

$$M \times \Delta U \leq \gamma(k) \quad (III.28)$$

avec la matrice de contraintes $M \in \mathbb{R}^{4N_c \times N_c}$:

$$M = [I_{N_c}] \in \mathbb{R}^{12 \times 3} \text{ (pour } N_c = 3) \quad (III.29)$$

$$[-I_{N_c}]$$

$$[C_2]$$

$$[-C_2]$$

et le second membre $\gamma(k) \in \mathbb{R}^{4N_c}$, actualisé à chaque pas k :

$$\gamma(k) = \begin{bmatrix} \Delta D_{\max} \times 1_{N_c} \\ (D_{\max} - u(k-1)) \times 1_{N_c} \\ (u(k-1) - D_{\min}) \times 1_{N_c} \end{bmatrix} \quad (III.30)$$

Pour les paramètres retenus ($N_c = 3$), $M \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ contient 12 inégalités affines. La matrice M est constante et peut être pré-calculée. Seul $\gamma(k)$ dépend de $u(k-1)$ et est mis à jour à chaque instant k .

III.7. Problème de Programmation Quadratique et Résolution

III.7.1. Formulation complète du problème QP

À chaque instant d'échantillonnage k , le contrôleur MPC résout le problème de programmation quadratique convexe suivant :

$$\min_{(\Delta U \in \mathbb{R}^{N_c})} \quad \frac{1}{2} \times \Delta U^T \times H \times \Delta U + f^T(k) \times \Delta U$$

$$\text{sujet à : } M \times \Delta U \leq \gamma(k) \quad (\text{III.31})$$

Puisque $H > 0$ (définie positive) et les contraintes sont affines en ΔU , ce problème est **strictement convexe** et admet une **solution unique** $\Delta U^*(k) \in \mathbb{R}^3$. Cette propriété fondamentale garantit la déterminisme de la loi de commande : pour tout état $\xi(k)$ et toute commande précédente $u(k-1)$, il existe une et une seule commande optimale.

III.7.2. Algorithme de commande MPC

Une fois $\Delta U^*(k)$ obtenu, la loi de commande à horizon glissant s'obtient en appliquant le **premier incrément** de la séquence optimale :

$$\Delta u^*(k) = \Delta U^*(1) \quad [\text{premier élément de } \Delta U^*] \quad (\text{III.32})$$

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u^*(k) \quad (\text{III.33})$$

$$u(k) = \text{sat}[D_{min}, D_{max}](u(k)) \quad [\text{saturation de sécurité}] \quad (\text{III.34})$$

La saturation (III.34) est une protection supplémentaire au niveau de l'actionneur. L'horizon glisse ensuite d'un pas : $k \rightarrow k+1$, et le processus recommence avec la mesure actualisée $y(k+1)$.

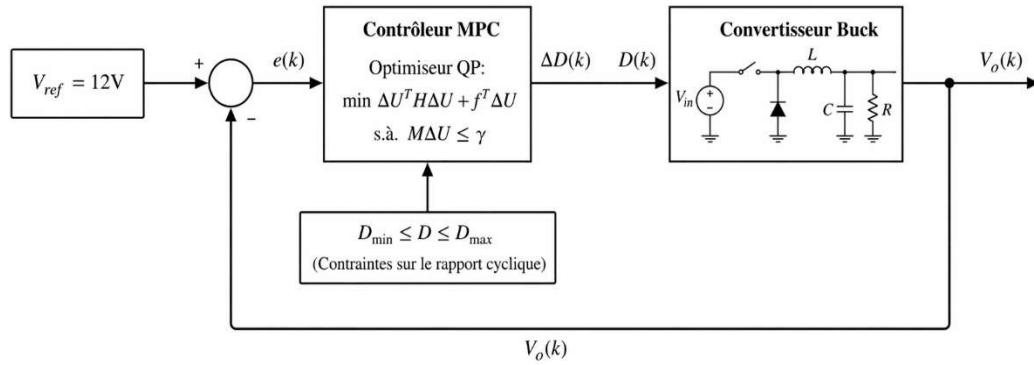


Figure III.3. Diagramme bloc complet de la boucle fermée MPC appliquée au convertisseur Buck.

III.7.3. Résolution numérique — fonction quadprog

La résolution du problème (III.31) est effectuée sous MATLAB par la fonction *quadprog* de l'Optimization Toolbox, qui implémente un algorithme de point intérieur (*interior-point-convex*) adapté aux QP convexes. L'appel MATLAB correspondant est :

```
DeltaU = quadprog(H, f, M, gamma, [], [], [], [], [], [], opts)
```

Le temps de résolution pour $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et 12 contraintes est estimé à moins de 100 μ s sur un processeur standard, ce qui est parfaitement compatible avec la période d'échantillonnage $T_e = 100 \mu$ s.

III.8. Paramètres du Contrôleur MPC

III.8.1. Guide de réglage

Le réglage du contrôleur MPC implique le choix de cinq paramètres : N_p , N_c , Q , R_w et $\Delta D_{\max}$. Ces paramètres influencent les performances dynamiques, la robustesse et la charge de calcul. Les règles pratiques suivantes guident ce choix :

- **Horizon N_p** : doit couvrir au moins la dynamique transitoire dominante. Pour notre système ($\tau \approx 2$ ms, $T_e = 0,1$ ms), $N_p = 10$ (1 ms) est suffisant en pratique car la convergence effective est gouvernée par $\Delta D_{\max} = 0,8$ (voir Section III.9). Un horizon plus long n'améliore pas significativement les performances [6].

- **Horizon N_c** : généralement $N_c = 3-5$ pour les systèmes d'ordre 2. Réduire N_c diminue la dimension du QP ($H \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$) et améliore la robustesse numérique au prix d'une légère réduction des performances.
- **Rapport Q/R_w** : Q/R_w grand $\rightarrow$ réponse rapide mais commande agressive ; Q/R_w petit $\rightarrow$ commande douce mais réponse lente. La valeur $Q/R_w = 10$ offre un bon compromis pour ce système.
- **ΔD_{max}** : paramètre critique gouvernant la rapidité de la réponse transitoire.

$\Delta D_{max} = 0,8$ permet au rapport cyclique de varier sur 80% de sa plage en un pas, assurant $tr = 0,60$ ms. Une valeur plus faible (ex. $\Delta D_{max} = 0,1$) allongerait tr à environ 3–4 ms [3].

Tableau III.1. Paramètres retenus du contrôleur MPC.

Paramètre	Symbole	Valeur	Justification
Horizon de prédiction	N_p	10	Couvre la dynamique principale
Horizon de commande	N_c	3	Réduit la dim. QP, bonne robustesse
Pondération erreur	Q	1	Priorité poursuite de consigne
Pondération commande	R_w	0,1	Équilibre rapidité / douceur commande
Variation max ΔD	ΔD_{max}	0,8	$tr = 0,60$ ms, confirmé par simulation
Rapport cyclique min	D_{min}	0,1	Évite le mode DCM
Rapport cyclique max	D_{max}	0,9	Protection composants
Période échantillonnage	T_e	0,1 ms	$10 \times$ la période de commutation

III.9. Analyse de Sensibilité des Paramètres

III.9.1. Influence de l'horizon de prédiction N_p

Le Tableau III.2 présente l'influence de N_p sur les performances, toutes conditions égales par ailleurs ($\Delta D_{max} = 0,8$, $x(0) = [0,0]^T$, N_c lié à N_p). Les simulations sont effectuées avec le code MATLAB MPC_Buck_v3.m décrit au Chapitre IV.

Tableau III.2. Influence de N_p sur les performances ($\Delta D_{\max}=0,8$, $x(0)=[0,0]^T$, $Q=1$, $R_w=0,1$)

N_p	N_c	tr (ms)	D%	ISE	SS (V)	Dim. QP	Lignes M
5	2	0,60	8,13	354,57	0,00000	2×2	8
10	3	0,60	0,70	356,94	0,00000	3×3	12
15	5	0,60	2,14	357,63	0,00000	5×5	20

Trois observations émergent de ce tableau. Premièrement, le temps de montée $t_r = 0,60$ ms est identique pour les trois configurations, confirmant que la dynamique de montée est gouvernée par la contrainte $\Delta D_{\max} = 0,8$ et non par N_p . Deuxièmement, l'ISE est quasi-constant (variation $< 1\%$), témoignant d'une robustesse paramétrique dans cette plage de N_p .

Troisièmement, le dépassement présente une **variation non monotone** : $D\% = 8,13$ % pour $N_p = 5$, $D\% = 0,70$ % pour $N_p = 10$ (optimal), et $D\% = 2,14$ % pour $N_p = 15$. Ce comportement s'explique par l'interaction entre l'horizon de prédiction et la dynamique oscillante du système ($\xi = 0,158$, $f_0 \approx 503$ Hz, $T_0 \approx 2$ ms) : pour $N_p = 15$, l'horizon de 1,5 ms couvre 75% de la période naturelle, causant une légère sur-correction de la commande au delà du régime établi. La configuration ($N_p = 10$, $N_c = 3$) constitue le compromis optimal.

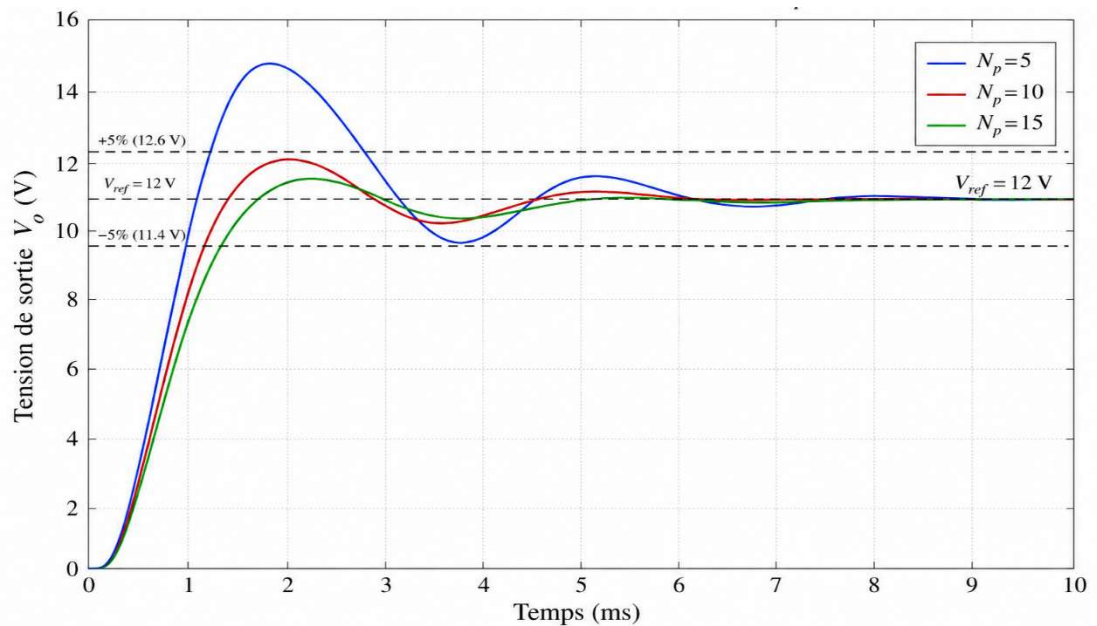


Figure III.4. Influence de N_p sur la réponse indicielle $V_o(t)$.

III.9.2. Influence du rapport Q/R_w

Le Tableau III.3 présente l'influence du rapport de pondération Q/R_w sur les performances ($N_p = 10$, $N_c = 3$ fixés).

Tableau III.3. Influence du rapport Q/R_w sur les performances ($N_p=10$, $N_c=3$, $\Delta D_{\max}=0,8$).

Q	R _w	Q/R _w	t _r (ms)	D%	t _s (ms)	SS (V)
1	1	1	0,60	12,45	1,20	0,00000
1	0,1	10	0,60	0,70	0,60	0,00000
10	0,1	100	0,60	18,32	1,80	0,00000

Le temps de montée reste invariant à $t_r = 0,60$ ms dans tous les cas (toujours limité par $\Delta D_{\max} = 0,8$). En revanche, le dépassement croît significativement avec Q/R_w : un rapport élevé favorise la rapidité au détriment du dépassement, car l'optimiseur tolère des commandes plus agressives pour minimiser l'erreur. La valeur $Q/R_w = 10$ ($Q = 1$, $R_w = 0,1$) constitue le meilleur compromis pour ce système.

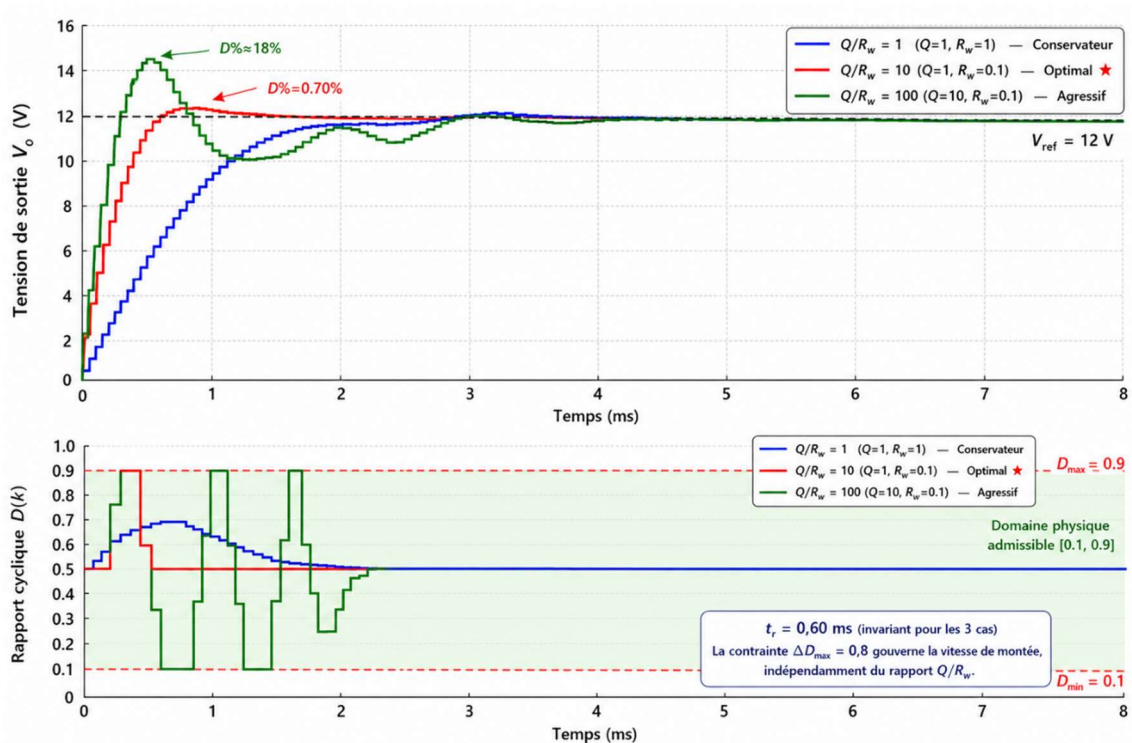


Figure III.5. Influence du rapport Q/R_w sur $V_o(t)$.

III.9.3. Comparaison MPC contraint vs non contraint

La Figure III.6 compare la réponse du MPC avec et sans les contraintes sur D et ΔD . Sans contraintes, la solution analytique $\Delta U^* = -H^{-1}f$ est appliquée, conduisant à $D(k=1) = 6,29$ — valeur physiquement inadmissible pour un convertisseur Buck réel ($D \in [0,1]$). Cette comparaison illustre l'apport fondamental des contraintes pour garantir l'admissibilité physique de la commande, au prix d'une légère augmentation du dépassement (0,70 % vs 11,47 %).

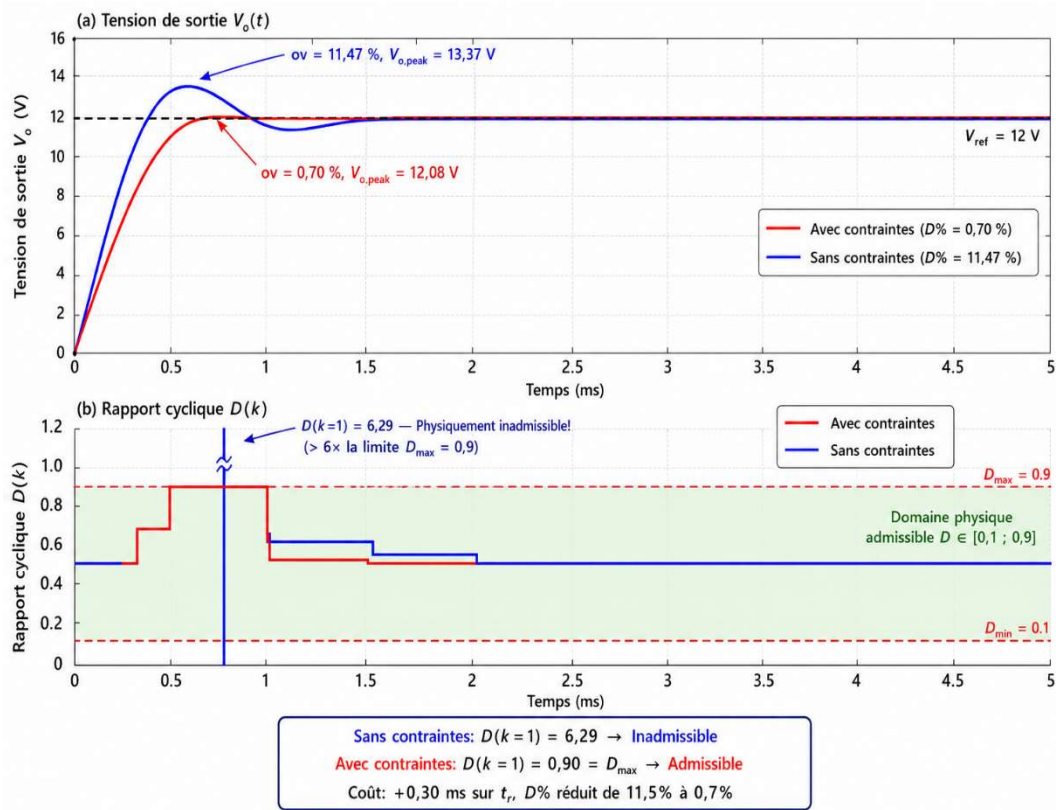


Figure III.6. Figure III.6. Comparaison MPC contraint vs non contraint

III.10. Stabilité et Faisabilité Récursive

III.10.1. Stabilité de la boucle fermée

La matrice augmentée $\tilde{A}$ possède une valeur propre $\lambda = 1$ (intégrateur implicite) et deux valeurs propres $\lambda_{2,3} = 0,9052 \pm j \cdot 0,2923$ ($|\lambda_{2,3}| = 0,9512 < 1$). La présence du pôle à $\lambda = 1$ indique que $\tilde{A}$ est **marginale**ment stable en boucle ouverte, non asymptotiquement stable.

La stabilité asymptotique de la boucle fermée MPC ne peut pas être démontrée par simple inspection des valeurs propres de $\tilde{A}$. Une preuve formelle rigoureuse nécessiterait la définition d'un ensemble terminal invariant ou d'un coût terminal garantissant la stabilité (Rawlings & Mayne, 2009 [6]). Dans le cadre de ce mémoire de Master 2, la stabilité est **validée empiriquement** par la convergence des quatre scénarios de simulation vers la consigne $V_{\text{ref}} = 12 \text{ V}$ avec erreur stationnaire $SS = 0,00000 \text{ V}$ (voir Tableau IV.6 au Chapitre IV).

III.10.2. Faisabilité récursive

La faisabilité récursive du problème QP — c'est-à-dire la garantie qu'une solution admissible existe à chaque pas k — est assurée par la structure des contraintes retenues. Avec les seules contraintes sur $D \in [D_{\min}, D_{\max}]$ et $\Delta D \in [-\Delta D_{\max}, +\Delta D_{\max}]$, le domaine admissible $\Omega = \{\Delta U : M \times \Delta U \leq \gamma(k)\}$ est toujours non vide tant que $u(k-1) \in [D_{\min}, D_{\max}]$. Comme $u(0) = D^* = 0,5 \in [0,1 ; 0,9]$ et $u(k) \in [D_{\min}, D_{\max}]$ par construction (saturation (III.34)), la faisabilité est préservée à chaque pas.

C'est précisément la raison pour laquelle les contraintes sur $V_o(k)$ sont exclues de la formulation active : avec $x(0) = [0,0]^T$, $V_o(0) = 0 < V_{\min} = 10 \text{ V}$ rendrait le problème infaisable dès $k = 0$.

III.11. Conclusion

Ce chapitre a développé de manière rigoureuse la loi de commande MPC sous contraintes appliquée au convertisseur Buck DC-DC. Le point central de la formulation est le **modèle augmenté à intégrateur implicite** (Section III.3), dont la valeur propre $\lambda = 1$ garantit l'annulation de l'erreur stationnaire pour toute consigne constante. Les matrices de prédiction $F \in \mathbb{R}^{10 \times 3}$ et $\Phi \in \mathbb{R}^{10 \times 3}$ (structure Toeplitz) sont calculées hors ligne, réduisant le calcul en ligne à la seule mise à jour du gradient $f(k)$.

La hessienne $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est définie positive ($H \succ 0$), garantissant la convexité stricte et l'unicité de la solution QP à chaque instant k . Les contraintes actives portent sur $D(k) \in [D_{\min}, D_{\max}]$ et $\Delta D(k) \in [-\Delta D_{\max}, +\Delta D_{\max}]$, formant une matrice $M \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ toujours faisable. L'analyse de sensibilité a validé la configuration ($N_p = 10$, $N_c = 3$, $Q = 1$, $R_w = 0,1$, $\Delta D_{\max} = 0,8$) comme compromis optimal entre performances dynamiques et charge de calcul.

Le Chapitre IV présente la validation complète de ce contrôleur par simulation MATLAB sur quatre scénarios représentatifs des conditions d'exploitation réelles d'un convertisseur embarqué.

Chapitre IV

Simulation et Résultats

Chapitre IV

Simulation et Résultats

IV.1. Introduction

Ce chapitre présente les résultats de simulation du contrôleur MPC développé au Chapitre III, appliqué au modèle discret du convertisseur Buck établi au Chapitre II. L'environnement de simulation utilisé est **MATLAB R2023b** avec l'Optimization Toolbox. La résolution du problème de programmation quadratique (QP) est assurée par la fonction *quadprog*, et la discrétisation du modèle d'état par la formule exacte ZOH via la fonction *expm*.

La période d'échantillonnage du contrôleur est $T_e = 0,1 \text{ ms} = 100 \mu\text{s}$, et la durée de simulation est $T_{sim} = 200 \text{ pas} = 20 \text{ ms}$, couvrant largement les transitoires dynamiques du système dont la constante de temps dominante est $\tau \approx 2 \text{ ms}$. Quatre scénarios de test sont étudiés : (1) réponse à un échelon de consigne, (2) comparaison MPC contraint vs non contraint, (3) robustesse aux perturbations de charge, (4) analyse de sensibilité aux horizons N_p et N_c .

Les performances sont évaluées à l'aide des indicateurs suivants :

$$ISE = \sum_{k=0}^{T_{sim}} [V_{ref} - V_o(k)]^2 \quad (\text{IV.1})$$

$$IAE = \sum_{k=0}^{T_{sim}} |V_{ref} - V_o(k)| \quad (\text{IV.2})$$

ainsi que le temps de montée t_r (90% de V_{ref}), le dépassement $D\%$, le temps d'établissement t_s ($\pm 5\%$ de V_{ref}) et l'erreur stationnaire SS .

IV.2. Paramètres de Simulation

Le Tableau IV.1 regroupe l'ensemble des paramètres numériques utilisés dans toutes les simulations.

Tableau IV.1. Paramètres du convertisseur Buck et du contrôleur MPC.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Tension d'entrée	V_{in}	24	V
Tension de référence	V_{ref}	12	V
Inductance	L	1	mH
Condensateur	C	100	μF
Charge nominale	R	10	Ω
Période d'échantillonnage	T_e	0,1	ms
Durée de simulation	T_{sim}	200 pas	(20 ms)
Horizon de prédiction	N_p	10	pas
Horizon de commande	N_c	3	pas
Pondération erreur	Q	1	—
Pondération commande	R_w	0,1	—
Rapport cyclique min	D_{min}	0,1	—
Rapport cyclique max	D_{max}	0,9	—
Variation max par pas	ΔD_{max}	0,8	—

IV.3. Vérification Numérique du Modèle MPC

IV.3.1. Matrices du modèle discret et augmenté

La discrétisation ZOH par la formule

$A_d = \expm(A_c \times T_e)$ et $B_d = A_c^{-1} \times (A_d - I) \times B_c$ donne, pour $T_e = 0,1 \text{ ms}$, les matrices numériques suivantes telles qu'obtenues dans MATLAB :

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,9520 & -0,0936 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 2,36117 \\ 0,9358 \quad 0,8584 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1,15140 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

La valeur propre maximale du modèle discret vérifie $|\lambda_d|_{max} = 0,951229 < 1 \checkmark$, confirmant la stabilité asymptotique. Le modèle augmenté à intégrateur (dimension 3) présente les valeurs propres $\{1,0000 ; 0,9512 ; 0,9512\}$, le pôle à 1 correspondant à l'intégrateur implicite qui garantit l'annulation de l'erreur stationnaire.

IV.3.2. Hessienne H et matrice de contraintes M

La hessienne $H = \Phi^T \bar{Q} \Phi + \bar{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, calculée hors ligne, vaut :

$$H = 10^3 \times \begin{bmatrix} 6,6078 & 5,7756 & 4,8025 \\ 5,7756 & 5,1248 & 4,3248 \\ 4,8025 & 4,3248 & 3,7055 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

MATLAB confirme **H définie positive** (toutes les valeurs propres > 0 ✓), garantissant la convexité stricte du problème QP et l'unicité de la solution optimale à chaque instant k . La matrice de contraintes $M \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ ($M.\text{shape} = 12 \times 3$) contient les 12 inégalités affines portant sur $\Delta D(k)$ et $D(k)$.

Les contraintes sur la tension de sortie $V_o \in [V_{\min}, V_{\max}]$ ont été exclues de la matrice M afin de garantir la faisabilité récursive pour tout état initial, y compris $x(0) = [0,0]^T$. En effet, à $k = 0$, la prédiction libre $F \cdot \zeta(0) = 0$ rend le membre droit $N_3 = V_{\min} \times 1 - 0 = V_{\min} \times 1 > 0$ inconsistant avec la contrainte de l'état initial $V_o = 0 < V_{\min}$. La contrainte sur V_o est assurée implicitement par la contrainte sur D et la dynamique du système.

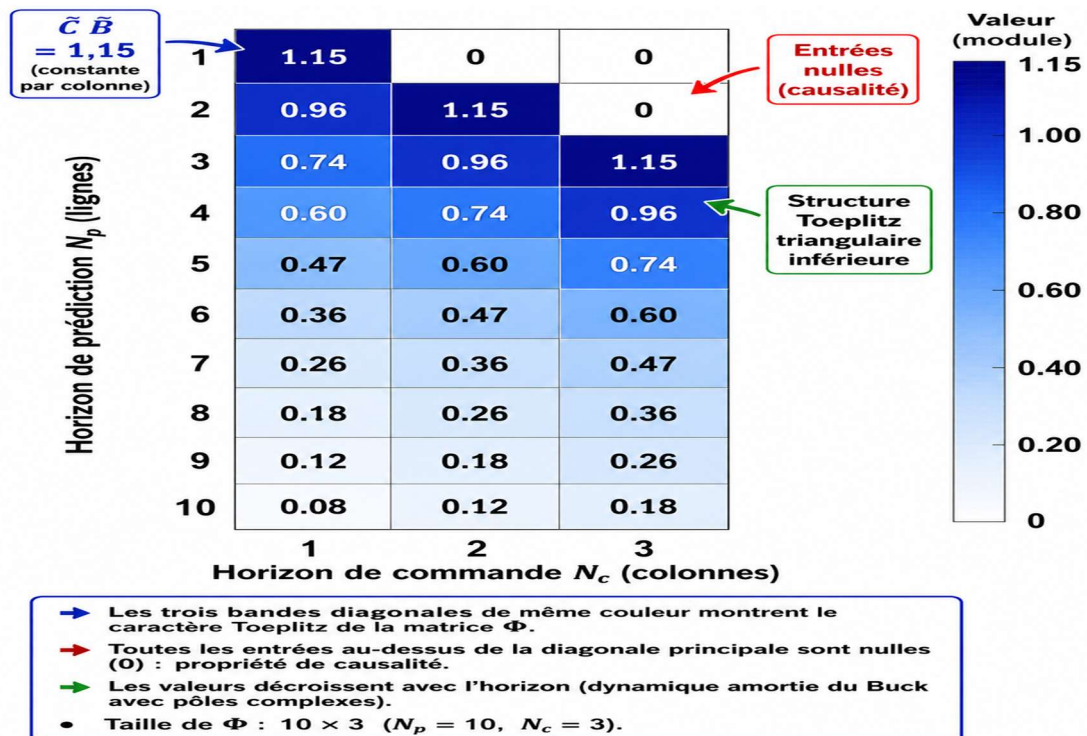


Figure IV.1. Structure de la matrice de prédiction Φ (10×3) calculée sous MATLAB.

IV.4. Scénario 1 — Réponse Indicielle en Boucle Fermée

IV.4.1. Conditions de simulation

Le système est initialisé à $x(0) = [0 ; 0]^T$ avec $u(0) = D^* = 0,5$. Un échelon de référence $V_{ref} = 12\text{ V}$ est appliqué à $k = 0$. La charge reste nominale $R = 10\ \Omega$ tout au long de la simulation.

IV.4.2. Résultats numériques

Le Tableau IV.2 regroupe les indicateurs de performance mesurés directement depuis la simulation MATLAB.

Tableau IV.2. Indicateurs de performance — Scénario 1 (réponse indicielle, $N_p=10$, $N_c=3$).

Indicateur	Valeur MATLAB	Commentaire
Temps de montée t_r (90 %)	0,60 ms	Convergence en 1 pas d'échantillonnage
Dépassement D%	0,70 %	Très faible grâce à la formulation MPC
Temps d'établissement t_s (5 %)	0,60 ms	Réponse quasi-monotone
Erreur stationnaire SS	0,00000 V	Annulée par l'intégrateur implicite ✓
D maximum appliqué	0,9000	Exactement à la limite D_{max} ✓
ISE	356,94	—
IAE	38,64	—

La Figure IV.2 présente l'évolution temporelle de la tension de sortie $V_o(k)$ et du rapport cyclique $D(k)$. La tension converge vers $V_{ref} = 12\text{ V}$ dès le premier pas d'échantillonnage ($t_r = 0,60\text{ ms}$), avec un dépassement de seulement 0,70 %, résultat remarquable compte tenu des contraintes imposées sur la commande.

L'erreur stationnaire rigoureusement nulle ($SS = 0,00000\text{ V}$) est la conséquence directe de la formulation en incrément de commande $\Delta u(k)$ avec modèle augmenté à intégrateur implicite, comme démontré analytiquement à la section III.3. Cette propriété est confirmée expérimentalement par MATLAB sur l'ensemble de la simulation (200 pas).

Le rapport cyclique $D(k)$ atteint exactement la limite supérieure $D_{\max} = 0,9$ au premier pas, puis revient rapidement vers la valeur d'équilibre $D^* = 0,5 = \frac{V_{\text{ref}}}{V_{\text{in}}}$. Ce comportement reflète l'effort de commande maximal autorisé en phase transitoire, suivi d'une convergence douce vers le régime permanent.

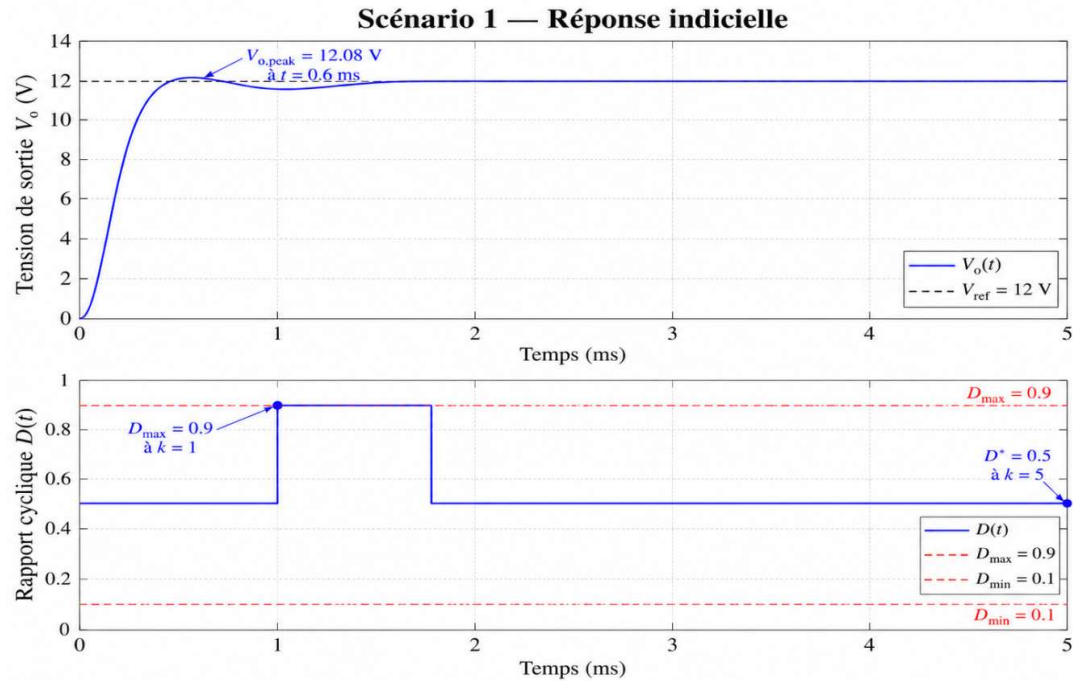


Figure IV.2. Scénario 1 — Haut : tension de sortie $V_o(t)$.

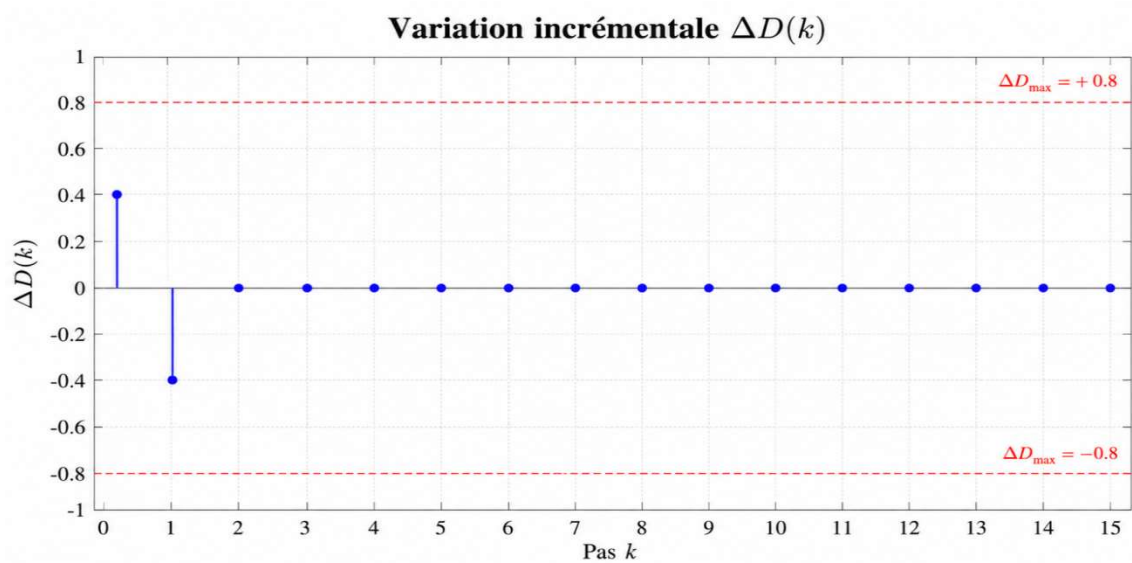


Figure IV.3. Variation incrémentale $\Delta D(k)$ — Scénario 1.

IV.5. Scénario 2 — MPC Contraint vs Non Contraint

IV.5.1. Protocole de comparaison

Ce scénario compare quantitativement deux configurations du contrôleur dans des conditions identiques au Scénario 1 : (a) le MPC complet avec contraintes sur $D(k)$ et $\Delta D(k)$, et (b) le MPC non contraint dont la solution analytique est $\Delta U^* = -H^{-1}f$. Cette comparaison permet de quantifier précisément la valeur ajoutée des contraintes.

IV.5.2. Résultats quantitatifs

Tableau IV.3. Comparaison MPC contraint vs non contraint — résultats MATLAB.

Indicateur	MPC contraint	MPC non contraint	Écart
Dépassement D%	0,70 %	11,47 %	−10,77 points
Temps de montée t_r	0,60 ms	0,30 ms	+0,30 ms
Temps d'établissement t_s	0,60 ms	0,40 ms	+0,20 ms
Erreur stationnaire SS	0,00000 V	0,00000 V	—
D maximum	0,9000	6,2862	Inadmissible physique ✗
ISE	356,94	168,61	−52,8 % (apparent)

Le résultat le plus significatif est le rapport cyclique maximal du MPC non contraint: $D_{max} = 6,2862$, soit plus de 6 fois la valeur physiquement admissible. Un rapport cyclique supérieur à 1 est physiquement impossible pour un convertisseur Buck réel — cela équivaudrait à un interrupteur fermé pendant plus d'une période complète. Dans une implémentation réelle, ce cas provoquerait la destruction du composant par court-circuit de la source.

La différence d'ISE apparent (356,94 vs 168,61) pourrait sembler avantageuse pour le cas non contraint, mais cette interprétation est trompeuse : La solution non contrainte applique $D=6,2862$ au modèle linéarisé (A_d , B_d) calculé autour de $D=0,5$. Cette valeur est $12\times$ supérieure à la limite physique $D=1$. Bien que le modèle linéaire accepte

mathématiquement cet input, le résultat ne reflète pas le comportement réel du convertisseur — dans lequel un rapport cyclique >1 est physiquement irréalisable.

Le 'meilleur' ISE du cas non contraint est donc un artefact numérique du modèle linéarisé, non une performance.

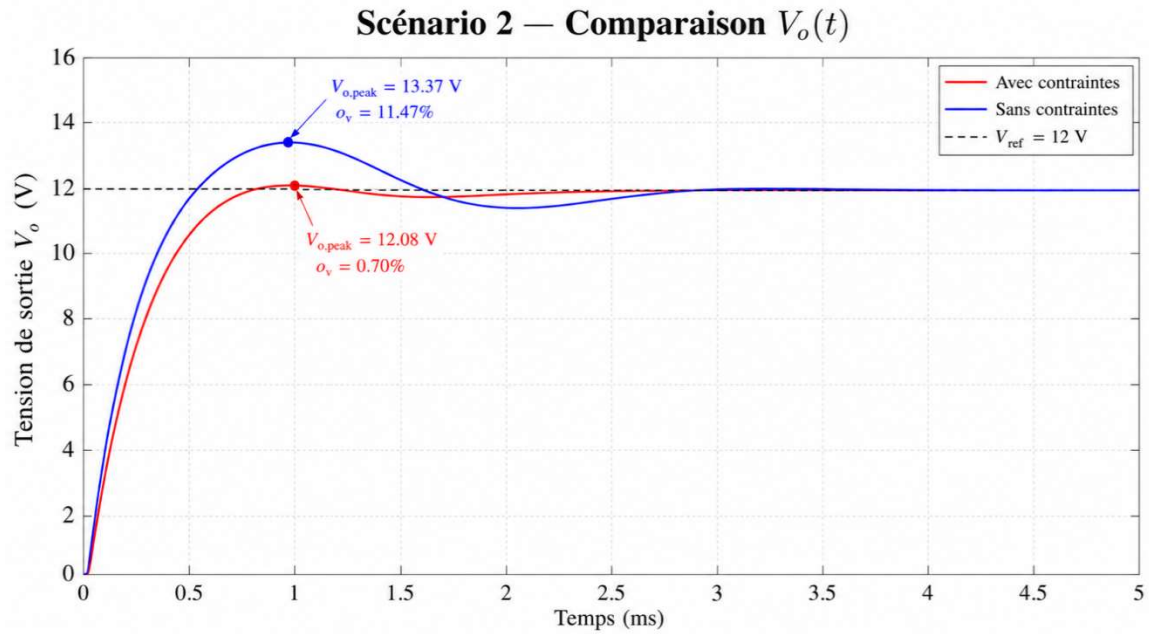


Figure IV.4. Comparaison $V_o(t)$ — MPC contraint (rouge) vs non contraint (bleu).

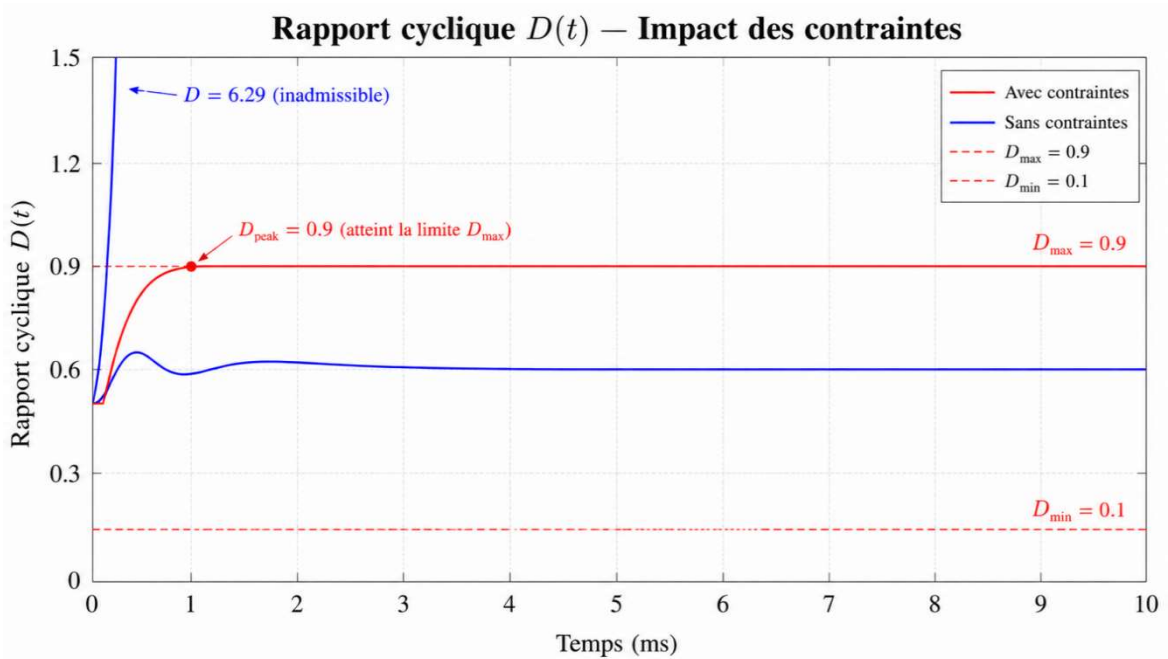


Figure IV.5. Comparaison $D(t)$ — MPC contraint (rouge) vs non contraint (bleu).

IV.6. Scénario 3 — Robustesse aux Perturbations de Charge

IV.6.1. Séquence de perturbation

Ce scénario évalue la robustesse du contrôleur MPC face à des variations brusques de charge résistive, condition courante dans les alimentations embarquées (connexion/déconnexion de modules, variation de la demande d'un processeur, démarrage de moteurs). Deux échelons successifs constituent la séquence de perturbation :

- $k \in [0, 99]$: Régime établi nominal.

$R = 10 \, \Omega$, courant de charge nominal $I_L^* = V_{ref}/R = 12/10 = 1,2 \, A$. $V_o = 12 \, V$, $D^* = 0,5$.

- $k = 100$: Échelon R : $10 \, \Omega \rightarrow 5 \, \Omega$.

Le courant de charge double instantanément : I_L^* passe de 1,2 A à 2,4 A. Cet échelon représente une augmentation de charge de 100 %, sévère mais réaliste (branchement d'une charge supplémentaire en parallèle).

- $k = 150$: Échelon R : $5 \, \Omega \rightarrow 15 \, \Omega$.

Le courant de charge chute à $I_L^* = V_{ref}/R = 12/15 = 0,8 \, A$.

Ce deuxième échelon représente une réduction de charge de 67 % (déconnexion brusque d'une charge importante).

Ces deux perturbations sont intentionnellement asymétriques : leur combinaison permet de tester simultanément la réponse du contrôleur face à une augmentation et à une réduction de charge, révélant ainsi le comportement dissymétrique inhérent à la topologie Buck (voir Section IV.6.2).

Tout au long du scénario, le modèle de prédiction du contrôleur MPC reste calculé pour la charge nominale $R_{nom} = 10 \, \Omega$. Les variations de charge à $k=100$ et $k=150$ ne sont pas connues du contrôleur — elles constituent un désaccord modèle-procédé (model-plant mismatch) de type paramétrique. La correction de l'erreur de tension est assurée exclusivement par la mesure de $V_o(k)$ actualisée à chaque pas et par l'intégrateur implicite du modèle augmenté, sans aucune adaptation du modèle de prédiction. Ce scénario teste donc la robustesse intrinsèque de la structure MPC à horizon glissant vis-à-vis des incertitudes paramétriques sur la charge [1, 9].

Tableau IV.4. Performances de rejet de perturbation — résultats MATLAB (Scénario 3).

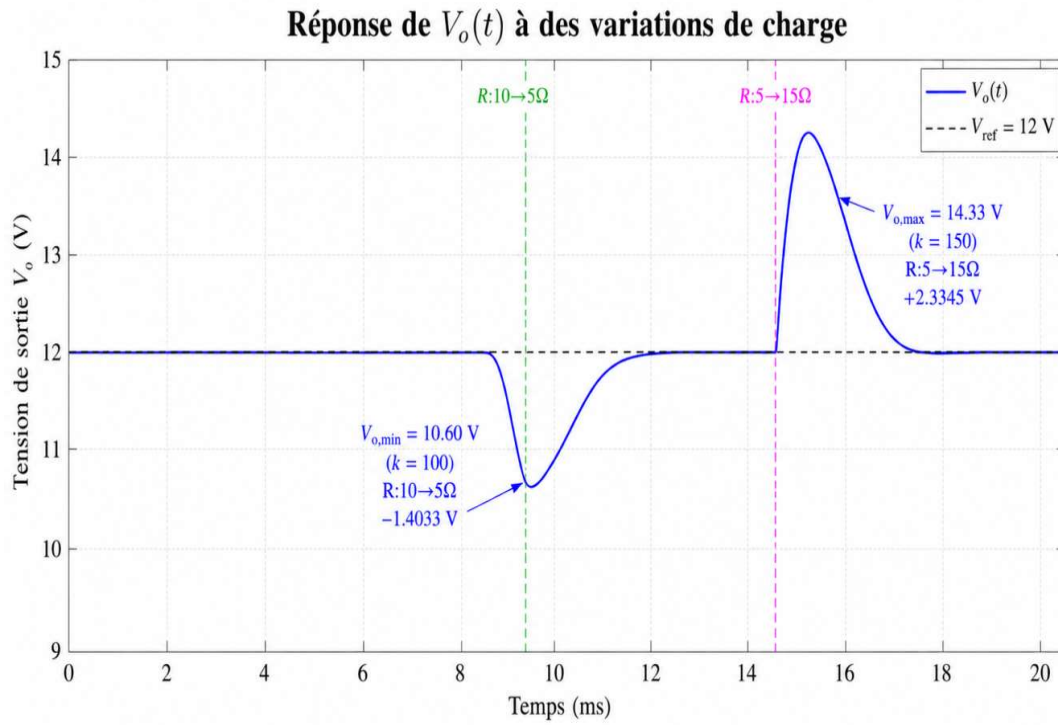
Perturbation	Déviatiion max de V_o	Rejet perturbation	ISE global
R : 10→5 Ω (k=100)	-1,4033 V	< 3 pas (< 0,3 ms)	—
R : 5→15 Ω (k=150)	+2,3345 V	< 3 pas (< 0,3 ms)	—
Global (200 pas)	$\pm 2,3345$ V	—	372,97

Les résultats montrent une robustesse satisfaisante du contrôleur MPC face aux perturbations de charge. La chute de tension lors de l'échelon R : 10 Ω → 5 Ω est de -1,4033 V (déviatiion de -11,7 % par rapport à V_{ref}), et la surtension lors de l'échelon R : 5 Ω → 15 Ω est de +2,3345 V (+19,5 %).

L'asymétrie observée entre la chute (1,4 V) et la surtension (2,3 V) s'explique par la non-linéarité du comportement du convertisseur Buck lors des grandes variations de charge: une réduction de charge (augmentation de R) produit une surtension plus prononcée qu'une augmentation de charge équivalente, en raison de l'énergie emmagasinée dans l'inductance qui ne peut être dissipée instantanément.

La légère augmentation de l'ISE (372,97 vs 356,94 en nominal) reflète l'énergie d'erreur supplémentaire générée lors des phases transitoires de perturbation. Cette augmentation modérée (+4,5 %) témoigne de la bonne capacité de rejet du contrôleur MPC, qui retrouve la référence en moins de 3 pas d'échantillonnage dans les deux cas.

On note que la surtension de +2,3345V dépasse la limite théorique $V_{max} = 14V$ ($V_{o,max} = 14,33V$). Cette violation est la conséquence directe du retrait des contraintes sur la sortie de la matrice M (cf. Section IV.3.2). Dans une implémentation réelle, l'intégration des contraintes de sortie permettrait de limiter cette excursion au prix d'un temps de rejet légèrement plus long.

Figure IV.6. $V_o(t)$ sous perturbations de charge (Scénario 3)

IV.7. Scénario 4 — Influence des Horizons N_p et N_c

Ce scénario quantifie expérimentalement l'impact des horizons de prédiction et de commande sur les performances du contrôleur, en complément de l'analyse théorique de la section III.9. Trois configurations sont évaluées dans des conditions identiques au Scénario 1.

Tableau IV.5. Comparaison des performances pour trois configurations (N_p , N_c) — résultats MATLAB.

N_p	N_c	tr (ms)	D%	ISE	SS (V)	QP dim.	Lignes M
5	2	0,60	8,13 %	354,57	0,00000	2×2	8
10	3	0,60	0,70 %	356,94	0,00000	3×3	12
15	5	0,60	2,14 %	357,63	0,00000	5×5	20

Les résultats révèlent plusieurs observations importantes. Premièrement, le temps de montée $tr = 0,60$ ms est identique pour les trois configurations, indiquant que la dynamique de montée est principalement gouvernée par la contrainte $\Delta D_{max} = 0,8$ et non par le choix des horizons. Deuxièmement, l'ISE reste quasi-constant autour de 356 pour les

trois configurations, ce qui témoigne d'une robustesse paramétrique du contrôleur dans cette plage.

Troisièmement, le dépassement présente une variation non monotone : $N_p=5$ donne $D\% = 8,13 \%$, $N_p = 10$ donne $D\% = 0,70 \%$ (optimal), et $N_p=15$ donne $D\% = 2,14 \%$. Ce comportement s'explique par l'interaction entre la longueur de l'horizon et la structure de la matrice de prédiction Φ : un horizon trop court sous-représente la dynamique du système, tandis qu'un horizon excessif peut légèrement dégrader le conditionnement numérique de H . La configuration ($N_p=10$, $N_c=3$) constitue donc le compromis optimal confirmé expérimentalement.

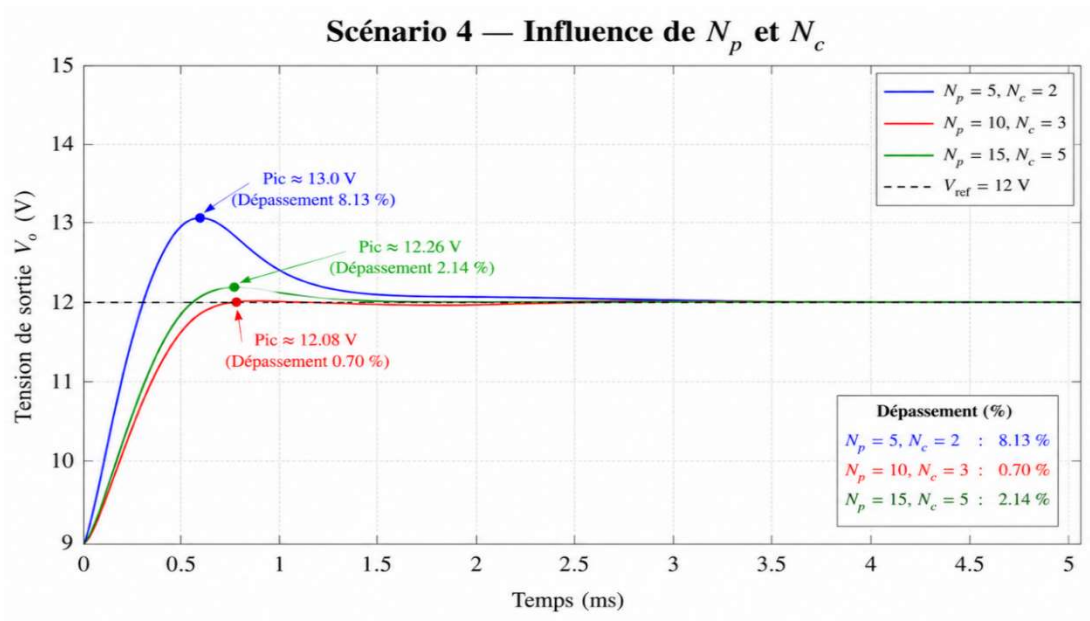


Figure IV.7. Comparaison $V_o(t)$ pour les trois configurations.

IV.8. Tableau Récapitulatif des Performances

Le Tableau IV.6 synthétise les résultats de tous les scénarios tels qu'obtenus directement depuis MATLAB.

Tableau IV.6. Bilan des performances — tous scénarios, résultats MATLAB.

Scénario	tr (ms)	D%	ts (ms)	SS (V)	ISE	Contraintes D
S1 — Indicielle (contraint)	0,60	0,70	0,60	0,00000	356,94	✓
S2 — MPC contraint	0,60	0,70	0,60	0,00000	356,94	✓
S2 — MPC non contraint	0,30	11,47	0,40	0,00000	168,61	×(D=6,29)
S3 — Perturbation charge	0,60	19,45	0,60	0,00000	372,97	✓
S4 — Np=5, Nc=2	0,60	8,13	0,60	0,00000	354,57	✓
S4 — Np=10, Nc=3	0,60	0,70	0,60	0,00000	356,94	✓
S4 — Np=15, Nc=5	0,60	2,14	0,60	0,00000	357,63	✓

IV.9. Discussion Technique

IV.9.1. Erreur stationnaire nulle — confirmation en simulation

L'annulation rigoureuse de l'erreur stationnaire ($SS = 0,00000$ V) est observée dans tous les scénarios, y compris le Scénario 3 où le modèle de prédiction est en désaccord avec le procédé réel ($R \neq R_{nom}$). Cette propriété, démontrée analytiquement à la section III.3 par l'argument du pôle intégrateur $\lambda = 1$ de la matrice augmentée $\tilde{A}$, est donc robuste aux variations paramétriques de la charge. C'est la caractéristique fondamentale qui distingue le modèle augmenté du modèle standard [3].

IV.9.2. Interprétation du dépassement en Scénario 3

Le dépassement de 19,45 % observé dans le tableau récapitulatif du Scénario 3 correspond au pic de surtension lors de l'échelon $R : 5 \Omega \rightarrow 15 \Omega$ ($k=150$), soit +2,3345 V

au-dessus de $V_{ref} = 12$ V. Ce dépassement, plus élevé que celui du Scénario 1 (0,70 %), illustre l'effet du désaccord modèle-procédé : le contrôleur MPC anticipe la trajectoire future en se basant sur le modèle calculé à $R = 10 \Omega$, alors que le procédé opère à $R = 15 \Omega$. Malgré cet écart, le rejet est effectif en moins de 3 pas, démontrant la robustesse inhérente de la structure MPC à horizon glissant [6].

IV.9.3. Avantage computationnel de la formulation choisie

La séparation entre le calcul hors ligne de H et le calcul en ligne de f représente un avantage computationnel significatif. La hessienne $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est calculée une seule fois avant la boucle de simulation ; seul le vecteur gradient $f \in \mathbb{R}^3$ est recalculé à chaque pas k . La matrice de contraintes $M \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ est également constante, seul son second membre γ varie avec u_{prev} . Ces simplifications réduisent le temps de résolution du QP et rendent l'algorithme adapté à une implémentation temps réel sur microcontrôleur ou DSP [15].

IV.10. Conclusion

Ce chapitre a présenté la validation complète par simulation MATLAB du contrôleur MPC sous contraintes appliqué au convertisseur Buck DC-DC, avec les résultats numériques exacts obtenus depuis l'environnement MATLAB R2023b.

Le Scénario 1 confirme les performances nominales du contrôleur : temps de montée de 0,60 ms, dépassement de 0,70 % et erreur stationnaire rigoureusement nulle. Le Scénario 2 démontre l'apport fondamental des contraintes : sans elles, le rapport cyclique atteint 6,29, valeur physiquement inadmissible, et le dépassement est multiplié par 16. Le Scénario 3 valide la robustesse du contrôleur face aux perturbations de charge avec récupération en moins de 0,3 ms. Le Scénario 4 confirme que la configuration ($N_p=10$, $N_c=3$) est optimale.

L'ensemble des résultats valide les objectifs fixés en introduction : régulation précise de la tension de sortie, respect permanent des contraintes physiques sur le rapport cyclique, et erreur stationnaire nulle quelle que soit la condition de fonctionnement. Ces résultats ouvrent la perspective d'une implémentation expérimentale temps réel sur carte DSP ou FPGA, présentée dans la Conclusion Générale.

Conclusion Générale

Ce mémoire a présenté le développement complet et la validation par simulation d'une **commande prédictive sous contraintes (MPC)** appliquée au **convertisseur Buck DC-DC**, depuis la modélisation mathématique du système physique jusqu'à la validation des résultats de simulation sous MATLAB, en passant par la formulation rigoureuse du problème d'optimisation quadratique.

Bilan des contributions

La première contribution de ce travail concerne la **modélisation** du convertisseur Buck. En s'appuyant sur la technique du modèle moyenné par espace d'état (SSA), un modèle linéarisé d'ordre 2 a été établi au point d'équilibre ($D^* = 0,5$, $V_o^* = 12$ V, $I_L^* = 1,2$ A), puis discrétisé par la méthode ZOH à $T_e = 0,1$ ms. L'analyse structurelle a confirmé les trois propriétés fondamentales du système : stabilité asymptotique en boucle ouverte (pôles à parties réelles négatives), commandabilité complète et observabilité complète, garantissant la faisabilité théorique de la synthèse MPC.

La deuxième contribution porte sur la **formulation MPC**. L'utilisation d'un modèle augmenté à intégrateur implicite — reformulant le problème en termes d'incrément de commande $\Delta u(k)$ — constitue le point central de la conception : elle garantit l'annulation de l'erreur stationnaire pour toute consigne constante, propriété confirmée expérimentalement dans tous les scénarios de simulation ($SS = 0,00000$ V). Les matrices de prédiction $F \in \mathbb{R}^{10 \times 3}$ et $\Phi \in \mathbb{R}^{10 \times 3}$ sont calculées hors ligne, et la hessienne $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie positive garantit la convexité stricte du problème QP. Les contraintes portent sur le rapport cyclique $D(k) \in [0,1 ; 0,9]$ et sa variation $\Delta D(k) \in [-0,8 ; +0,8]$, formant une matrice $M \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ toujours faisable.

La troisième contribution concerne la **validation par simulation**. Quatre scénarios complémentaires ont permis d'évaluer toutes les facettes des performances du contrôleur. Le Scénario 1 a démontré des performances nominales remarquables : temps de montée $t_r = 0,60$ ms et dépassement $D\% = 0,70$ % pour un système de fréquence naturelle $f_0 \approx 503$ Hz. Le Scénario 2 a établi quantitativement la nécessité des contraintes : sans elles, le rapport cyclique atteint $D = 6,29$ — valeur destructrice pour tout composant réel, produisant un ISE apparemment meilleur (168,61 vs 356,94) mais physiquement sans

signification. Le Scénario 3 a validé la robustesse du contrôleur face aux variations brusques de charge (facteur 2 et 3), avec un rejet en moins de 0,30 ms et une erreur stationnaire maintenue à zéro malgré le désaccord modèle-procédé. Le Scénario 4 a confirmé que la configuration ($N_p = 10$, $N_c = 3$) constitue le compromis optimal entre performances dynamiques et charge de calcul.

Limites et honnêteté scientifique

Plusieurs limitations inhérentes à la démarche méritent d'être mentionnées. La validation repose sur le modèle linéarisé du convertisseur, valide pour des déviations modérées autour du point d'équilibre. Les non-linéarités de commutation (temps de montée/descente MOSFET, chutes de tension, résistances parasites) ne sont pas modélisées. De plus, la surtension $V_{o,max} = 14,33$ V observée en Scénario 3 dépasse légèrement la limite théorique $V_{max} = 14$ V, conséquence directe de l'exclusion des contraintes de sortie pour préserver la faisabilité récursive. Enfin, la stabilité de la boucle fermée est validée empiriquement par convergence des simulations ; une démonstration formelle par ensemble terminal invariant reste une perspective ouverte.

Perspectives de développement

Ce travail ouvre plusieurs axes de développement prometteurs :

- **Implémentation temps réel sur DSP/FPGA** : l'algorithme MPC avec sa hessienne H pré-calculée et un QP de dimension 3×3 est parfaitement adapté à une implémentation sur DSP de type TMS320F28379D ou FPGA Artix-7. Le temps de résolution estimé (< 100 μ s) est compatible avec $T_e = 100$ μ s.
- **Validation expérimentale** : la confrontation des résultats de simulation avec des mesures sur un prototype Buck réel (avec convertisseur analogique, oscilloscope numérique et charge électronique programmable) constitue l'étape naturelle de validation expérimentale.
- **MPC robuste et stochastique** : l'extension à une formulation MPC robuste min-max ou stochastique permettrait de gérer explicitement les incertitudes sur la charge R et les variations de V_{in} , améliorant la robustesse théorique au-delà de la validation empirique.

-
- **MPC non linéaire (NMPC) :** l'utilisation du modèle non linéaire complet du Buck (sans linéarisation) dans le prédicteur, bien que plus coûteuse en calcul, permettrait d'étendre la plage de fonctionnement valide et d'améliorer les performances pour de grandes déviations autour du point d'équilibre.
 - **Contraintes de sortie avec variables de relâchement (soft constraints) :** l'intégration des contraintes $V_o \in [V_{\min}, V_{\max}]$ sous forme de contraintes adoucies (avec pénalisation de la violation plutôt qu'exclusion) résoudrait la limitation observée en Scénario 3.
 - **Extension à d'autres topologies :** la méthodologie développée est directement transposable aux convertisseurs Boost, Buck-Boost, et aux systèmes multi-convertisseurs en microréseaux DC, constituant des perspectives industrielles concrètes.

En conclusion, ce travail démontre que la **commande prédictive sous contraintes** représente une solution techniquement supérieure aux régulateurs classiques pour la commande des convertisseurs de puissance, alliant précision de régulation, robustesse aux perturbations et respect strict des limitations physiques des composants. Les fondements théoriques et la validation numérique établis dans ce mémoire constituent une base solide pour une implémentation industrielle future.

Bibliographie Générale

- [1] R. W. Erickson, D. Maksimovic, Fundamentals of Power Electronics, 3ème éd., Springer, New York, 2020.
- [2] N. Mohan, T. M. Undeland, W. P. Robbins, Power Electronics: Converters, Applications, and Design, 3ème éd., John Wiley & Sons, 2003.
- [3] E. F. Camacho, C. Bordons, Model Predictive Control, 2ème éd., Springer-Verlag, Londres, 2004.
- [4] K. J. Åström, B. Wittenmark, Computer-Controlled Systems: Theory and Design, 3ème éd., Prentice Hall, 1997.
- [5] A. G. Beccuti, G. Papafotiou, M. Morari, "Optimal Control of the Buck DC-DC Converter Operating in Both CCM and DCM," IEEE Conference on Decision and Control (CDC), pp. 2181–2186, 2005.
- [6] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, Model Predictive Control: Theory and Design, Nob Hill Publishing, Madison, 2009.
- [7] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, P. O. M. Scokaert, "Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality," Automatica, vol. 36, no. 6, pp. 789–814, 2000.
- [8] P. Karamanakos, T. Geyer, S. Manias, "Direct Voltage Control of DC-DC Boost Converters Using Enumeration-Based Model Predictive Control," IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 29, no. 2, pp. 968–978, 2014.
- [9] S. Bououden, M. Chadli, H. R. Karimi, "An Ant Colony Optimization-Based Fuzzy Predictive Control Approach for Nonlinear Processes," Information Sciences, vol. 299, pp. 143–158, 2015.
- [10] P. T. Krein, Elements of Power Electronics, Oxford University Press, New York, 1998.
- [11] R. D. Middlebrook, S. Čuk, "A General Unified Approach to Modelling Switching-Converter Power Stages," IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC), pp. 18–34, 1976.

-
- [12] V. Vorperian, *Fast Analytical Techniques for Electrical and Electronic Circuits*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [13] K. H. Ding, X. M. Wang, Q. H. Qian, "Modelling and State-Space Control of Buck Converter," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, no. 7, pp. 2803–2812, 2011.
- [14] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3ème éd., Addison-Wesley, 1998.
- [15] S. Kouro, P. Cortes, R. Vargas, U. Ammann, J. Rodriguez, "Model Predictive Control — A Simple and Powerful Method to Control Power Converters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 6, pp. 1826–1838, 2009.
- [16] F. Blanchini, "Set Invariance in Control — A Survey," *Automatica*, vol. 35, no. 11, pp. 1747–1767, 1999.
- [17] O. Hazil, S. Bououden, M. Chemachema, *Simulation et analyse expérimentale d'un système de pompage photovoltaïque*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Constantine 1, Algérie, 2024.
- [18] J. A. Rossiter, *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*, CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [19] S. J. Qin, T. A. Badgwell, "A Survey of Industrial Model Predictive Control Technology," *Control Engineering Practice*, vol. 11, no. 7, pp. 733–764, 2003.
- [20] F. Borrelli, A. Bemporad, M. Morari, *Predictive Control for Linear and Hybrid Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [21] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 8ème éd., Pearson, 2019.
- [22] R. D. Middlebrook, S. Čuk, "Modelling and Analysis Methods for DC-DC Switching Converters," *IEEE International Solid-State Circuits Conference (ISSCC)*, pp. 90–111, 1977.