



**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE «Abbès LAGHROUR» DE KHENCHELA
FACULTE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**



Département de Génie Mécanique

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

ETUDE DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE MINCE ELASTIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Réalisé par :

-Belloufi Houssemeddin.

-Madaoui Abdessalam.

Devant le jury composé de :

-Dr :Abboudi Abdelaziz

-Dr :Meddour Belkacem

Dirigé par :M^rGroun Brahim.

Présenté le:...../09/2020



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ «ABBÉS LAGHROUR» DE KHENCHELA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE



Département de Génie Mécanique

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

ETUDE DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE MINCE ELASTIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Dirigé par : M^r Groun Brahim.

Réalisé par :

- Belloufi Houssem Eddin.*
- Madaoui Abdessalam.*

Présenté le:/09/2020

Remercîment

Je tiens à remercier Monsieur Professeur Groune Brahim qui n'a jamais compté les heures afin que mon travail puisse avancer le plus rapidement possible, également avec un grand dévouement, il m'a consacré tout son temps à suivre de près l'évolution de cette thèse à orienter les différentes étapes et à palier toutes les difficultés auxquelles j'avais à faire face.

Merci pour l'enrichissement scientifique que vous m'avez apporté et pour la confiance que vous m'avez accordée.

Je remercie le professeur Abboud Abdel Aziz, doyen du Collège de génie mécanique Pour l'aide et l'intervention qu'il a apportées..

J'exprime également ma sincère gratitude à Monsieur. Brek Samir, HalimAllaoui et chehhat A.M et chehaoui walid mon professeurs pendant mes parcours universitaires, et je les remercie pour tous les efforts qu'ils ont déployés jusqu'à ce que nous en arrivions là.

Enfin, mes sincères remerciements à tous les professeurs de l'Université Abbas Laghrourde Khenchela en général, et en particulier, mes remerciements vont à tous les professeurs de génie mécanique.

Et à tous ceux qui m'ont aidé bientôt ou loin à développer cette entreprise.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents

A mes très chers frères et mes sœurs

A ma très chère femme

A mes chers enfants;(hadil,mouaad)

A mes très amis y.zaïd, s.boussaada

A ma grande famille;

Résume :

L'étude du comportement des plaques est un sujet très important non seulement dans le domaine de génie civil mais aussi dans le domaine de mécanique, aéronautique, biomécanique etc..... L'étude des plaques occupe une place très importante dans la recherche scientifique.

Le travail présenté consiste à la formulation de deux éléments de plaque, le premier « ACM » est formulé à base de l'approche en déplacement, le deuxième comprend le formulation de la nouvelle variante de l'élément SBRPS formulée en utilisant l'approche en déformation. La validation de la nouvelle variante a été faite à travers les tests de validation connus dans la littérature. Ces tests étudient la flexion des plaques minces ou épaisses en état plan de contrainte sous différentes conditions aux limites. permet de calculer les déplacements des nœuds et les moments fléchissant. Les résultats calculés sont comparés à ceux obtenus par les logiciels CATIA.

Abstract :

The study of the behaviour of plaque is a very important issue not only in the field of civil engineering, but also in the field of mechanical, aeronautical, biomechanics..... The study of the plates has a very important place in scientific research. In this thesis; two rectangular finite elements are used to model thick and thin plates. The first element ACM is formulated by using the displacement approach, the second consists with the formulation of the new variant element "SBRPS" is based on the strain approach. The validation of the formulated element was made through the known validation tests. These tests study the bending of the thin and thick plates in plane state of stress with different boundary conditions. to calculate the displacements of the nodes and the bending moments. The results obtained are compared with those of software CATIA.

ملخص

ان دراسة سلوك الصفائح موضوع ذو اهمية ليس في مجال الهندسة المدنية فقط ولكن في مجال الهندسة الميكانيكية علوم الطيران والبيوميكانيك... الخ دراسة الصفائح يشغل فضاء واسعاً في مجال البحث العلمي. تتناول هذه المذكرة بالدراسة صياغة عنصرين. احدهما مشكل باستعمال مبدا مقارنة الانتقالات بينما العنصر الثاني تم تشكيله باستعمال مقارنة مبدا التشوهات . اجريت الاختبارات على العنصر الجديد من خلال عدة امثلة وتطبيقات مرجعية خاصة بالصفائح لحساب عزوم الانحناء والانتقالات. مع الأخذ بعين الاعتبار مختلف حالات الارتكاز. يمكننا من حساب الانتقالات وعزوم الانحناء اضافة الى مقارنة النتائج المحسوبة مع تلك المحصل عليها باستعمال البرنامج CATIA.



Table des matières



Table des matières

Remerciement.....	
Dédicace.....	
Table des matières.....	
Liste des figures et tableaux.....	
Index des notations.....	
Résumé.....	
Introduction général.....	1
<u>Chapitre 1: Notion de base de la méthode des éléments finis.</u>	
1 –Introduction.....	3
1-1- Définition d'un élément fini.....	4
1-1-1-Les nœuds géométriques.....	4
1-1-2- Attributs d'un élément fini.....	4
1-1-3- Représentation des éléments finis.....	5
1-2- Procédure de la méthode des éléments finis.....	5
1-2-1- Discrétisation de domaine.....	5
1-2-2- Interpolation déplacement.....	6
1-2-2-1- Introduction.....	6
1-2-2-2- Interpolation 1-D.....	7
1-2-2-3- Interpolation 2-D.....	8
1-2-2-3-1- Continuité aux frontières.....	8
1-2-2-3-2- Elément finis triangulaires.....	8
1.2.2.3.3. Eléments finis rectangulaires.....	11
1-2-3-4 Interpolation 3-D.....	16
<u>Chapitre 2 : Elasticité plane</u>	
2 - Introduction	17
2-1- Les équations générales d'élasticité.....	17

2-1-1- Les contraintes.....	17
2-1-1-1- Notion de contrainte.....	17
2-1-1-2- Equations internes.....	19
2-1-1-3- Equations externes.....	21
2-1-1-4- Les équations de compatibilité.....	22
2-1-2- Les déformations.....	22
2-1-2-1- Notion de déformation.....	22
2-1-2-2- Déplacements.....	22
2-1-2-3- Relations entre déplacements et déformations.....	23
2-1-3- Relations entre déformations et contraintes.....	25
2-1-4- Relations entre contraintes et déformations.....	25
2-1-5- Etat plan de contrainte et de déformation.....	26
2-2- Les équations fondamentales de l'élasticité plane.....	28
2-2-1- Les équations d'équilibre.....	28
2-2-1-1- Les équations différentielles d'équilibre.....	28
2-2-1-2- Les conditions de contour.....	28
2-2-1-3- Changement d'axe	29
2-2-2- Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes.....	30

Chapitre 3 : vibration des poutres et des plaques

3.1 Vibration de flexion des poutres.....	31
3.1.1 Equation des poutres.....	31
3.1.2 Conditions aux limites.....	32
3.2 Vibration des plaques.....	34
3.2.1 Equation des plaques mince.....	34
3.2.2 Méthodes pour obtenir les solutions.....	35
3.2.3 Plaques rectangulaires simplement supportées sur deux bords opposées.....	36
3.2.4 Introduction à la méthode de Rayleigh-Ritz.....	39
3.3 Modelés d'amortissement.....	42
3.3.1 Facteur d'amortissement modal.....	42
3.3.2. Coefficient d'amortissement dans l'équation d'onde.....	42
3.3.3 Dissipation aux limites.....	43
3.4 Réponse forcée par décomposition modale.....	44
3.4.1 Force quelconque.....	45

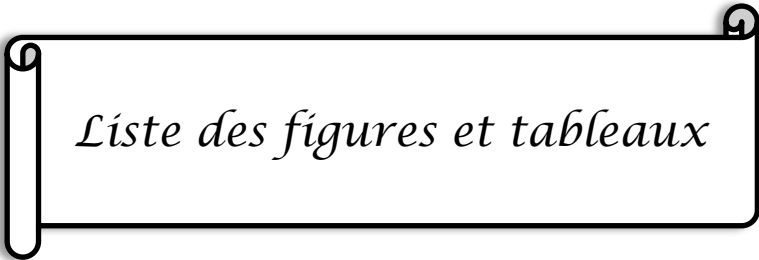
3.4.2 Force harmonique.....	45
3.5 Exemple pour une poutre en flexion.....	46
3.6 Cas des plaques rectangulaires.....	49
3.7 Synthèse modale.....	49
3.7.1 Contribution de chaque mode.....	49
3.7.2 Grandeurs quadratiques moyennes.....	50
3.7.3 Facteur de perte et amortissement structural.....	54
3.7.4 Facteur de perte et amortissement structural.....	55

Chapitre 4 : formulation numérique et résultats

4.1 Exposition du problème.....	56
4.2 Géométrie du problème.....	57
4.3 Détermination du champ de déplacements et du champ de contraintes en fonction des conditions aux rives.....	57
4.4 Différents cas d'appui de la plaque.....	59
4.4.1 Plaque encastree sur un bord.....	59
4.4.2 Plaque encastree sur deux cotés opposés (plaque bi-encastree).....	64
4.4.3 Plaque encastree sur un cotés et articulé sur le côté opposé.....	68
4.4.4 Plaque bi-articulée sur deux cotés opposés (en liaison pivot).....	73
4.5 Comparaisons des valeurs maximales des déplacements et des contraintes.....	77
4.6 Détermination du champ de déplacements et du champ de contraintes en fonction du matériau de la plaque.....	79
4.6.1 Plaque encastree sur un bord.....	80
4.6.1.1 Plaque en aluminium.....	80
4.6.1.2 Plaque en bronze.....	84
4.6.2 Plaque bi-articulée (liaison pivot) sur deux cotés opposés.....	88
4.6.2.1 Plaque en aluminium.....	88
4.6.2.2 Plaque en bronze.....	92
4.7.1 Cas d'une plaque en aluminium et une plaque en bronze.....	97
4.7.2 Cas d'une plaque en acier et une plaque en bronze.....	98



**Liste des figures et
tableaux**



Liste des figures et tableaux

Chapitre 1: NOTION DE BASE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Figure 1.1 : Exemple d'un maillage avec des éléments et des nœuds correctement numérotés.	6
Figure 1.2 : Élément 1-D.....	7
Figure 1.3 : Fonctions d'interpolation lagrangiennes.....	9
Figure 1.4 : Éléments finis triangulaires avec continuité C^0	10
Figure 1.5 : Triangle de pascal.....	10
Figure 1.6 : Fonctions d'interpolation du triangle quadratique.....	11
Figure 1.7 : Élément rectangulaire et ses coordonnées carte siennes (x, y) et naturelles.....	11
Figure 1.8 : Famille des rectangles de Lagrange et quelques fonctions d'interpolation.....	13
Figure 1.9 : Fonctions d'interpolation typiques de l'élément biquadratique.....	13
Figure 1.10: Termes de l'interpolation polynomiale des rectangles Lagrange.....	14
Figure 1.11 : Famille des rectangles de Serendip	14
Figure 1.11 : Modes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Serendip.....	15
Figure 1.12 : Éléments tridimensionnels.....	16

Chapitre 2 : Elasticité plane

Figure 2.1 : Equilibre d'un solide.....	17
Figure 2.2 : Notion de contraint.....	18
Figure 2.3 : Equilibre de volume.....	19
Figure 2.4 : Equilibre d'une surface.....	21
Figure 2.5 : Déplacement d'un point.....	23
Figure 2.6 : Déformations planes.....	24
Figure 2.7 : Etat plan de déformation.....	26
Figure 2.8 : Etat plan de contrainte.....	27
Figure 2-9 : Conditions de contour en contraintes planes.....	29
Figure 2-10 : Contraintes sur deux facettes orthogonales.....	29

Chapitre 3 : vibration des poutres et des plaques

Figure 3.1: Geometries pour les poutres en flexion.....	31
Figure 3.2: Equilibria d'un element de pouter dx.....	31
Figure 3.3 : Notations pour la plaque.....	34
Figure 3.4 : Plaque simplement supportée sur les deux bords opposés.....	36
Figure 3.5: Déformée pour le mode (2,3) de la plaque simplement supportée.....	39
Figure 3.6 : Figures de Chladni d'une plaque libre.....	41
Figure 3.7 : Conditions aux limites dissipatives pour les ondes longitudinales dans une barre.....	43
Figure 3.8 : Réponse fréquentielle en amplitude et phase pour un mode.....	48
Figure 3.9 : Excitation d'une poutre par une force ponctuelle.....	48
Figure 3.10 : Réponse totale due à la contribution de 3 modes.....	50
Figure 3.11 : Fréquence propres normalisée pour une plaque carrée.....	51
Figure 3.12 : Déformées apparentes (non-modale) pour une plaque carrée.....	52
Figure 3.13 : Lignes nodales des déformée apparentes dues aux combinaisons de modes pour une plaque carrée.....	53
Figure 3.14 : Réponse d'un mode en déplacement et en vitesse.....	54

Chapitre 4 : formulation numérique et résultats

Figure 4.1 : Plaque encastree sur un bord.....	59
Figure 4.2 : Plaque encastree sur deux côtés opposés.....	64
Figure 4.3 : Plaque encastree sur un cotés et articulé sur le côté opposé.....	68
Figure 4.4 : Plaque bi-articulée sur deux côtés opposés.....	73
Figure 4.5 : Fréquences en fonction des modes propres obtenus.....	78
Figure 4.6 : Fréquences en fonction des modes propres obtenus.....	78
Figure 4.7 : Déplacements en fonction des modes propres obtenus.....	79
Figure 4.8 : Fréquences en fonction du numéro des modes.....	97
Figure 4.9 : Déplacement en fonction du numéro du mode.....	97
Figure 4.10 : Champ de contraintes en fonction du numéro du mode.....	98
Figure 4.11 : Fréquences en fonction du numéro des modes.....	98
Figure 4.12 : Déplacement en fonction du numéro du mode.....	99
Figure 4.13 : Champ de contraintes en fonction du numéro du mode.....	99

Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Principales conditions aux limites pour les poutres.....	33
Tableau 4.1 : valeurs de references.....	59
Tableau 4.2 : Les déformées de la plaque encastree sur un coté.....	60
Tableau 4.3 : Les déformées de la plaque bi-encastree.....	64
Tableau 4.4 : Les déformées de la plaque encastree sur un côté et en liaison pivot sur le côté opposé.....	69
Tableau 4.5: Les déformées de la plaque bi-articulée sur deux côtés opposés (en liaison pivot).....	73
Tableau 4.6 Comparaisons des valeurs maximales des déplacements et des contraintes.....	77
Tableau 4.7 Les déformées de la plaque (en aluminium) encastree sur un coté.....	80
Tableau 4.8 Les déformées de la plaque (en bronze) encastree sur un coté.....	84
Tableau 4.9 Les déformées de la plaque bi-articulée (liaison pivot) sur deux côtés opposés...	88
Tableau 4.10 Les déformées de la plaque bi-articulée (liaison pivot) sur deux côtés opposés...	92
Tableau 4.11 Comparaison et discussion des résultats.....	96



Index

Des notations

Index des notations

σ_{ij} : Tenseur des contraintes

ε_{ij} : Tenseur de la déformation

ε : Les déformations internes de la structure

σ : Tenseur des contraintes [N / m^2]

N_i : Nœuds d'angle

i : Numéro du nœud

\vec{F} : Vecteur de force

M : Moment de flexion

ρ : Masse volumique

ν : Coefficient de Poisson

$\theta w(x, y)$: Déplacement angulaire (rotation)

$w(x, y)$: Déplacement de flexion

∂ : Dérivée partielle

E : Module de Young [N/m^2]

ds : Surface différentielle [m^2]

dv : Volume différentiel [m^3]

ζ_n : Facteur d'amortissement modal

M_{mn} : La masse généralisée

F_{mn} : La force généralisée

I : moment d'inertie

Q : la force de cisaillement

EI : Rigidité de flexion [$N \cdot m^2$]

σ_{xx} : Contrainte normale

τ_{xy} : Contrainte de cisaillement

K_n : Raideur généralisée

C_n : Amortissement généralisé

ω_{mn} : La pulsation naturelle

U_{max} : Énergie de déformation maximale [$N.m$]

T_{min} : Énergie cinétique maximale [$N.m$]

Φ_{mn} : La déformée modale

η : le facteur de perte

ω_n^2 : La pulsation propre



Introduction

Générale

Introduction général

L'étude des vibrations de flexion des plaques minces sont étroitement liées à l'endommagement des structures. Les plaques rectangulaires font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés. L'utilisation de plus en plus importante, montre la nécessité impérative de l'étude de leur comportement vibratoire et devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. L'analyse vibratoire est une thématique actuelle importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette dernière touche de nombreux domaines, comme les technologies spatiales, l'ingénierie navale et civile, l'automobile, aéronautique, ainsi les ponts, les bâtiments, ou encore la génie nucléaire.

Le contrôle des vibrations dans les éléments de structure comme les plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur et ingénieur. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques des plaques est indispensable.

Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à des niveaux d'excitations importants. C'est pour cette raison que le comportement des plaques est, depuis plus de cent ans, le sujet de recherches exhaustives.

Les travaux réalisés dans ce mémoire, s'inscrivent dans cette thématique. L'étude du comportement vibratoire libre des plaques minces. L'objectif fondamental de ce travail est de résoudre le problème en vibration des plaques isotropes afin d'obtenir les fréquences, les modes propres, et les flèches maximale par simulation à l'aide de l'un des logiciels qui se basent sur la méthode des éléments finis, en faisant une analyse modale ayant pour but de calculer les fréquences, les modes propres non amorties des vibrations en flexion d'une plaques carrée. Soumise à différentes configurations de conditions aux limites standards sur les bords.

Le travail réalisé est organisé en quatre chapitres.

Chapitre 1 : Notions de base concernant la méthode des éléments finis, présentation de la méthode ainsi que la formulation des éléments finis pour les différents éléments linéaires et plans, présentés avec leurs types ainsi que l'introduction et le principe de la méthode des éléments finis.

Chapitre 2 : Recherche bibliographique sur la théorie de l'élasticité linéaire où nous avons exposé un rappel sur l'élasticité plane qui montre le comportement des plaques mince sous les hypothèses de petits déplacements et de petites déformations (cas de l'hypothèse de petites déformations H.P.P.), ainsi l'étude de sa cinématique, la définition de sa déformation en utilisant le tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé.

Chapitre 3 : Formulation du comportement statique et dynamique d'une plaque mince introduction sur les vibrations libres ; l'analyse vibratoire et équations d'équilibre, Calcul des moments et des efforts, expressions des conditions aux limites,

Chapitre 4 : Résultats et discussion. De différentes combinaisons de mode d'appuis de la plaque qui assurent à chaque fois les conditions aux rives correspondantes aux bords ainsi que la simulation de la plaques carrée, au premier lieu avec des caractéristiques du matériaux invariables mais seules changent les conditions aux limites puis par comparaison on gardera les modes d'appuis privilégiés et refera les calculs avec d'autres matériaux.

CHAPITRE I

**NOTIONS DE BASE DE
LA METHODE DES
ELEMENTS FINIS**

1 Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) a mis au point dans une clé, la technologie indispensable dans la modélisation et la simulation de systèmes d'ingénierie de pointe dans divers domaines comme le logement, le transport, les communications et ainsi de suite. Dans la construction de tels ingénierie aux systèmes avancés, les ingénieurs et les concepteurs passent par un processus sophistiqué de modélisation, de simulation, visualisation, analyse, conception, prototypage, tests, et enfin, la fabrication. Noter que beaucoup de travail est impliqué avant la fabrication du produit final ou du système. C'est pour assurer la maniabilité du produit fini, ainsi que pour la rentabilité. Ce processus est souvent de nature itérative, ce qui signifie que certaines des procédures sont répétées sur la base des résultats obtenus au courant stade, de façon à obtenir une performance optimale au moindre coût pour le système à construire.

Par conséquent, les techniques liées à la modélisation et la simulation de manière rapide et efficace joue un rôle de plus en plus important, résultant de l'application de la MEF étant multiplié à de nombreuses reprises pour cette raison. La MEF a été d'abord utilisé pour résoudre les problèmes de l'analyse des contraintes, et a depuis été appliquée à de nombreux autres problèmes comme l'analyse des flux de fluide, analyse piézo-électrique, et bien d'autres. Fondamentalement, L'analyse cherche à déterminer la répartition d'un domaine variable comme le déplacement dans l'analyse des contraintes, la température ou le flux de chaleur dans une analyse thermique, la charge électrique dans l'analyse électrique, et ainsi de suite. La MEF est une méthode numérique recherchant une solution approximative de la distribution de champ variable dans le domaine du problème qui est difficile à obtenir analytiquement. Il est obtenu en divisant le domaine du problème en plusieurs éléments, lois physiques sont ensuite appliquées à chaque petit élément, dont chacun a en général une très simple géométrie [Lui.03].

Pratiquement la MEF C'est une méthode mathématique d'intégration numérique des équations aux dérivées partielles mises sous forme variation elle.

Tous les problèmes de calcul de structures élastiques se ramènent à un système d'équations aux dérivées partielles qu'il est souvent impossible de résoudre analytiquement.

1.1 Définition d'un élément fini

1.1.1 Les nœuds géométriques

Nous choisissons un ensemble de n points, sur le domaine V , qui servira à finir la géométrie des éléments. Ces points, appelés **nœuds géométriques**, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine V par un ensemble d'éléments Ve de formes relativement simples. Chaque élément Ve doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à cet élément, c'est-à-dire qui sont situés sur Ve et sur sa frontière [Mloi.81].

1.1.2 Attributs d'un élément fini

Un découpage artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu en éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangulaire ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.
- **Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope...etc.).
- **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres ; ils occupent les sommets, les milieux des arêtes et faces...etc.
- **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (en général le champ de déplacements ou champ de potentiels) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeur qui deviennent les inconnues. L'union, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.
- **Forces nodales** : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté.

Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température ...etc.).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur de force.

1.1.3 Représentation des éléments finis

Nous distinguons trois familles correspondantes à des différents types d'éléments finis à une, deux, trois dimensions, chaque élément est identifier par sa forme géométrique, le type de courbe ou de surface qui forme sa frontière, ainsi que le nombre des nœuds géométriques.

- a) Les éléments unidimensionnels : barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile.
- b) Les éléments bidimensionnels : élasticité plane, plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire.
- c) Les éléments tridimensionnels : éléments de volume ou coques épaisses.
- d) Les éléments axisymétriques : qui constituent une classe bien particulière

Toutes à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique ou méridienne courbe.

1.2 Procédure de la méthode des éléments finis

Les procédures standard de la MEF peuvent être résumées comme suit :

1.2.1 Discrétisation de domaine

Le corps solide est divisé en N éléments. La procédure est souvent appelée maillage, ce qui est généralement réalisée en utilisant ce qu'on appelle des pré-processeurs. Cela est particulièrement vrai pour les complexes géométries. La figure 2.1 montre un exemple de maillage pour un solide à deux dimensions.

Le pré-processeur génère un numéro unique pour l'ensemble des éléments et des nœuds du solide ou de la structure d'une manière appropriée. Un élément de liaison est formé par les nœuds d'une manière prédéfinie conforme afin de créer la connexion de l'élément. Tous les éléments forment ensemble la totalité du domaine du problème, sans aucun espace ou chevauchement. Il est possible que le domaine se composent de différents types d'éléments avec différents nombres de nœuds, aussi longtemps qu'ils sont compatibles (pas de trous et chevauchement ; la condition admissible (a) exigé par le principe de Hamilton) sur les frontières entre les différents éléments.

La densité du maillage dépend de l'exigence d'exactitude de l'analyse et les ressources de

calcul disponibles. En règle générale, un maillage plus fine donnera des résultats qui sont plus précis, mais augmentera le coût de calcul. En tant que tel, le maillage n'est généralement pas uniforme, avec un maillage plus fin utilisé dans la zones où le gradient de déplacement est plus grande ou lorsque la précision est essentielle à l'analyse. Le but de la discrétisation du domaine est de rendre plus facile à assumer le schéma du champ de déplacement. [Lui.03].

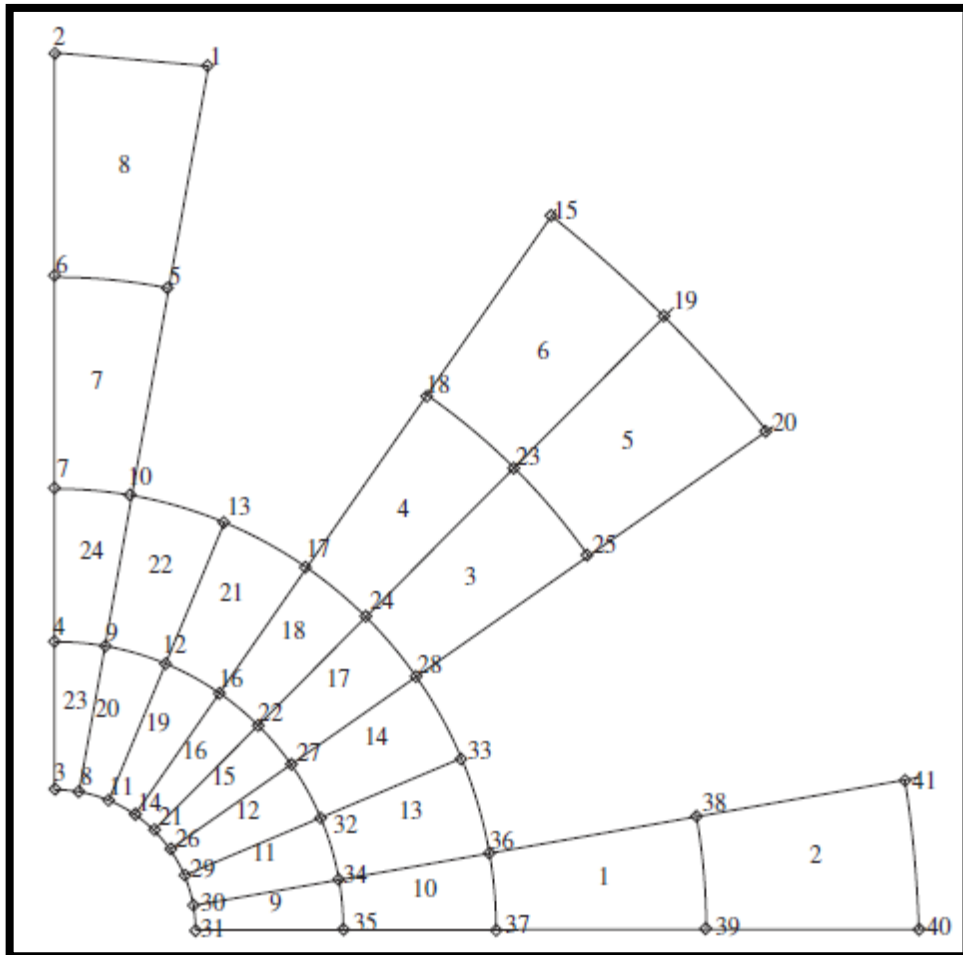


Figure 1.1 : Exemple d'un maillage avec des éléments et des nœuds correctement numérotés.

1.2.2 Interpolation déplacement

1.2.2.1 Introduction

La mécanique linéaire des solides obéit à une forme forte dont l'ordre des dérivées vaut $2(2m=2)$, ordre qui est réduit à 1 dans la forme faible (principe des déplacements virtuels). Dans un tel cas, la convergence demande une interpolation C^1 dans l'élément, une continuité C^0 aux frontières et un polynôme complet au degré 1 au moins (donc linéaire).

En fait, outre l'élasticité, beaucoup de problèmes physiques ont une forme différentielle d'ordre deux : conduction thermique, écoulement souterrain, torsion de Saint-Venant, potentiel électrique, fluide parfait, certaines théories de structures, etc.

Il en résulte que les éléments finis à continuité C^0 aux frontières ont été (et sont encore) les plus étudiés et les plus employés. D'où l'appellation simplifiée d'élément C^0 , d'interpolation C^0 , de continuité C^0 , etc... [Fran.91].

1.2.2.2 Interpolation 1-D

L'élément fini est segment de droite de longueur $2a$ au centre duquel on choisit l'origine des abscisses x (fig 1.2.a). Il est souvent avantageux d'utiliser la coordonnée naturelle (fig 1.2.b) :

$$\varepsilon = \frac{x}{a} \quad (-1 \leq \varepsilon \leq 1) \quad (1.1)$$

Dans l'interpolation paramétrique, l'approximation polynomiale est :

$$u(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots + b_{p+1}x^p = \sum_{i=1}^{p+1} b_i x^{i-1} = P(x)p. \quad (1.2)$$

Pour un élément fini à n_n^e ($\equiv n_n^e$) nœuds, on retient les n premiers termes :

$$(n_n^e \geq 2; n_n^e = n_p = p + 1) \quad (1.3)$$

Les nœuds sont choisis équidistants :

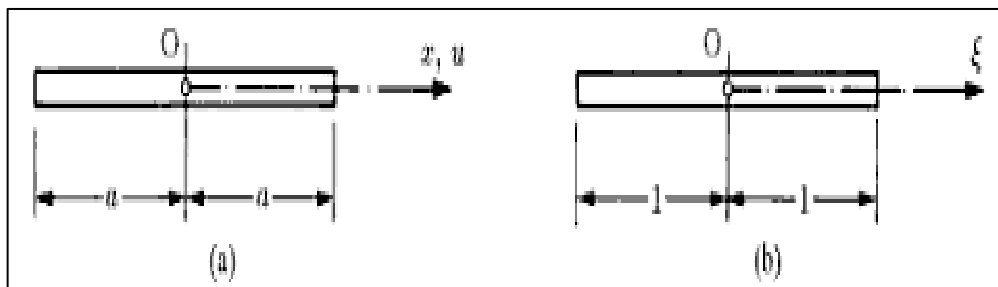


Figure 1.2 : Elément 1-D

(a) coordonnée cartésienne x ($-a \leq x \leq a$) ; (b) coordonnée naturelle.

$\varepsilon = (-1 \leq \varepsilon \leq 1)$ (La position des nœuds dépend de l'interpolation choisie ; fig 1.3)

Les fonctions d'interpolation sont très simples à construire : ce sont les polynômes de degré

$P = n - 1$, successivement unités en un nœud et nuls aux $n-1$ autres nœuds. La figure 1.3 montre ces fonctions pour des éléments à 2, 3 et 4 nœuds conduisant à des interpolations linéaire, quadratique et cubique.

On recourt rarement à une interpolation supérieure au degré $p=3$, car la matrice de rigidité croît en complexité ; de plus, clic est pleine et augmente la largeur de bande lors de l'assemblage.

REMARQUE

Les fonctions de la figure 1-3 sont des polynômes d'interpolation de Lagrange, dont l'expression générale est

$$L_i^p(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_p)(x - x_{p+1})}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_p)(x_i - x_{p+1})} \quad (1.4)$$

$L_i^p(x)$ est un polynôme de degré p , qui passe par p point x ($j \neq i$) et vaut 1 au point restant x_i , soit,

$$L_i^p(x_j) = \delta_{ij} \quad (2.3) \quad (1.5)$$

Avec **(1)** $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{x}/\boldsymbol{a}$, il est clair que $L_i^p(\boldsymbol{x}) = L_i^p(\boldsymbol{\varepsilon})$. Enfin, la somme des fonctions d'interpolation doit être égale à l'unité

$$\sum_{i=1}^{p+1} L_i^p = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i = 1 \quad (1.6)$$

Afin de représenter le mode rigide ($u=cste$).

1.2.2.3 Interpolation 2-D

1.2.2.3.1 Continuité aux frontières

On doit, rappelons-le, assurer la continuité tout le long d'une frontière séparant deux éléments, à l'aide des seules valeurs nodales communes.

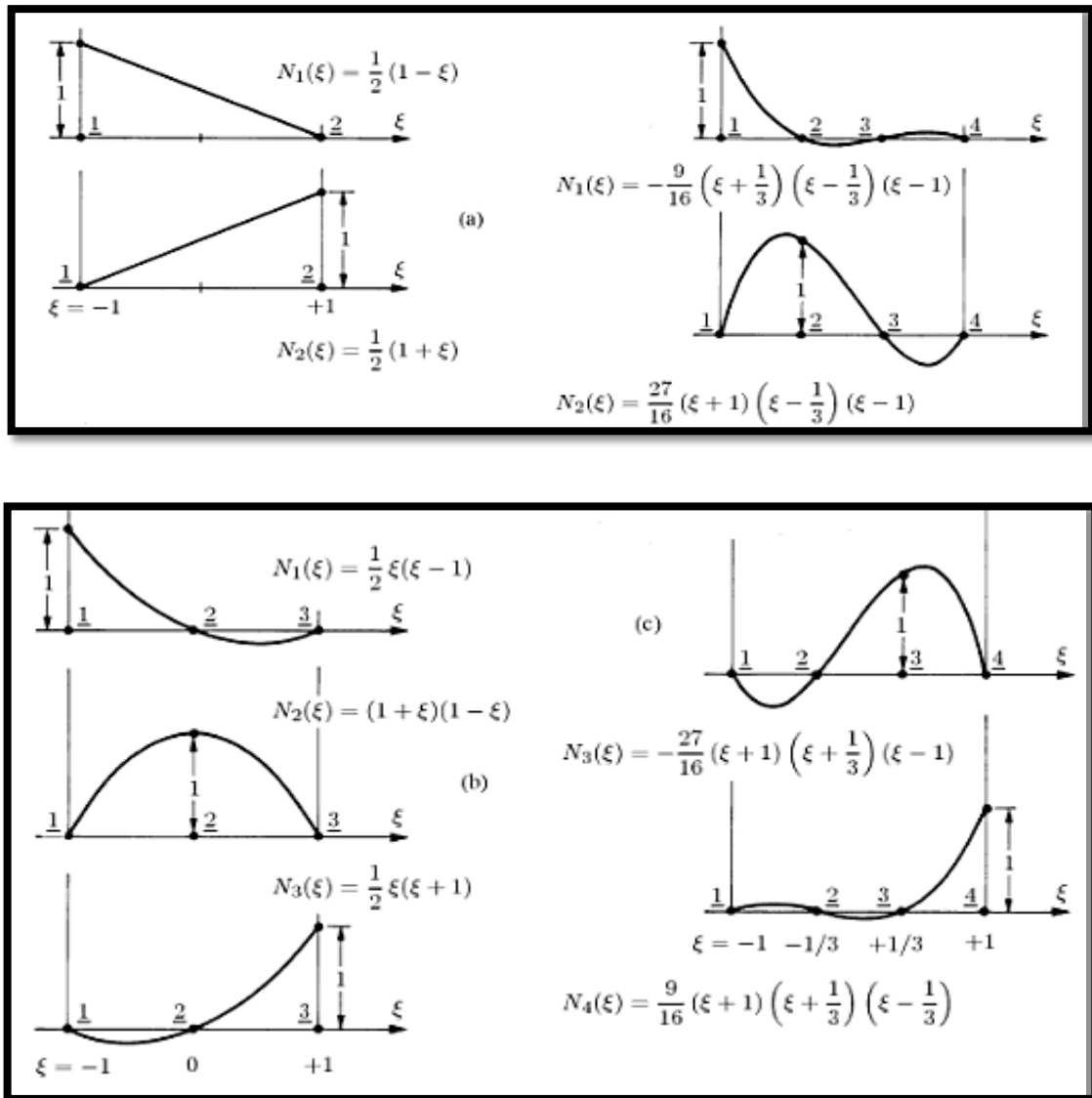


Figure 1.3 : Fonctions d'interpolation lagrangiennes : (a) linéaires ; (b) paraboliques ; (c) cubique.

Pour une interpolation polynomiale, le champ inconnu est aussi un polynôme le long d'une frontière. Par conséquent, avec des polynômes complets, on assure la continuité C^0 si, pour un polynôme de degré p sur une frontière, on place $p+1$ nœuds le long de cette frontière [Fran.91].

1.2.2.3.2 Élément finis triangulaires :

On construit quasi spontanément des éléments triangulaire à $n_n^e = (p + 1)(p + 2)/2$ nœuds (figure 1-4), correspondant à un polynôme complet de degré p en les variables indépendantes x et y ,

Avec continuité C^0 du même degré sur chacune des trois frontières.

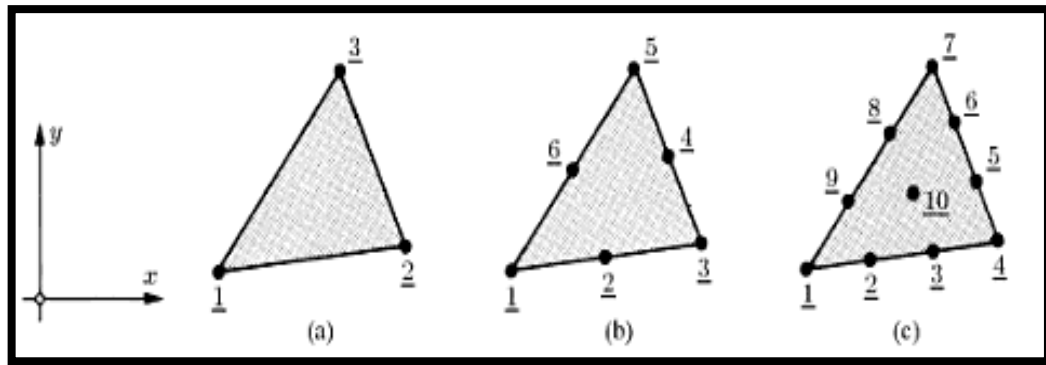


Figure 1.4 : Eléments finis triangulaires avec continuité C^0 : (a) linéaire ; (b) quadratique ; (c) cubique.

Le polynôme d'interpolation s'écrit (composante u par exemple) :

$$u(x, y) = b_1 + b_2y + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6x^2 + \dots + b_{(p+1)(p+2)/2}y^2 = P(x, y)p \quad (2.5)$$

et ses termes apparaissent naturellement grâce au triangle de pascal (tab 1.1).

Triangle	Degré	p	Nombre de termes
1	constant	0	1
$x \quad y$	linéaire	1	3
$x^2 \quad xy \quad y^2$	quadratique	2	6
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	cubique	3	10
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	quartique	4	15
$x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5$	quintique	5	21
...

Figure 1.5 : Triangle de pascal

Dans les éléments finis destinés aux calculs basés sur la convergence h on ne dépasse pratiquement jamais les degrés 3. La matrice C peut toujours être inversée sans difficulté.

On peut aussi dessiner aisément les fonctions d'interpolation (fig 1.5) et par suite en chercher les équations. On vérifie que leur somme vaut 1 :

$$\sum_{i=1}^{n_n^e} N_i = 1$$

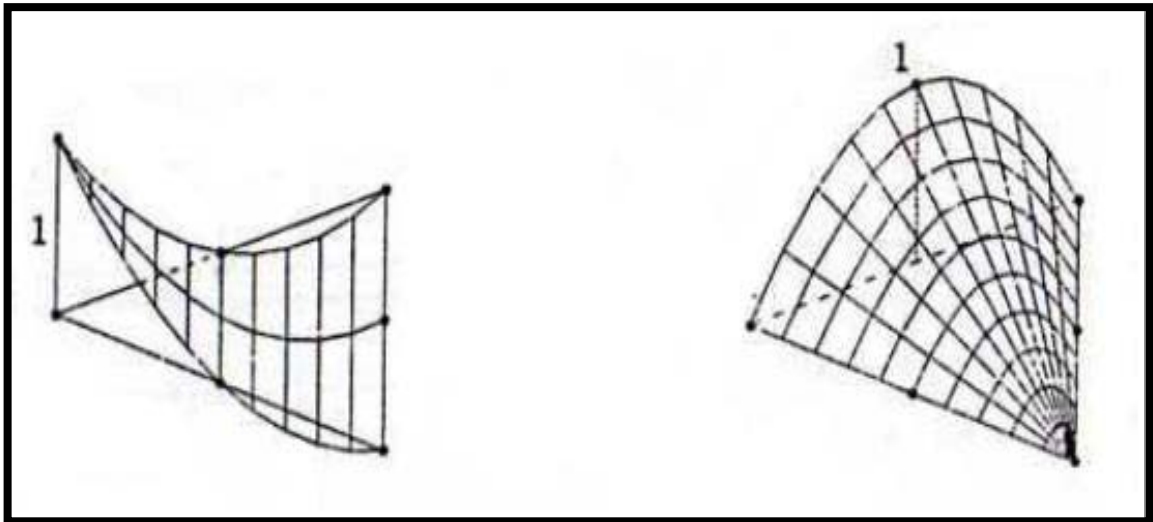


Figure 1.6 : Fonctions d'interpolation du triangle quadratique

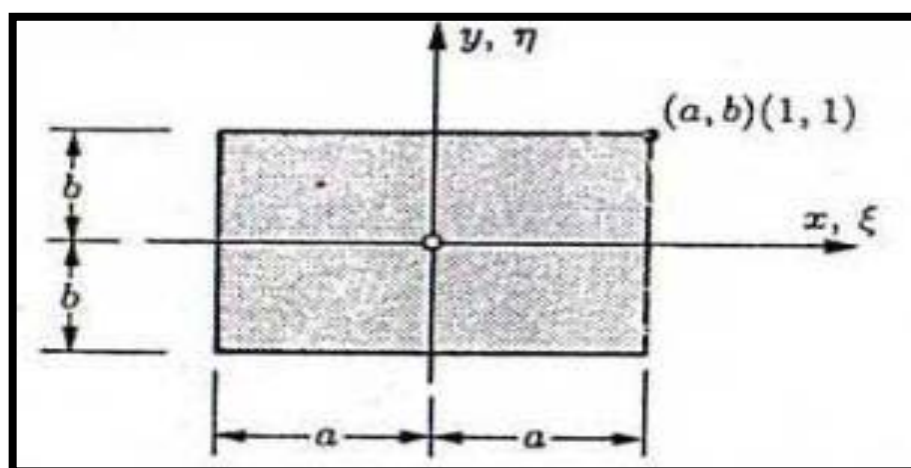
2.3.2.3 Eléments finis rectangulaires

Plaçant l'origine des coordonnées au centre de l'élément rectangulaire, de dimension $2a \times 2b$, on définit avantageusement les coordonnées naturelles :

$$\varepsilon = \frac{x}{a} \eta = \frac{y}{b}$$

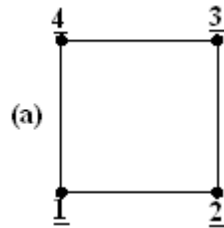
Qui valent ± 1 sur les frontières du rectangle (figure 1.6)

En partant de l'interpolation de Lagrange à une variable indépendante, on peut, pour les domaines rectangulaires, construire deux familles de fonctions d'interpolation.

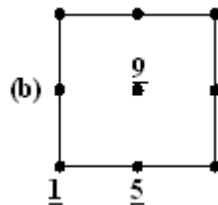
Figure 1.7 : Elément rectangulaire et ses coordonnées carte siennes (x, y) et naturelles

Famille de Lagrange

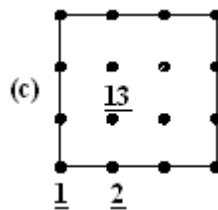
Les nœuds sont placés aux intersections des lignes d'un quadrillage régulier (fig 1.8) et les fonctions d'interpolation peuvent s'obtenir par le produit des polynômes de Lagrange de chacune des coordonnées x et y, ou ξ et η . L'élément cubique est, déjà, rarement utilisé [Fran.91].



$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= L_1^1(\xi)L_1^1(\eta) \quad (\eta) = (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \\
 N_2(\xi, \eta) &= L_2^1(\xi)L_1^1(\eta) \quad (\eta) = (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \\
 N_3(\xi, \eta) &= L_2^1(\xi)L_2^1(\eta) \quad (\eta) = (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \\
 N_4(\xi, \eta) &= L_1^1(\xi)L_2^1(\eta) \quad (\eta) = (1 - \xi)(1 + \eta)/4
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$



$$\begin{aligned}
 N_4(\xi, \eta) &= L_1^2(\xi)L_1^2(\eta) = \xi\eta(1 - \xi)(1 - \eta)/4 \\
 N_5(\xi, \eta) &= L_2^2(\xi)L_1^2(\eta) = -\eta(1 + \xi^2)(1 - \eta)/2 \\
 N_9(\xi, \eta) &= L_2^2(\xi)L_2^2(\eta) = -\eta(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$



$$N_1(\varepsilon, \eta) = L_1^3(\varepsilon)L_1^3(\eta)$$

$$N_2(\varepsilon, \eta) = L_2^3(\varepsilon)L_1^3(\eta) \quad (2.9)$$

$$N_{13}(\varepsilon, \eta) = L_2^3(\varepsilon)L_2^3(\eta)$$

Figure 1.8: famille des rectangles de Lagrange et quelques fonctions d'interpolation

(a) Élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bi cubique.

La figure 1.8 montre les fonctions d'interpolation typiques de l'élément quadratique.

La fonction du nœud central s'appelle une fonction bulle, pour des raisons évidentes ; elle s'associe à des degrés de liberté internes qui peuvent être condensés. En tout point, la somme des fonctions vaut 1.

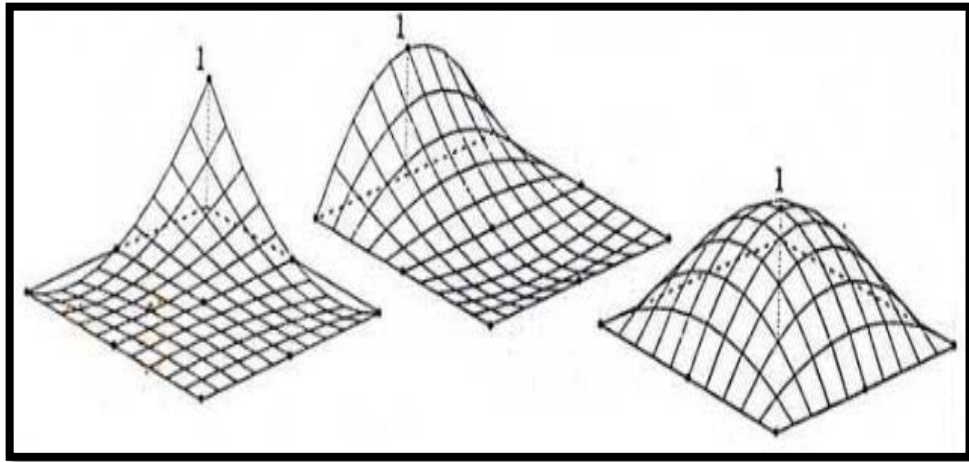


Figure 1.9 : Fonctions d'interpolation typiques de l'élément biquadratique

L'interpolation paramétrique $u = Pp$ comprend les termes contenus dans un losange issu du triangle de Pascal, comme l'indique la figure 1.9. Le polynôme est complet jusqu'au degré p , puis incomplet jusqu'au degré $2p$.

Sur des lignes x (ou ε) = cste, ou y (ou η) = cste, l'interpolation est complète au degré p

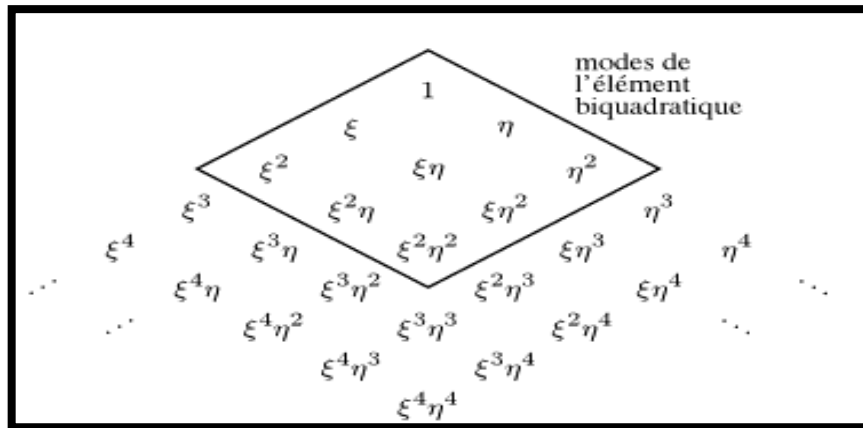


Figure 1.10: Termes de l'interpolation polynomiale des rectangles Lagrange
 Famille de Serendip

Ces éléments sont construits sans nœuds internes (fig 1.10). Ils sont donc plus simples que les précédents et, souvent, préférés. Les fonctions d'interpolation sont faciles à visualiser. En tout point d'un élément, leur somme est encore unité. L'élément bilinéaire est identique à celui de la famille de Lagrange [Fran.91].

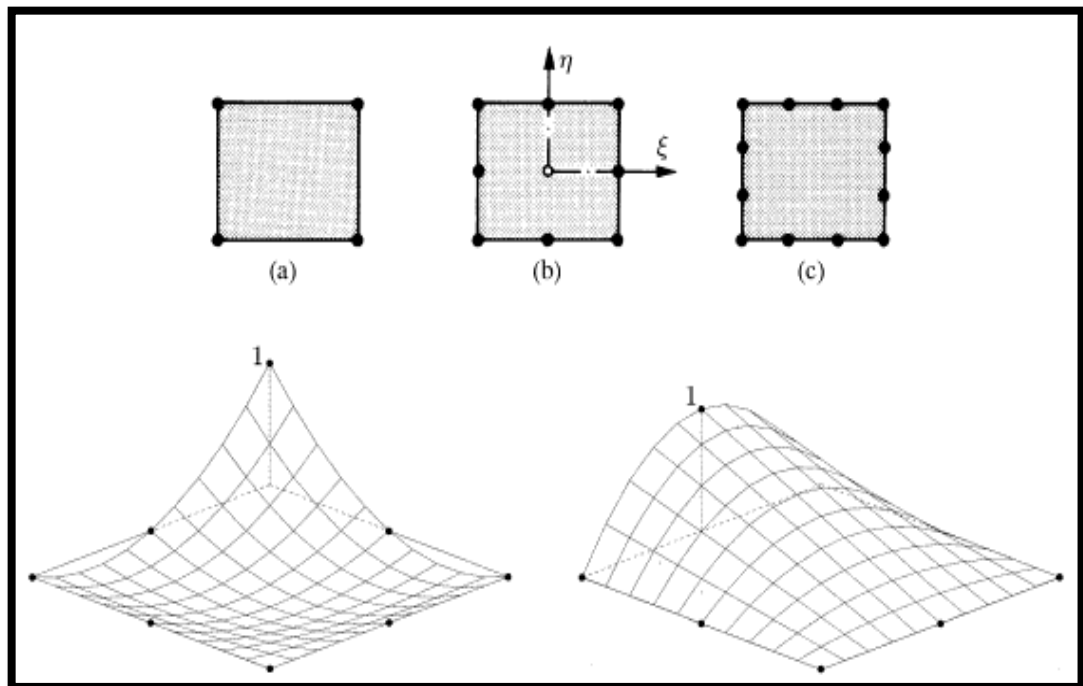


Figure 1-11 : Famille des rectangles de Serendip : (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bi cubique ; (d) fonctions d'interpolation de l'élément biquadratique

$$\begin{aligned} \text{nœuds d'angle : } N_i &= (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1)/4; \\ \text{nœuds médians : si } \eta_i = 0 : N_i &= (1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)/2; \text{ si } \xi_i = 0 : N_i = (1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2)/2 \\ (\underline{i} = \text{numéro du nœud ; } (\xi_i, \eta_i) &= \text{coordonnées du nœud } \underline{i}) \end{aligned}$$

(d)

L'interpolation paramétrique est encore issue d'un triangle de Pascal (fig 1.11).

Tant que $p \leq 3$, le polynôme, de degré $+1$, est complet au degré p . Quel que soit p , il demeure complet au degré p sur les lignes $x(\text{ou } \varepsilon) = cste, y(\text{ou } \eta) = cste$. En pratique, on ne dépasse guère $p = 3$.

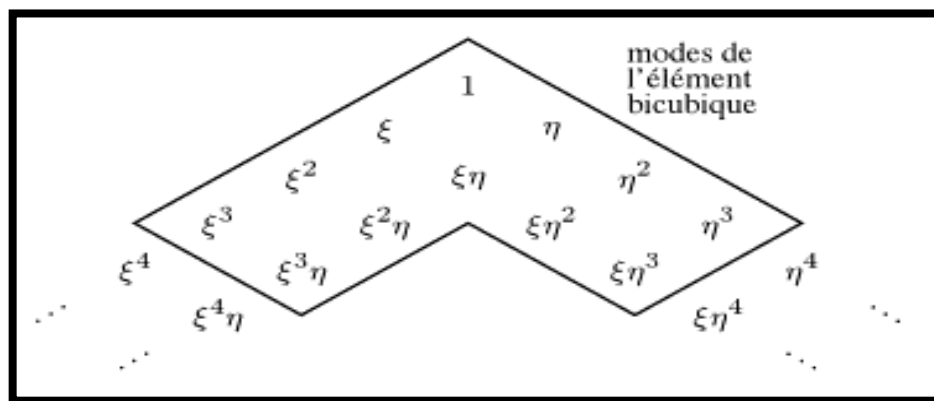


Figure 1.12 : Modes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Serendip

Remarque :

1. Les coordonnées (x, y) ou (ε, η) d'un domaine rectangulaire ont un caractère local.
2. Les polynômes devant être au moins complets au degré $p = m$, il est permis d'omettre des termes dans les degrés supérieurs.
3. D'ordinaire, il faut éviter les dissymétries vis-à-vis des coordonnées (x, \dots) ou (ε, \dots) , sinon on favorise l'une d'entre elles au détriment d'un comportement déséquilibré.

Plus généralement, la structure des polynômes doit être conservée lors d'une transformation des coordonnées (translation et rotation) ; cette propriété, appelée isotropie géométrique, est garantie pour les polynômes complets, ou incomplets mais de symétrie.

4. Lorsque le champ est vectoriel, les polynômes doivent être tels que les composantes de la déformation soient du même degré quand elles sont de même nature, sinon on favorise une composante par rapport à l'autre et, comme précédemment, on déséquilibre la réponse de l'élément. Par exemple, en élasticité plane, les composantes ε_x et ε_y doivent être de même degré (donc $u(x, y)$ et $v(x, y)$ aussi).

5. Poussant plus avant la même idée, si, dans une composante du tenseur déformation, interviennent plusieurs composantes du déplacement (couplage), alors chaque terme devrait être du même degré. En élasticité plane, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ couple $u(x, y)$ et $v(x, y)$ qui, dérivés une fois, doivent donc être interpolés au même degré (même exigence que ci-dessus). Par contre, dans une poutre de Timoshenko, ou $\beta = \frac{dv}{dx} - \alpha$, le champ $v(x)$ devrait être d'un degré supérieur au champ $\alpha(x)$ [Fran.91].

1.2.2.4 Interpolation 3-D

On élabore, de la même manière, des éléments tridimensionnels, en forme de tétraèdre, parallélépipède rectangle (hexaèdre), prisme à base triangulaire, etc. (fig1.12).

La continuité aux frontières a maintenant lieu sur les faces : les déplacements nodaux doivent définir le champ inconnu univoquement en tous les points d'une face [Fran.91].

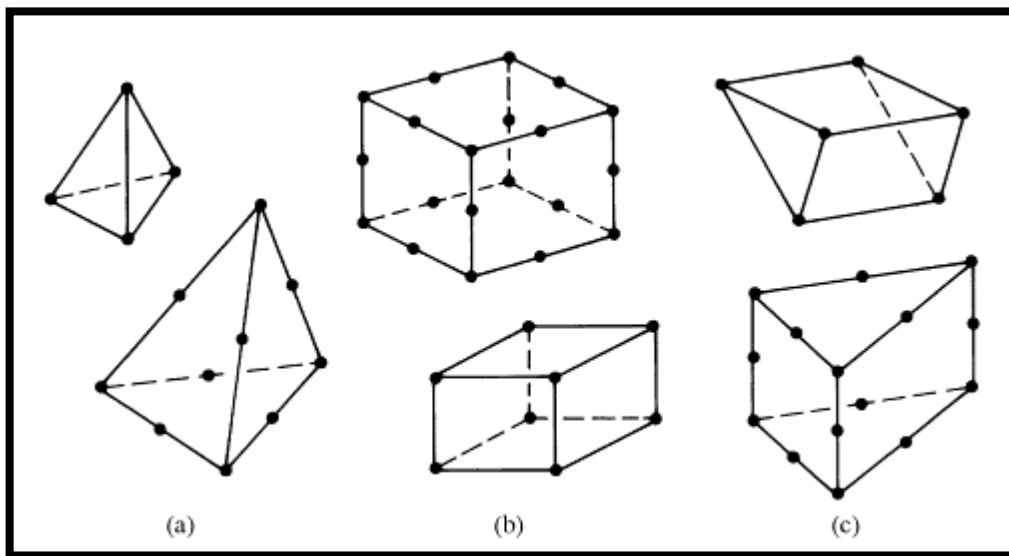


Figure 1.12 : Eléments tridimensionnels : (a) tétraèdres à 4 et 10 nœuds ; (b) briques à 8 et 20 nœuds ; (c) prismes à 6 et 15 nœuds

CHAPITRE 2



ELASTICITE PLANE

2. Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode générale d'analyse structure dans laquelle une structure continue est remplacée par un nombre fini de points « nœuds ».

Tous les matériaux possèdent à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est-à-dire que si les forces extérieures, provoquant la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que les forces qui lui donnent naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite « théorie d'élasticité » qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces.

Nous présentons dans ce chapitre, une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans le cas bidimensionnel. Dans ce cas dérive les cas particuliers de l'élasticité plane (état plan de déformation, état plan de contrainte).

2.1 Les équations générales d'élasticité

2.1.1 Les contraintes

2.1.1.1 Notion de contrainte

Soit un solide en équilibre comportant 2 parties 1 et 2 limitées par une section S ,

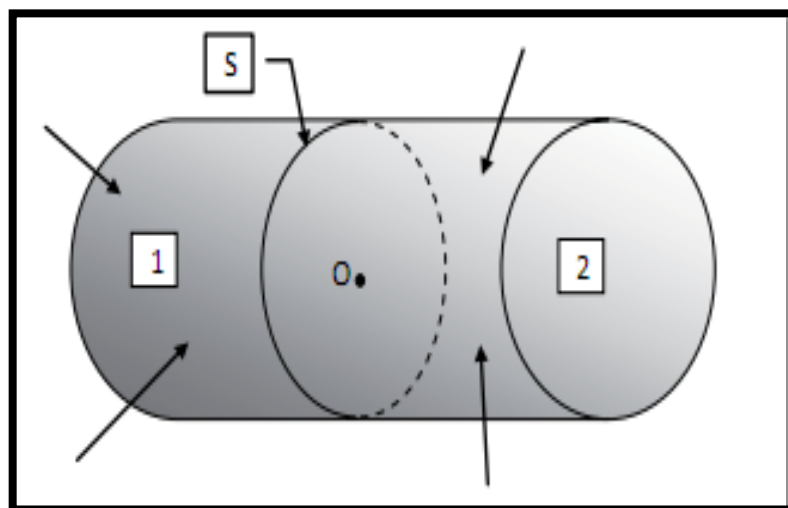


Figure 2.1 : Equilibre d'un solide

Son état d'équilibre permet d'établir que la somme vectorielle des forces issue de 1 et agissant sur 2 d'une part, et de 2 agissant sur 1 d'autre part, est nulle :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$$

L'équilibre de chacune des parties, 1 par exemple, est donc caractérisé par l'action des forces extérieures de volume et de surface qui lui sont appliquées mais également par les forces intérieures exercées par la partie 2 sur la section S.

On définit donc le vecteur contrainte \vec{f}_1 comme étant la limite de $\frac{d\vec{F}_1}{dS}$ lorsque la surface dS tend vers zéro. Quand dS est considérée dans le plan yz, ce vecteur \vec{f}_1 peut-être décomposé en trois composantes : une normale à cette surface et deux dans son plan. La première, égale à

$\sigma_{xx} = \sigma_x = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_x}{dS}$, est appelée contrainte normale alors que les deux autres, notées respectivement $\tau_{xy} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_y}{dS}$ et $\tau_{xz} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF_z}{dS}$ sont dites de cisaillement.

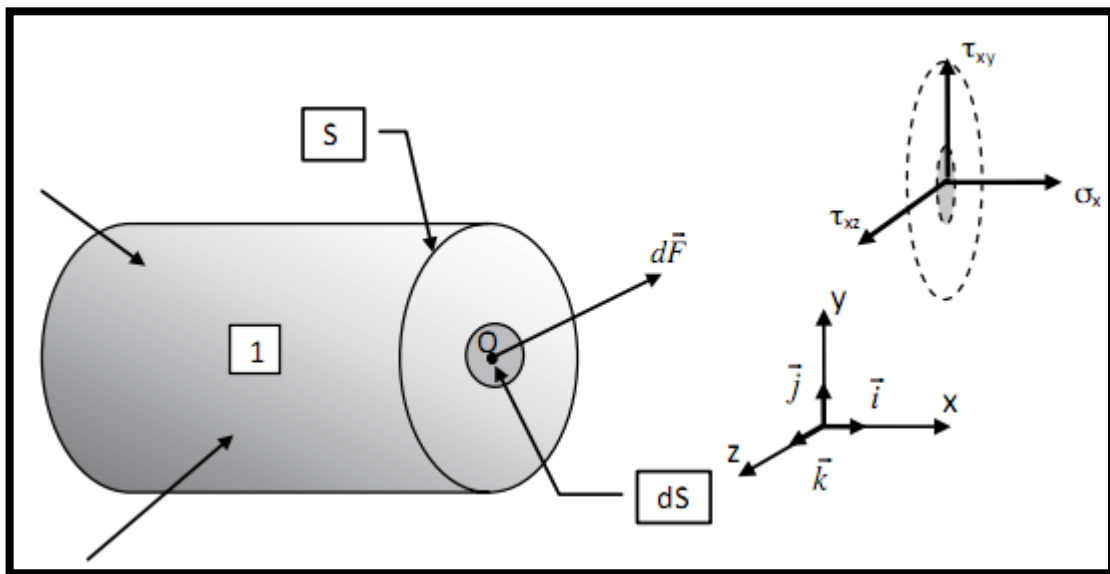


Figure 2.2: notion de contraint

En répétant pour les plans(xz) (\vec{f}_2) et (xy) (\vec{f}_3), deux contraintes normales et quatre de cisaillement viennent s'ajouter aux trois précédentes, soit $\sigma_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ pour le premier et $\sigma_{zz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ pour le second. Finalement, les vecteurs contraints ont pour expressions :

$$\vec{f}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}; \vec{f}_2 = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}; \vec{f}_3 = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

La convention de signes la plus souvent retenue dans les logiciels éléments finis est d'associer une contrainte normale positive à une traction [Caze.10].

2.1.1.2 Equations internes

L'étude de l'équilibre d'un élément fini infiniment petit de cotés dx, dy, dz, soumis à des forces internes de volume f_x^v, f_y^v, f_z^v permet d'établir dans un premier temps la réciprocité des contraintes de cisaillement. En effet et en se basant sur l'équilibre des moments, on peut déduire pour :

L'axe z

$$\sum M_{IOz} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \right] \frac{dx}{2} + (\tau_{xy} dydz) \frac{dx}{2} - \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \right] \frac{dy}{2}$$

$$- (\tau_{yx} dx dz) \frac{dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} = 0$$

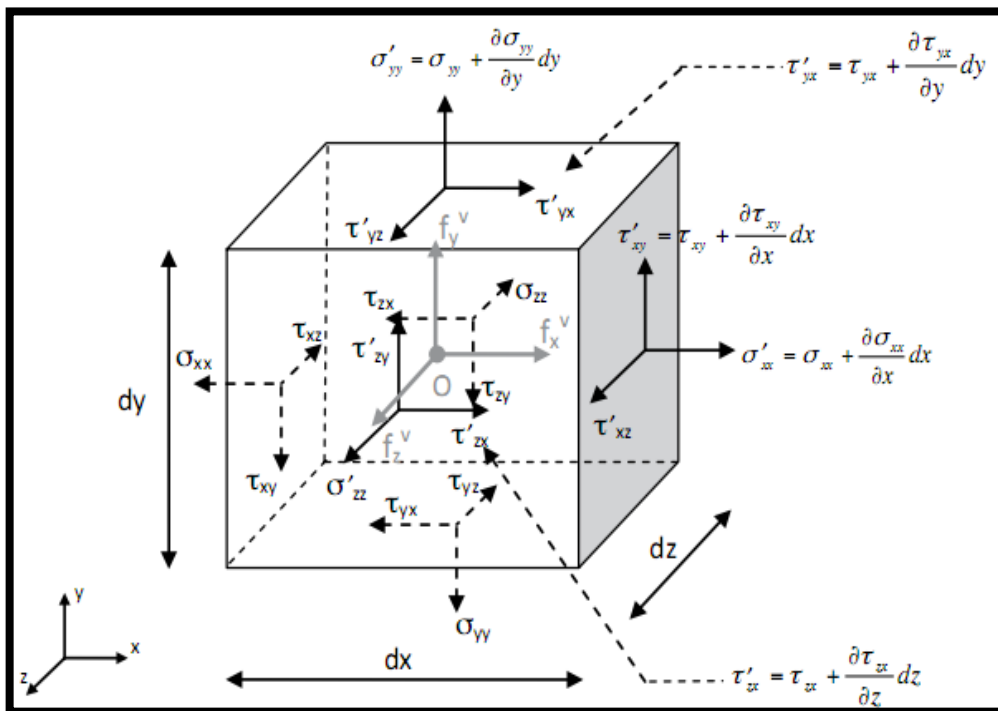


Figure 2.3 : Equilibre de volume

D'où

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.2)$$

Et les deux autres axes x et y

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ et } \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.3)$$

Le nombre de contraintes de cisaillement se réduit donc à trois. Es six valeurs caractérisant l'état de contrainte peuvent alors être regroupées au sein d'un vecteur de composantes :

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}\} \quad (2.4)$$

Maintenant et en effectuant la somme des efforts suivant x, l'équation d'équilibre correspondante permet également de montrer que :

$$\begin{aligned} \sum F_{Ix} = 0 &\Leftrightarrow \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy \\ &- \sigma_{xx} dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy + f_x^v dx dy dz = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + f_x^v = 0 \end{aligned}$$

Soit après extension de l'opération aux deux autres axes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + f_x^v &= 0 \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + f_y^v &= 0 \Leftrightarrow \text{div}(\sigma) + f = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^v = 0$$

Ces trois équations sont généralement appelées équations d'équilibre de volume.

2.1.1.3- Equations externes

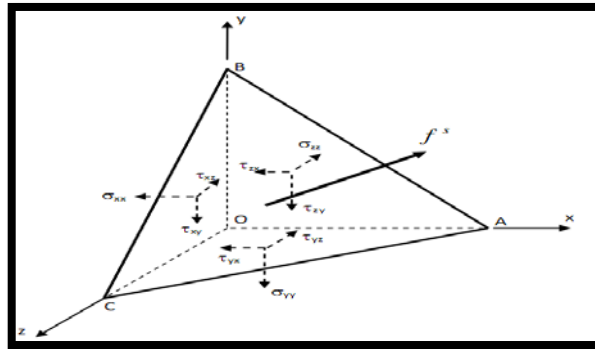


Figure 2.4 : Equilibre d'une surface

Soit un tétraèdre OABC infiniment petit dont l'aire ABC, notée ds , constitue la surface du milieu solide.

Sachant qu'une charge répartie f^s de composantes $\begin{pmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{pmatrix}$ est appliquée sur cette surface et que

les cosinus directeurs de la normale au plan ABC sont notés l, m et n , l'équilibre du tétraèdre se résume à un système de trois équations :

$$f_x^s ds = l. ds. \sigma_{xx} + m. ds. \tau_{yx} + n. ds. \tau_{zx}$$

$$f_y^s ds = l. ds. \tau_{xy} + m. ds. \sigma_{yy} + n. ds. \tau_{zy}$$

$$f_z^s ds = l. ds. \tau_{xz} + m. ds. \tau_{yz} + n. ds. \sigma_{zz}$$

Soit après simplification :

$$f_x^s = l. \sigma_{xx} + m. \tau_{yx} + n. \tau_{zx}$$

$$f_y^s = l. \tau_{xy} + m. \sigma_{yy} + n. \tau_{zy} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = [\sigma] \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$f_z^s = l. \tau_{xz} + m. \tau_{yz} + n. \sigma_{zz}$$

Ces équations d'équilibre de surface correspondent en fait aux conditions aux limites du système d'équations aux dérivées partielles (2.5). $[\sigma]$ est appelé tenseur des contraintes.

2.1.1.4 Les équations de compatibilité

Quand on connaît les déplacements, il est simple de déterminer les déformations. Mais le problème inverse n'est pas aussi simple : 3 composantes pour le déplacement et 6 composantes pour le tenseur des déformations. On a donc 6 inconnues et trois équations : le problème n'a pas de solution unique. Cela est dû au mouvement du corps solide : rotation d'ensemble, translation (Mécanique des milieux indéformable). Il existe des relations de compatibilité pour soulever ces indéterminations qui sont :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.7)$$

Cette équation générale permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

2.1.2 Les déformations

2.1.2.1 Notion de déformation

L'action des forces extérieures sur un solide déformable entraîne pour chacun des points de sa géométrie un mouvement pouvant être décomposé en trois phases distinctes : une translation d'ensemble (mouvement de corps rigide en translation), une rotation d'ensemble (mouvement de corps rigide en rotation) et enfin une déformation pure.

La déformation qui correspond à un mouvement relatif par rapport à un référentiel donné, peut suivre plusieurs hypothèses comme celles des petites ou grandes déformations mais également être associée à des petits ou grands déplacements [Caze.10].

2.1.2.2 Déplacements

Le mouvement d'un point de O vers O' caractérisé par le vecteur \vec{q} peut-être décomposé dans un système xyz en 3 composantes u, v, w , qui représentent les déplacements de ce point sur les axes de référence soit :

$$\vec{q} = u.\vec{i} + v.\vec{j} + w.\vec{k} \quad (2.8)$$

On définit par ailleurs la norme du déplacement comme étant :

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (2.9)$$

Ces déplacements u, v ou w sont généralement des fonctions de x pour les poutres, de x et y pour les plaques et coques, x, y et z pour les solides.

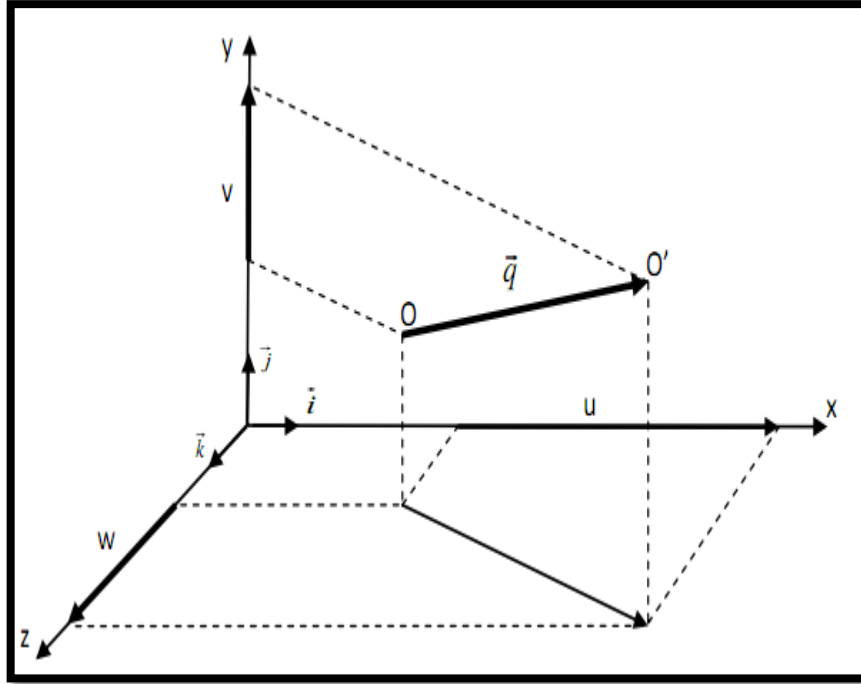


Figure 2.5 : déplacement d'un point

2.1.2.3 Relations entre déplacements et déformations

En considérant dans un premier temps un état plan de déformation dans le plan xOy .

Les déformations normales et distorsion angulaire peuvent être obtenues en posant que :

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A'B' - AB}{AB} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{yy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A'D' - AD}{AD} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - B'A'D' \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.11)$$

La généralisation de cette approche bidimensionnelle aux deux autres plans permettra d'obtenir :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

D'où l'expression générale des composantes du vecteur des déformations :

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}\} \tag{2.13}$$

L'expression (3.13) pourra également être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

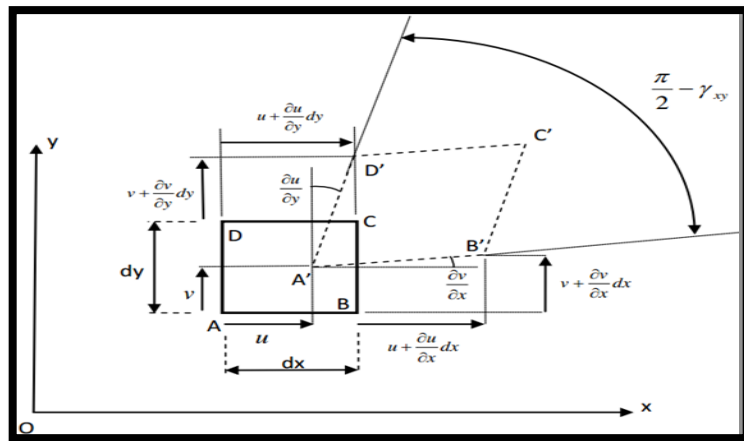


Figure 2.6 : déformations planes

2.1.3 Relations entre déformations et contraintes

Restant dans le domaine élastique linéaire, l'application de la démarche précédente aux deux autres axes y et z , amènerait inmanquablement à des résultats similaires (permutations croisées des indices x, y et z). De ce fait et toujours en raison de la linéarité, la relation tridimensionnelle entre déformations et contraintes normales peut être obtenue par superposition des trois états d'équilibre suivant x, y et z soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned} \tag{2.15}$$

De plus, il est également possible via un essai de cisaillement pur de montrer qu'il existe des relations linéaires entre contraintes et déformations de cisaillement telles que :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \text{ avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.16}$$

D'où la relation finale entre déformations et contraintes :

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\} \text{ avec } [D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

2.1.4 Relations entre contraintes et déformations

L'inversion des expressions (3.15) et (3.16) permet de déduire les contraintes à partir des déformations, soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{xx}(1-\nu) + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{yy}(1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{zz}(1-\nu) + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (2.19)$$

Avec

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = [D]^{-1}$$

Ce qui permet de démontrer que $[H]$ n'est pas définie pour $\nu = 0.5$.

2.1.5 Etat plan de contrainte et de déformation

➤ Déformation plane

Considérant un solide de section transversale constante, l'hypothèse de déformation plane consiste à considérer un comportement plan identique quelle que soit la profondeur. En d'autres termes, le solide peut être décomposé en « tranches » d'épaisseur unitaire, le calcul se limitant à l'étude d'une seule de ces tranches.

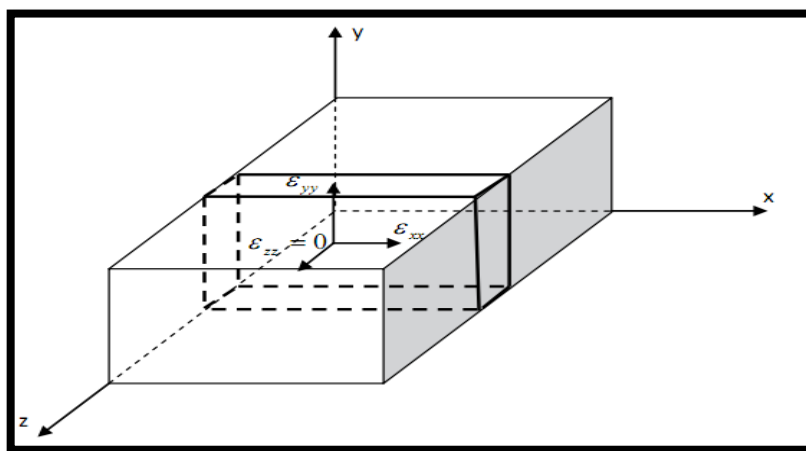


Figure 2.7 : Etat plan de déformation

En conséquence, toutes les déformations associées à l'axe transversal, z en l'occurrence, seront prises égales à zéro.

On a donc :

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \text{ et } \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.20)$$

En remplaçant (2.20) dans (2.19), la relation contrainte-déformation devient pour les déformations planes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (2.21)$$

De (2.15), on déduit également que :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.22)$$

➤ contrainte plane

A l'inverse de l'état de déformation plane, l'hypothèse de contrainte plane suppose que toutes les contraintes associées à l'axe transversal, z en l'occurrence, sont nulles.

On a donc :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ et } \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.23)$$

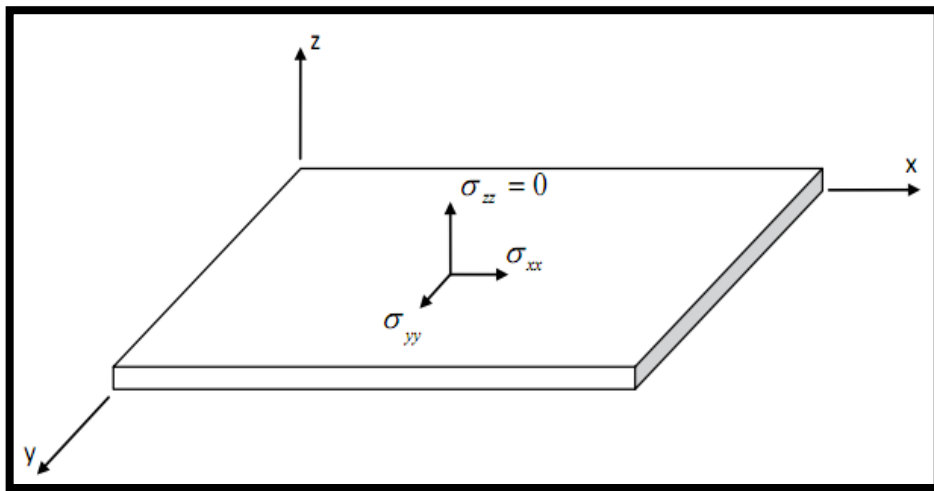


Figure 2.8 : Etat plan de contrainte

(2.15) permet d'établir que :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.24)$$

Mais également que :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Cette approche étant directement applicable aux éléments de faibles épaisseurs, les éléments membranes, plaques et coques suivront cette hypothèse de contrainte plane.

2.2 Les équations fondamentales de l'élasticité plane

2.2.1 Les équations d'équilibre

2.2.1.1 Les équations différentielles d'équilibre

En annulant $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ et en adoptant f_x^v et f_y^v pour les composantes des forces volumiques dans la direction x et dans la direction y respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y^v = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

2.2.1.2 Les conditions de contour

Soient $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour du disque en chargement plan. Soient f_x^s et f_y^s les tractions superficielles imposées sur le contour. La définition du tenseur contrainte permet d'écrire :

$$\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = f_x^s \quad (2.27)$$

$$\left\{ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = f_y^s \right.$$

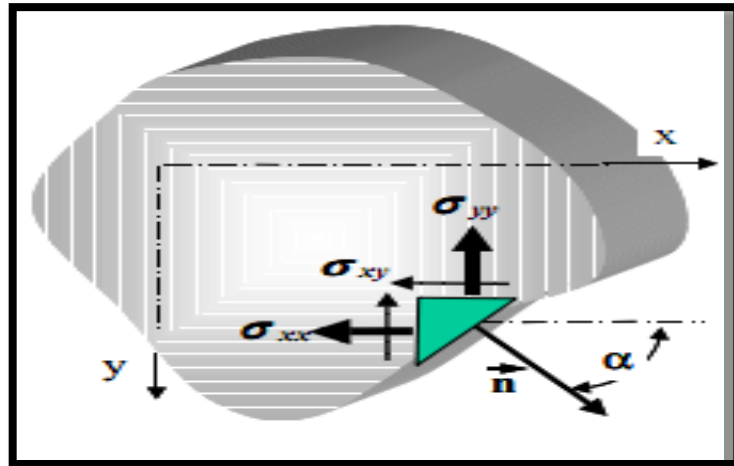


Figure 2.9 : Conditions de contour en contraintes planes

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux axes coordonnée du prisme élémentaire sur la figure (2.9).

2. 2.1.3 Changement d'axe

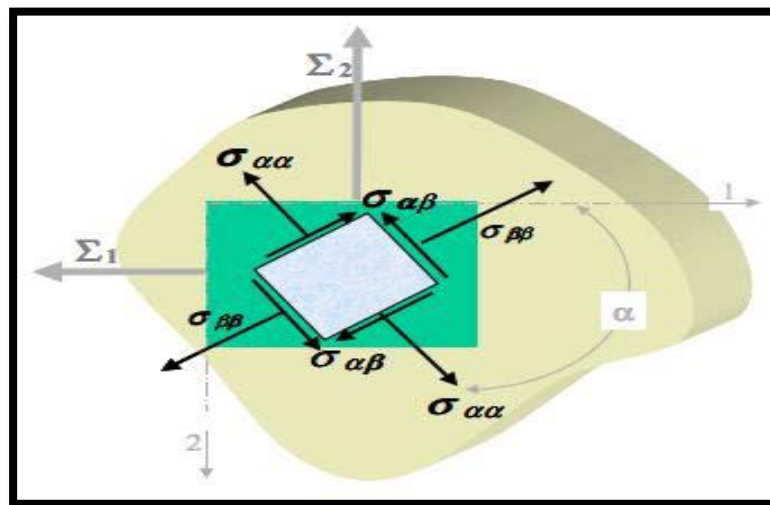


Figure 2.10 : Contraintes sur deux facettes orthogonales

Soient 1 et 2 les directions principales des contraintes ($\sigma_{12} = 0$) et Σ_1, Σ_2 (figure 2 – 10) les contraintes principales. Dans ce cas on montre que 1 et 2 sont aussi les directions principales des déformations. Les formules de changement d'axes établies pour le tenseur des contraintes en 3 dimensions prennent des expressions particulièrement simples en contraintes planes ou en déformations planes :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\alpha} = \Sigma_1 \cos^2\alpha + \Sigma_2 \sin^2\alpha \\ \sigma_{\beta\beta} = \Sigma_1 \sin^2\alpha + \Sigma_2 \cos^2\alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{2} \sin(2\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \sin^2\alpha \\ \varepsilon_{\beta\beta} = \varepsilon_1 \sin^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\alpha \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (3.28)$$

3.3.2. Les équations de compatibilité et le potentiel des contraintes

Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent précédant.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0$$

Si les déformations ε_{xz} , ε_{yz} sont nulles et que toutes déformations sont indépendantes de z , les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.29)$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes ou déformations planes, on part ce pendant plus souvent de la fonction d'Airy.

CHAPITRE 3

**VIBRATION DES
POUTRES
ET DES PLAQUES**

3.1 Vibration de flexion des poutres

3.1.1 Equation des poutres

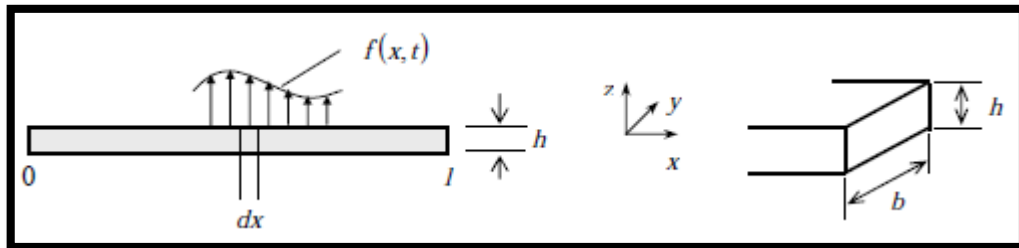


Figure 3.1: Geometries pour les poutres en flexion

Le déplacement transversal $w(x, t)$ est l'amplitude du mouvement de flexion. L'équilibre de l'efforts tranchants et des moments sur un élément de poutre dx est décrit par le schéma ci-dessous.

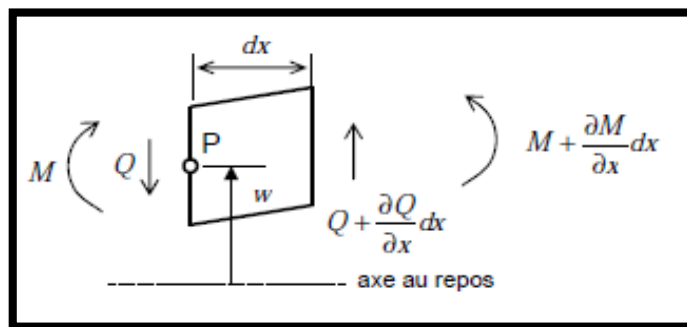


Figure 3.2: Equilibre d'un élément de poutre dx

Q est la force de cisaillement ou effort tranchant. Le moment de flexion s'écrit.

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

$I = \frac{bh^3}{12}$ est le moment d'inertie de la section droite (selon l'axe y). L'équation d'équilibre des forces est établie en considérant que les déformations due au cisaillement peuvent se négliger (les sections droites ne se déforment pas).

$$\left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] - Q(x, t) + f(x, t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \tag{3.2}$$

Pour l'équilibre des moments par rapport au point P, les inerties de rotation selon y sont négligées.

$$\left[M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] - M(x, t) + \left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] dx + [f(x, t) dx] \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.3)$$

$$\left[\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + Q(x, t) \right] dx + \left[\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + \frac{f(x, t)}{2} \right] (dx)^2 = 0$$

Puisque dx est petit, $(dx)^2$ peut être négligé et finalement.

$$Q(x, t) = - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad (3.4)$$

Cette dernière expression permet de remplacer Q par M dans l'équation d'équilibre des forces

Soit:

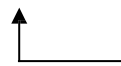
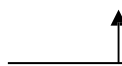
$$-\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} dx + f(x, t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t)$$

Dans le cas où la densité des forces extérieures est nulle

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

4 conditions aux limite



2 conditions initiales

Ces équations sont basées sur la théorie des poutres d'Euler-Bernouilli qui fait deux approximations importantes :

- les déformations de la section droite dues au cisaillement sont négligées,
- l'effet d'inertie de rotation est négligé.

La théorie des poutres de Timoshenko prend en compte ces deux phénomènes.

3.1.2. Conditions aux limites

Elles sont définies en considérant les 4 grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion

- déplacement dû à la flexion : $w(x, t)$
- déplacement angulaire (rotation) dû à la flexion : $\theta w(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$

- moment de flexion : $M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$
- force de cisaillement (effort tranchant) : $Q(x, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3}$

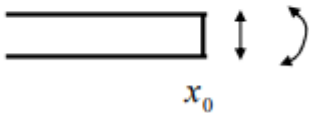
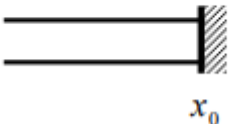
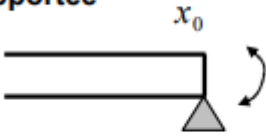
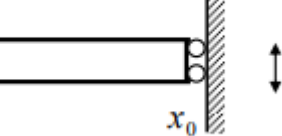
<p>extrémité libre</p>  <p style="text-align: center;">x_0</p>	<p>pas de contraintes sur le déplacement et la rotation le moment de flexion et la force de cisaillement s'annulent en x_0</p>	$M(x_0, t) = EI \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \left. \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité encastree</p>  <p style="text-align: center;">x_0</p>	<p>les déplacements transversal et angulaires sont nuls en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $\theta(x_0, t) = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité simplement supportée</p>  <p style="text-align: center;">x_0</p>	<p>le déplacement transversal est bloqué mais la rotation est libre \Leftrightarrow le moment de flexion est donc nul en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $M(x_0, t) = EI \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité guidée</p>  <p style="text-align: center;">x_0</p>	<p>le déplacement transversal est libre et la rotation est bloquée \Leftrightarrow la force de cisaillement est donc nulle en x_0</p>	$\theta(x_0, t) = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \left. \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right _{x=x_0} = 0$

Tableau 3.1 – Principales conditions aux limites pour les poutres

3.2. Vibration des plaques

3.2.1. Equation des plaques mince

De façon similaire à l'équation qui décrit les déplacements dus aux ondes de flexion dans les poutres, il est possible d'obtenir une équation pour décrire les ondes de flexion qui existent dans un milieu à deux dimensions c'est l'équation des plaques

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h = \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

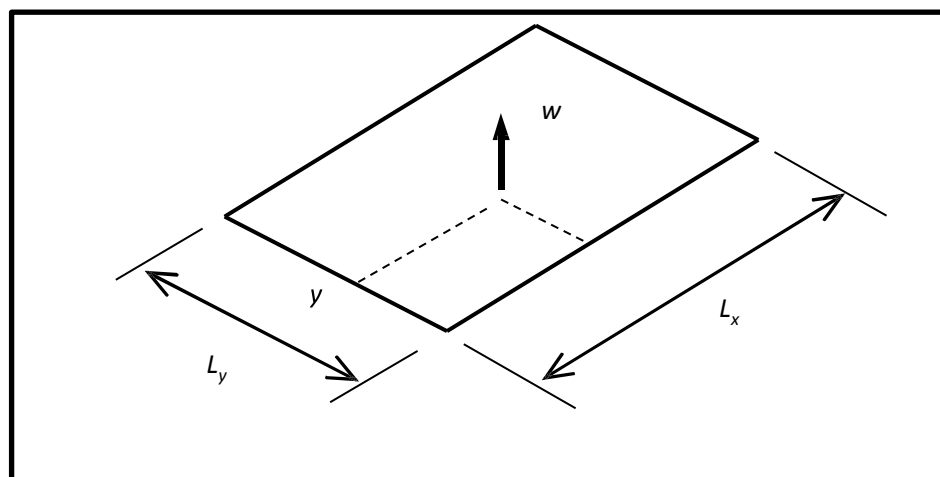


Figure 3.3 Notations pour la plaque

Avec $w(x, y, t)$ le déplacement transversal, D la rigidité de flexion

$$\Rightarrow D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

h épaisseur, ρ masse volumique, E module de Young, ν coefficient de Poisson,

$\nabla^4 \equiv \Delta^2$ est l'opérateur biharmonique ou double laplacien.

$$\nabla^4 \equiv (\nabla^2)^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \quad (3.7)$$

L'écriture des conditions aux limites dépend du système de coordonnées utilisé. pour une plaque rectangulaire, elles s'expriment pour chaque bord de la même façon que pour la poutre (voir partie 1). Par exemple, pour une plaque rectangulaire simplement supportée.

$$w(x, y, t) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, x = L_x, y = 0 \text{ et } y = L_y$$

$$\frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \text{ et } x = L_x$$

$$\frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \text{ et } y = L_y$$

L'équation des plaques ci-dessus correspond à la théorie des plaques minces ou théorie de Kirchoff-Love. Elle est l'équivalent de la théorie d'Euler-Bernouilli des poutres et néglige également les déformations dues au cisaillement et les effets de l'inertie de rotation. A cause de ces approximations, elle est valable pour les plaques minces (quand l'épaisseur est très petite devant les dimensions de la plaque et la longueur d'onde flexion) c'est à dire pour le domaine basse fréquence des plaques isotropes. La théorie plus complète, équivalente de la théorie des poutres de Timoshenko, est la théorie de **Mindlin** (1951).

3.2.2 Méthodes pour obtenir les solutions

La solution recherchée pour le déplacement transversal est

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)\mathbb{I}(t)$$

En l'introduisant dans l'équation différentielle des plaques on obtient

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2 \frac{X'' Y''}{X Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = -\frac{1}{\mu^2 T} \dot{T} = \text{constante} = \beta^4 \quad (3.8)$$

Avec : $\mu^2 = \frac{B}{\rho h}$ (μ n'est pas la célérité des ondes).

La difficulté apparaît dans le membre de gauche où il n'est plus possible d'obtenir des équations séparées pour $X(x)$ et $Y(y)$.

Une méthode de résolution consiste à choisir arbitrairement une fonction $X(x)$ qui satisfait les conditions aux limites, puis à résoudre l'équation précédente pour obtenir $Y(y)$. Elle conduit à une solution exacte du problème. Cependant, il n'est pas possible de trouver des solutions analytiques dans la majorité des cas de conditions aux limites. Cette méthode est souvent employée quand deux bords opposés sont simplement supportés (ou appuyés): c'est cette démarche qui est décrite par la suite.

Pour traiter les autres cas on utilise le plus souvent la méthode de Rayleigh-Ritz, basée sur la minimisation de l'énergie vibratoire (potentielle et cinétique) ou encore une méthode approximative comme :

- la méthode des fonctions de poutre
- la méthode des effets de bords de Bolotin,
- la méthode de Galerkin utilisant une technique variationnelle,

- des méthodes basées sur les différences finies et les éléments finis.

3.2.3 Plaques rectangulaires simplement supportées sur deux bords opposés

La fonction $X(x)$ est obtenue en satisfaisant les conditions aux limites simplement supportées pour utiliser : $x = 0$ et $x = L_x$. La fonction obtenue pour les poutres peut donc être utilisée :

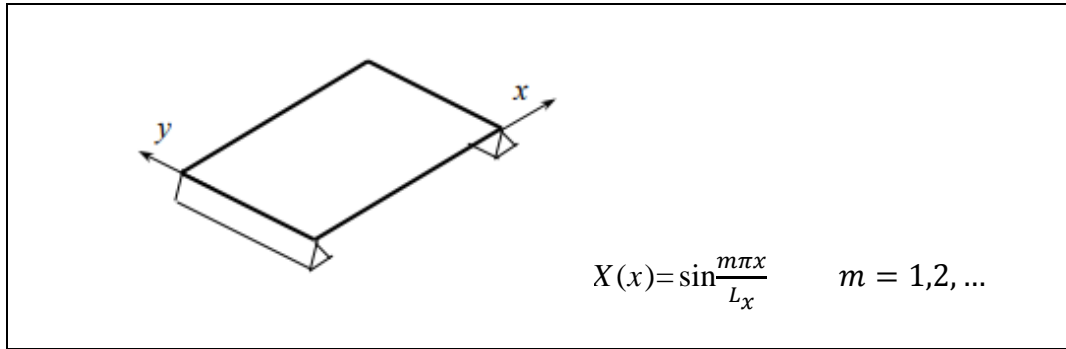


Figure 3.4 Plaque simplement supportée sur les deux bords opposés

Ses dérivées spatiales (par rapport à x)

$$X''(x) = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{L_x} \quad \text{et} \quad X^{(4)}(x) = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{L_x}$$

Sont reportées dans l'équation différentielle

$$\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 - 2\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = \beta^4 \quad (3.9)$$

Ce qui conduit à une équation différentielle d'ordre 4 :

$$Y^{(4)} - 2\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 Y'' + \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 - \beta^4\right] Y = 0 \quad (3.10)$$

Comme pour les poutres, on recherche des solutions de la forme $D e^{sy}$ où D et s sont des constantes. En reportant cette solution générale dans l'équation différentielle, on obtient une équation caractéristique

$$s^4 - 2\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 s^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 - \beta^4\right] = 0 \quad (3.11)$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont

$$S_1 = \gamma_1, S_2 = -\gamma_1, S_3 = j\gamma_2, S_4 = -j\gamma_2 \quad (3.12)$$

Avec:

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2} \quad (3.12)$$

donc la solution pour la fonction $Y(y)$ est

$$Y(y) = D_1 e^{\gamma_1 y} + D_2 e^{-\gamma_1 y} + D_3 e^{j\gamma_2 y} + D_4 e^{-j\gamma_2 y} \quad (3.13)$$

$$Y(y) = C_1 \sin \gamma_2 y + C_2 \cos \gamma_2 y + C_3 \sinh \gamma_1 y + C_4 \cosh \gamma_1 y$$

Cette solution est similaire à celle obtenue pour les poutres avec comme différence deux paramètres γ_1 et γ_2 à la place d'un seul. En toute rigueur, il faudrait écrire $Y_m(y)$ car les constantes de cette équation dépendent de m : $C_{im}, \gamma_{1m}, \gamma_{2m}$. Les coefficients de l'équation $Y(y)$ peuvent s'obtenir en fonction des conditions aux limites par la même méthode que celle employée pour les poutres:

- les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = L_y$ permettent d'obtenir 4 équations qui s'expriment sous forme matricielle

$$A C = 0$$

où A est une matrice 4×4 et C le vecteur des coefficients C_i .

- les solutions de l'équation caractéristique obtenue à partir de $\det(A) = 0$ permettent de calculer les fréquences propres et les déformées modales.

Remarque : cette démarche utilise la forme particulière de $X(x)$ pour des conditions aux limites simplement supportées pour laquelle X''/X et $X^{(4)}/X$ deviennent des constantes.

Pour les deux autres bords, il est possible de choisir n'importe quelles conditions aux limites.

Exemple : cas d'une plaque simplement supportée sur tous ses bords

Ce cas simple permet d'illustrer la méthode : les conditions simplement supportées en $y = 0$ et $y = L_y$ conduisent à l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin \gamma_2 L_y & \cos \gamma_2 L_y & \sinh \gamma_1 L_y & \cosh \gamma_1 L_y \\ 0 & -\gamma_2^2 & 0 & \gamma_1^2 \\ -\gamma_2^2 \sin \gamma_2 L_y & -\gamma_2^2 \cos \gamma_2 L_y & \gamma_1^2 \sinh \gamma_1 L_y & \gamma_1^2 \cosh \gamma_1 L_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0$$

Le calcul de $\det(\mathbf{A})=0$ conduit à

$$(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2 \sinh \gamma_1 L_y \sin \gamma_2 L_y = 0$$

En écartant les solutions triviales, reste finalement

$$\sin \gamma_2 L_y = 0 \Rightarrow \gamma_2 L_y = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Par ailleurs

$\gamma_2^2 = \beta^2 - (m\pi/L_x)^2$ avec $\beta^2 = \omega/\mu$ et $\mu = \sqrt{D/\rho h}$, ce qui permet d'écrire

$$\beta^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2$$

d'où l'expression des pulsations naturelles $\omega_{mn} = \beta^2 \mu$

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.15)$$

L'étape suivante consiste à utiliser les 4 relations obtenues avec les conditions aux limites

Sur $y = 0$ et $y = L_y$ pour exprimer 3 des 4 coefficients C_1 à C_4 . On obtient alors

L'expression

$$Y(y) = C_1 \sin \frac{n\pi y}{L_y} \quad (3.16)$$

qui permet d'écrire l'équation complète du déplacement d'une plaque simplement supportée

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] \phi_{mn}(x, y) \quad (3.17)$$

Avec la déformée modale

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} \quad (3.18)$$

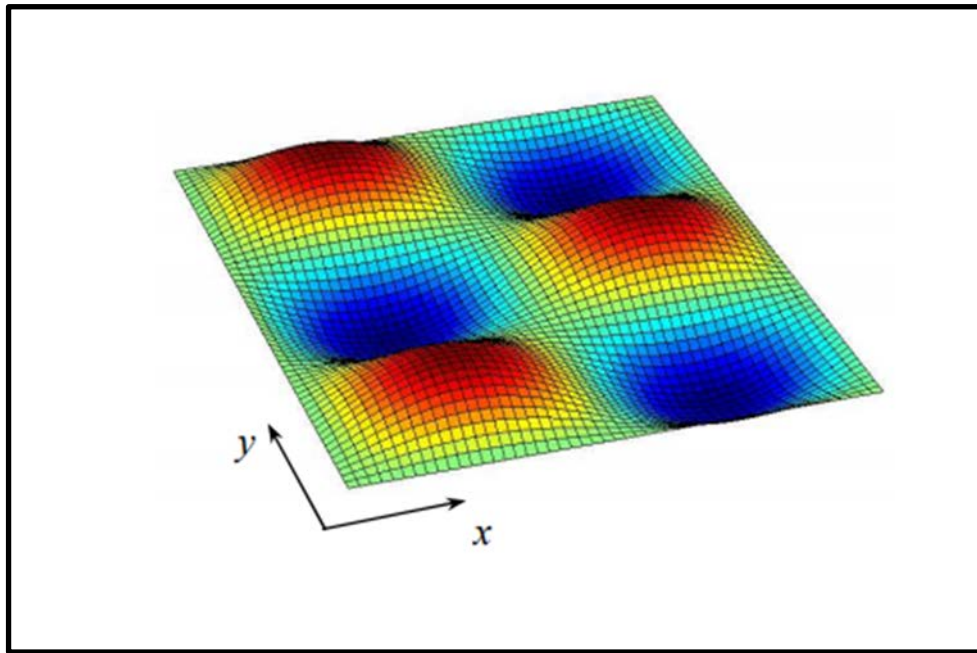


Figure 3.5 Déformée pour le mode (2,3) de la plaque simplement supportée

Cette approche peut être utilisée pour n'importe quelles conditions aux limites associées à deux bords opposés simplement supportés. Dans les autres cas des solutions approchées utilisant des fonctions de poutre peuvent fournir des solutions dont la précision est très dépendantes des conditions aux limites. Dans tous les cas où les solutions analytiques exactes ne sont pas accessibles, c'est la méthode de Rayleigh-Ritz qui est préférée car sa précision est contrôlable.

Toutefois, les plaques circulaires permettent aussi des solutions analytiques exactes en variables séparées de la forme.

$$R(r)\Theta(\theta) = [a_{mn}J_m(\beta_{mn}r) + b_{mn}I_m(\beta_{mn}r)]\sin m\theta + [c_{mn}J_m(\beta_{mn}r) + d_{mn}I_m(\beta_{mn}r)]\cos m\theta$$

Où $I_m(x)$ sont les fonctions de Bessel modifiées correspondant en fait à des fonctions de Bessel dont l'argument est imaginaire. Ces fonctions croissent en s'éloignant du centre pour pouvoir satisfaire les différentes conditions aux limites. Les coefficients arbitraires a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} , d_{mn} et l'argument β_{mn} sont précisés en fonction des conditions aux limites.

3.2.4. Introduction à la méthode de Rayleigh-Ritz

Cette méthode approchée qui permet d'obtenir des solutions pour des conditions aux limites quelconques sera examinée en détail en 3^{ème} année. Comme la méthode de Rayleigh-Ritz est très souvent employée, on en donne ici le principe.

Le principe de Rayleigh valable pour les systèmes conservatifs (énergie potentielle

maximale = énergie cinétique maximale) peut être employée pour trouver la première fréquence propre de la plaque. Par exemple, si on se donne pour la déformée modale approchée du premier mode la déformée statique pour les conditions aux limites considérées, il est possible de calculer les quantités suivantes à partir des valeurs quadratiques de la déformée :

- l'énergie potentielle maximale U_{max} (énergie de déformation).
- la partie \tilde{T}_{max} de l'énergie cinétique maximale T_{max} telle que $T_{max} = \omega^2 \tilde{T}_{max}$

La pulsation propre approchée du premier mode s'obtient par

$$\omega_R^2 = \frac{U_{max}}{T_{max}} \tag{3.19}$$

Ritz en 1909 a étendu cette méthode pour calculer les r premiers modes d'une structure. Les déformées modales sont représentées à partir d'une fonction ϕ comportant r coefficients arbitraires C_1, C_2, \dots, C_r , qu'il convient de calculer pour chaque mode

$$\phi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_r \varphi_r.$$

Les fonctions spatiales φ_i doivent satisfaire les conditions aux limites du problème.

Les énergies potentielle et cinétique se calculent à partir de la valeur quadratique de f et peuvent s'écrire formellement sous la forme.

$$U_{max} = \sum_i \sum_j k_{ij} C_i C_j \quad \text{et} \quad \tilde{T}_{max} = \sum_i \sum_j m_{ij} C_i C_j. \tag{3.20}$$

La différence entre énergie potentielle et énergie cinétique est minimisée par rapport aux coefficients C_i matricielle. et on obtient alors r équations homogènes qui peuvent s'écrire sous forme matricielle.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial C_1} (U_{max} - \omega^2 \tilde{T}_{max}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C_2} (U_{max} - \omega^2 \tilde{T}_{max}) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial C_r} (U_{max} - \omega^2 \tilde{T}_{max}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{A} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_r \end{bmatrix} = 0$$

En annulant le déterminant de A , r valeurs propres $\lambda = \omega_R^2$ sont obtenues. Les pulsations propres ω_{Rn} approximent la pulsation du mode n .

$$\omega_{Rn} = \omega_n + \varepsilon$$

ε tend vers 0 quand le nombre r de coefficients C_i s'accroît par rapport à l'ordre n du mode, ce qui revient à dire que les dernières valeurs de ω_{Rn} ne sont généralement pas utilisables. Pour chaque mode n , ω^2 est remplacé par ω_{Rn}^2 dans l'équation matricielle $AC = \mathbf{0}$, ce qui permet d'exprimer $r - 1$ coefficients et d'écrire la déformée modale correspondante sous la forme

$$\phi_n = C_q (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_r \varphi_r), \quad (\alpha_q = 1).$$

Note historique

En 1787 à Leipzig, Chladni met en évidence expérimentalement la formation de lignes nodales sur une plaque libre avec du sable. Wheatstone (1833) et Rayleigh (1873) utilisent les modes de poutre libre pour essayer d'expliquer les figures de Chladni. Ritz (1909) utilise sur ce problème (la plaque libre) la méthode qui porte son nom et Sezawa donne en 1931 les premiers résultats pour une plaque encastree. Iguchi (1938) développe une méthode pour obtenir certains résultats analytiques. Les premières synthèses complètes sur les méthodes utilisables pour calculer les fréquences naturelles et les déformées modales de plaques sont dues à Warburton (1954) et Leissa (1969).

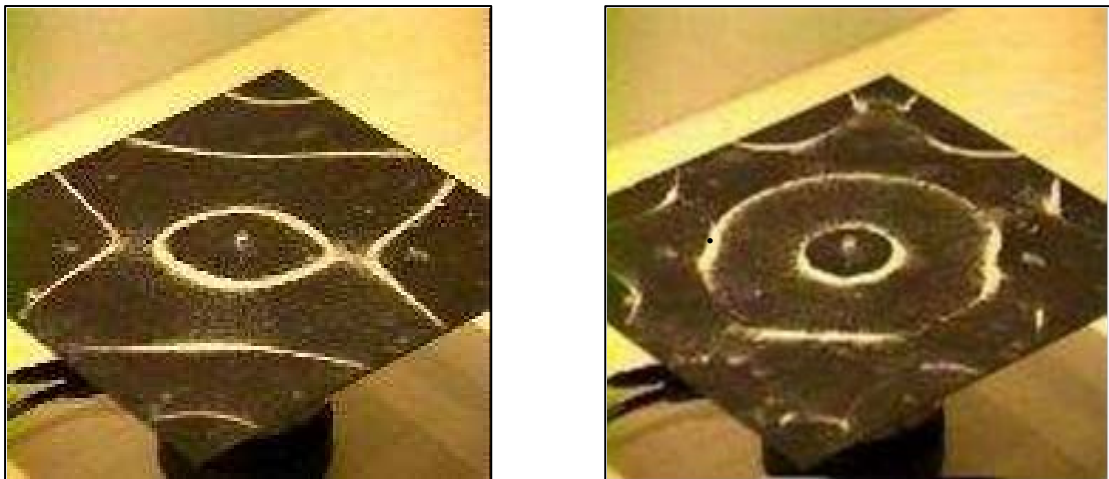


Figure 3.6 Figures de Chladni d'une plaque libre

3.3. Modelés d'amortissement

Dans les modèles de cordes, barres, poutres, membranes et plaques étudiées précédemment, l'amortissement n'est pas pris en compte pour simplifier la mise en équation du problème. En conséquence, les solutions pour les réponses libres obtenues ne présentent pas de décroissance de l'amplitude des mouvements avec le temps. Dans tous les cas considérés, la fonction $T_n(t)$ avait pour équation différentielle

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

3.3.1 Facteur d'amortissement modal

La méthode la plus simple consiste à inclure un terme dissipatif correspondant à un modèle d'amortissement visqueux

$$\ddot{T}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0 \quad (3.22)$$

Où ζ_n est le facteur d'amortissement modal ($\zeta_n \ll 1$). La solution correspond à celle d'un système à un degré de liberté.

$$T_n(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t} \left[a_n \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} t) + b_n \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} t) \right] \quad (3.23)$$

ou encore la forme équivalente

$$T_n(t) = A_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} t + \varphi_n) \quad (3.24)$$

Où les constants (a_n, b_n) et (A_n, φ_n) sont déterminées à partir des conditions initiales

3.3.2 Coefficient d'amortissement dans l'équation d'onde

D'autres modèles sont construits en insérant directement un coefficient d'amortissement dans l'équation différentielle

➤ Modélisation de l'amortissement externe représentant la dissipation due par exemple à la présence d'un fluide (air) dans le cas d'une membrane:

Equation non-dissipative: $\tau \nabla^2 w - M_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.25)$

Equation dissipative: $\tau \nabla^2 w - c \frac{\partial w}{\partial t} - M_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.26)$

c : coefficient d'amortissement.

- Modélisation de l'amortissement interne en appliquant un coefficient proportionnel à la vitesse de fluctuation des contraintes dans une poutre (modèle d'amortissement de Kelvin-Voigt).

$$\text{équation non-dissipative : } EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.27)$$

$$\text{équation dissipative : } EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.28)$$

Remarque : Une forme équivalente à ce dernier modèle consiste à considérer le module de Young complexe $\underline{E} = E(1 + j\eta)$. En considérant une variable complexe pour le déplacement tel que $w = W e^{j\omega t}$, l'équation précédente devient.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + j\omega\alpha I \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - \omega^2 \rho A w = 0 \quad (3.29)$$

danc $\omega\alpha \equiv \eta E$. L'utilisation du facteur de perte η pour représenter le rôle de l'amortissement structural dans la réponse forcée d'une structure mécanique est décrit dans la section 7.

3.3.3 Dissipation aux limites

L'amortissement peut également être reporté dans la définition des conditions aux limites. En effet, les modes de fixation des structures vont souvent introduire une dissipation. Un exemple en est donné pour des conditions aux limites dans le cas des ondes longitudinales dans une barre

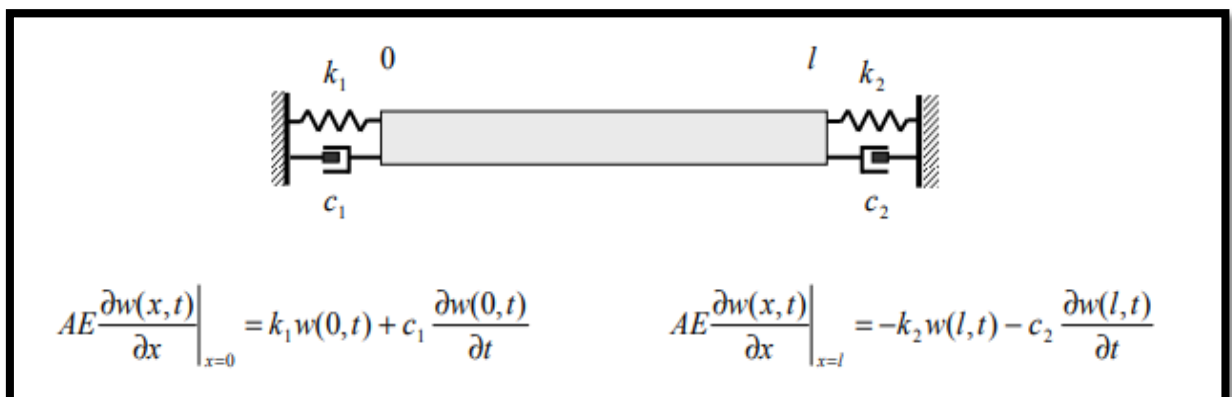


Figure 3.7 Conditions aux limites dissipatives pour les ondes longitudinales dans une barre.

Réponse Forcée :

Les solutions étudiées jusqu'à maintenant correspondent aux réponses libres de systèmes continus. Elles dépendent des fréquences naturelles, des déformées modales et de conditions initiales. On recherche maintenant la réponse en régime stationnaire à une excitation harmonique forcée représentée par une force.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Où ω est la pulsation imposée par l'excitation.

Remarque: La notation complexe est souvent employée $F = F_0 e^{j\omega t}$ (ou plus simplement

$F = F_0$, le terme $e^{j\omega t}$ étant souvent omis) où F est une force complexe. Le signal

physique réel se retrouve par $F(t) = \text{Re}\{F\} = \text{Re}\{F e^{j\omega t}\}$

3.4 Réponse forcée par décomposition modale

La méthode de décomposition modale est basée sur l'orthogonalité des déformées modales

$\phi_n(\mathbf{r})$. Les ϕ_n constituent une base orthogonale sur laquelle sont décomposés les

paramètres du système (ces équations sont démontrées en Annexe dans le cas des poutres).

$$M_n = \int_{\Omega} m(\mathbf{r}) \phi_n^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{masse (modale) généralisée avec } m(\mathbf{r}) \text{ la densité}$$

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad \text{raideur généralisée}$$

$$C_n = \int_{\Omega} c(\mathbf{r}) \phi_n^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{amortissement généralisé}$$

$$F_n = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}, t) \phi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{force généralisée avec } f(\mathbf{r}, t) \text{ la densité de force}$$

Ces paramètres modaux permettent d'écrire une équation modale pour chaque mode qui est découplée des autres

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = F_n(t) \quad (3.30)$$

Il s'agit là d'un système à 1 DDL dont $q_n(t)$ est la solution du déplacement en coordonnées

pour le mode n . Elle s'exprime selon la nature du signal de la force $F(t)$.

3.4.1 Force quelconque

$$q_n(t) = A_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega_{a_n} t + \theta_n) + F_n(t) * h_n(t) \quad (3.31)$$

$A_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega t + \theta_n)$: réponse libre du système dont les constantes A_n et ϕ_n dépendent des conditions initiales à $t=0$.

$F_n(t) * h_n(t)$: réponse forcée représentée par le produit de convolution de la force par la

On a vu⁶ que la réponse impulsionnelle d'un système à 1DDL conduisait à

$$F_n(t) * h_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) h_n(t-\tau) d\tau = \frac{e^{-\zeta_n \omega_n t}}{M_n \omega_{a_n}} \int_0^t F_n(\tau) e^{-\zeta_n \omega_n \tau} \sin \omega_{a_n} (t-\tau) d\tau \quad (3.32)$$

avec $\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n \omega_n}$ et $\omega_{a_n} = \omega_n \sqrt{1-\zeta_n^2}$. Ce terme représente la réponse en régime établi, quand $t \gg 0$.

3.4.2 Force harmonique

Une force complexe $F_n e^{j\omega t}$ produira une réponse de la forme $q_n = B_n e^{j\omega t}$ où B_n est complexe. L'équation du système devient

$$-\omega^2 M_n B_n + j\omega C_n B_n + K_n B_n = F_n$$

$$\text{ou encore : } [-\omega^2 + j2\omega\omega_n\zeta_n + \omega_n^2] M_n B_n = F_n \quad \Rightarrow \quad \frac{B_n}{H_n} = F_n$$

en posant :

$$H_n = \frac{1}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\omega\omega_n\zeta_n]}$$

En représentant H_n sous la forme $|H_n| e^{j\varphi_n}$

$$|H_n| = \frac{1}{M_n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_n\zeta_n)^2}}, \quad \tan\varphi_n = \frac{2\omega\omega_n\zeta_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

La réponse à la force $F_n(t) = F_n \cos \omega t$ est $q_n(t) = \text{Re} \{B_n e^{j\omega t}\}$, soit

$$q_n(t) = F_n |H_n| \cos(\omega t + \varphi_n) = \frac{F_n}{H_n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_n\zeta_n)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\omega\omega_n\zeta_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

$q_n(t)$ est la solution du déplacement en coordonnées généralisées pour le mode n . La force réponse à la force $F(t)$ est fournie par la synthèse modale

$$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(\mathbf{r}) \quad (3.32)$$

3.5 Exemple pour une poutre en flexion

La première étape consiste à identifier les paramètres modaux généralisés. La démonstration qui conduit à la relation donnée précédemment est reportée en Annexe. La déformée $\phi_n(x)$ et la pulsation naturelle pour le mode n satisfont l'équation homogène des poutres

$$EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A \phi_n(x) = 0 \quad (3.33)$$

et la déformée vérifie la relation d'orthogonalité $\int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_p(x) dx = 0$ pour $p \neq n$.

En multipliant par la déformée $\phi_p(x)$ et en intégrant, on aboutit à l'équation

$$\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_p(x) dx = \omega_n^2 \int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_p(x) dx \quad (3.34)$$

La prise en compte de la relation d'orthogonalité dans le second membre conduit à une seconde relation d'orthogonalité dont la symétrie est vérifiée dans l'annexe A. Quand $p = n$, les deux intégrales de l'équation précédente peuvent s'interpréter aisément comme

la raideur généralisée et la masse généralisée

$$M_n = \int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx \quad \text{et} \quad M_n = \int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_n(x) dx$$

pour que la relation précédente s'écrive sous la forme

$$K_n = \omega_n^2 M_n$$

La deuxième étape considère une excitation sous la forme d'une densité linéique de force $f(x, t)$, la réponse forcée de la solution de l'équation inhomogène

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3.35)$$

On cherche une solution sous la forme

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \phi_m(x), \text{ donc}$$

$$EI \sum_m w_m(t) \frac{d^4 \phi_m(x)}{dx^4} + \rho A \sum_m \ddot{w}_m(t) \phi_m(x) f(x, t) \quad (3.36)$$

en multipliant par $\phi_n(x)$ et en intégrant

$$\int_0^l EI \sum_m w_m(t) \frac{d^4 \phi_m(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx + \int_0^l \rho A \sum_m \ddot{w}_m(t) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \int_0^l f(x, t) \phi_n(x) dx$$

$$\sum_m w_m(t) \underbrace{\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_m(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx}_{0 \text{ ou } K_n} + \sum_m \ddot{w}_m(t) \underbrace{\int_0^l \rho A \phi_m(x) \phi_n(x) dx}_{0 \text{ ou } M_n} = \underbrace{\int_0^l f(x, t) \phi_n(x) dx}_{F_n(t)}$$

Quand $m = n$ $M_n \ddot{w}_n(t) + K_n w_n(t) = F_n(t)$

C'est l'équation d'un système à 1DDL non dissipatif. Un facteur d'amortissement modal ζ_n

Est introduit à ce niveau. Dans le cas d'une excitation harmonique de la force

$f(x) = f(x)e^{j\omega t}$ le déplacement de la poutre s'écrira

$$w(x, t) = \sum_n w_n(t) \phi_n(x) = \sum_n w_n \phi_n(x) e^{i\omega t}$$

Soit $M_n[-\omega^2 + j2\omega\omega_n\zeta_n + \omega_n^2]w_n = F_n$

avec la force modale généralisée

$$F_n = \int_0^l f(x, t) \phi_n(x) dx$$

La solution est

$$w(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n e^{i\omega t}}{M_n[(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\omega\omega_n\zeta_n]} \phi_n(x) \quad (3.37)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n e^{j\varphi_n} e^{i\omega t}}{M_n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_n\zeta_n)^2}} \phi_n(x) \quad \text{avec} \quad \tan \varphi_n = \frac{-2\omega\omega_n\zeta_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

La figure ci-contre représente la fonction de transfert $H_n(\omega)$ si $w(x, \omega)$ est écrit sous la forme

$$w(x, \omega) = \sum_n H_n F_n \phi_n(x) e^{i\omega t}$$

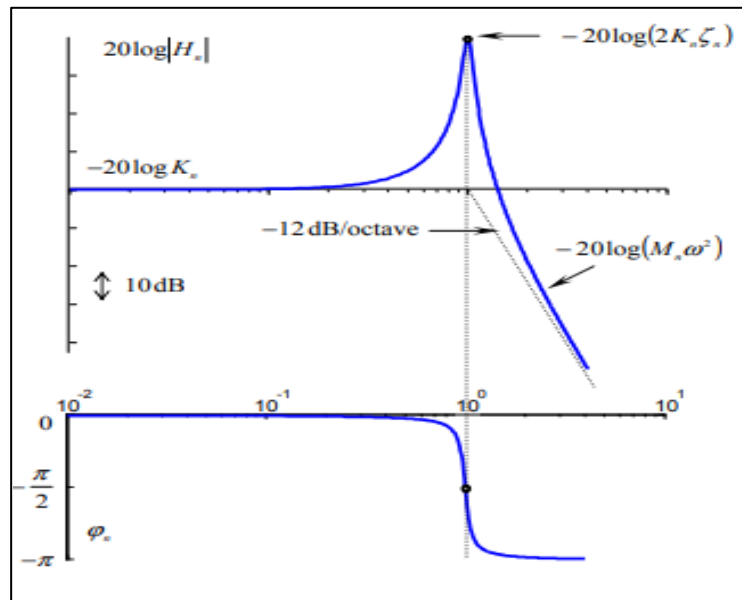


Figure 3.8 Réponse fréquentielle en amplitude et phase pour un mode

Exemple : Cas d'une force ponctuelle sur une poutre simplement supportée

	<p>La poutre est excitée par une distribution de force (force ponctuelle)</p> $f(x, t) = F_0 \delta(x - x_0) e^{i\omega t}$
--	---

Figure 3.9 Excitation d'une poutre par une force ponctuelle

La force modale généralisée s'écrit $F_n = \int F_0 \delta(x - x_0) \phi_n(x) dx = F_0 \phi_n(x_0)$

Remarque : si la force est appliquée sur le nœud du mode ρ , $\phi_\rho(x_0) = 0$ et la force généralisée pour le mode ρ est nulle : $F_\rho = 0$. Pour une poutre simplement supportée

$$F_n = F_0 \sin \frac{n\pi x_0}{l}$$

Si la force est appliquée au centre $x_0 = l/2$, $F_n = F_0 \sin n\pi/2$ et seuls les modes impairs seront excités.

3.6 Cas des plaques rectangulaires

Cas général pour les plaques homogènes avec excitation harmonique

Les expressions sont similaires à celles des poutres.

$$w(x, y, \omega) = \sum_m \sum_n \frac{F_{mn} e^{i\omega t}}{M_{mn} [\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_{mn}\zeta_{mn}]} \phi_{mn}(x, y) \quad (3.38)$$

avec la masse généralisée

$$M_{mn} = \rho h \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy$$

la force généralisée

$$F_{mn} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, t) \phi_{mn}(x, y) dx dy$$

Cas particulier d'une plaque simplement supportée

la déformée modale $\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}$

la masse généralisée $M_{mn} = \rho h \int_0^{L_x} \sin^2 \frac{m\pi x}{L_x} dx \int_0^{L_y} \sin^2 \frac{n\pi y}{L_y} dy = \frac{\rho h L_x L_y}{4}$

Cas particulier d'une excitation ponctuelle (plaque simplement supportée)

la force $f(x, t) = \int F_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$

la force généralisée

$$F_{mn} = F_0 \int_0^{L_x} \delta(x - x_0) \sin \frac{m\pi x}{L_x} dx \int_0^{L_y} \delta(y - y_0) \sin \frac{n\pi y}{L_y} dy = F_0 \sin \frac{m\pi x_0}{L_x} \sin \frac{n\pi y_0}{L_y}$$

3.7 Synthèse modale

3.7.1 Contribution de chaque mode

Quand une structure est excitée à la pulsation ω , tous les modes sont plus ou moins excités.

Le champ vibratoire est créé par la superposition de tous les modes. La contribution de chacun dépend

- de la force modale généralisée du mode (donc de la position de la force d'excitation),
- de la proximité de la pulsation naturelle du mode de celle de l'excitation.

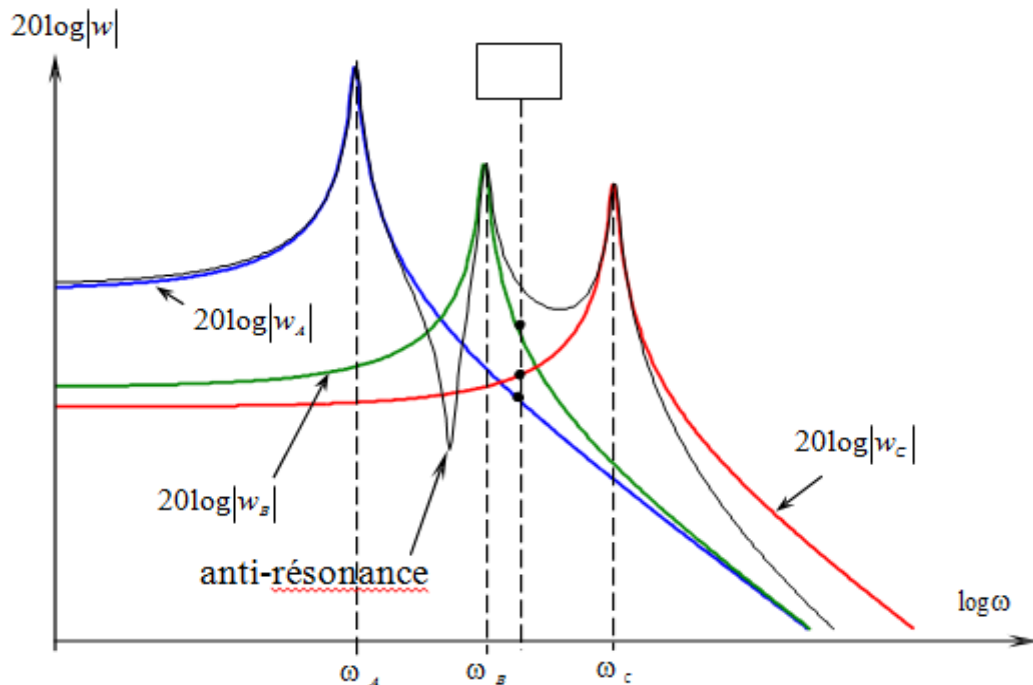


Figure 3.10 Réponse totale due à la contribution de 3 modes tel que $w = |w_A| + |w_B| - |w_C|$

Sur la figure ci-dessus :

- le mode A $w(\omega_A < \omega)$ en fonction de la masse modale généralisée $F_A/M_n \omega^2$
- le mode B $w(\omega_B \sim \omega)$ est contrôlé majoritairement par l'amortissement,
- le mode C $w(\omega_C > \omega)$ contribue en fonction de la raideur généralisée F_C/K_c

3.7.2 Cas particulier d'une plaque carrée

Les pulsations naturelles de la plaque carrée de côtés L sont données par

$$\omega_{mn} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (m^2 + n^2) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Il y aura plusieurs combinaisons (m,n) ayant la même valeur $m^2 + n^2$, comme le montre la table ci-contre. Plusieurs modes différents auront donc la même pulsation naturelle. Exemple : (1,7) ; (7,1) et (5,5)

		$m^2 + n^2$						
$n \backslash m$		1	2	3	4	5	6	7
1		2	5	10	17	26	37	50
2		5	8	13	20	29	40	53
3		10	13	18	25	34	45	58
4		17	20	25	32	41	52	65
5		26	29	34	41	50	61	74
6		37	40	45	52	61	72	85
7		50	53	58	65	74	85	98

Figure 3.11 : Fréquence propres normalisée pour une plaque carrée

Leur superposition va conduire à une forme apparente qui va dépendre de l'excitation et pourra tromper l'expérimentateur. Considérons les modes(1,2) et(2,1) avec une excitation à leur pulsation naturelle

$$\omega_{12} = \omega_{21} = 5 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

excitation en $x_0 = \frac{L}{2}, y_0 = \frac{L}{4}$, sur la ligne nodale du mode (2,1). La déformée du mode (1,2) apparaît

$$\Phi_{12} = A_{12} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L}$$

excitation en $x_0 = \frac{L}{4}, y_0 = \frac{L}{2}$, sur la ligne nodale du mode (1,2). La déformée du mode (2,1) apparaît

$$\Phi_{21} = A_{21} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L}$$

excitation sur la diagonale en $x_0 = \frac{L}{4}, y_0 = \frac{L}{4}$,
Les deux modes sont également excités car les forces modales généralisées sont identiques. Ainsi,

$$A_{12} = A_{21} \text{ et}$$

$$\Phi_{12,21} = A_{12} \left(\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} + \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \right)$$

Cette déformée présente une ligne nodale pour

$$y = L - x \text{ où } \Phi_{12,21} = 0$$

Cependant, si la position du point d'excitation est changée, $A_{21} = \alpha A_{12}$ et une forme modale différente apparaît, comme la figure suivante permet de le constater pour les modes (1,2) et (2,1), (1,4) et (4,1), (1,5) et (5,1). Ces formes ne sont pas orthogonales car si

$$\Phi_A = \Phi_{12} + \alpha_A \Phi_{21} \quad \text{et} \quad \Phi_B = \Phi_{12} + \alpha_B \Phi_{21}$$

alors

$$\begin{aligned} \iint_S \Phi_A \Phi_B \, dS &= \iint_S (\phi_{12}^2 + \alpha_A \phi_{21} \phi_{12} + \alpha_B \phi_{12} \phi_{21} + \alpha_A \alpha_B \phi_{21}^2) \, dS \\ &= \iint_S (\phi_{12}^2 + \alpha_A \alpha_B \phi_{21}^2) \, dS \neq 0 \end{aligned}$$

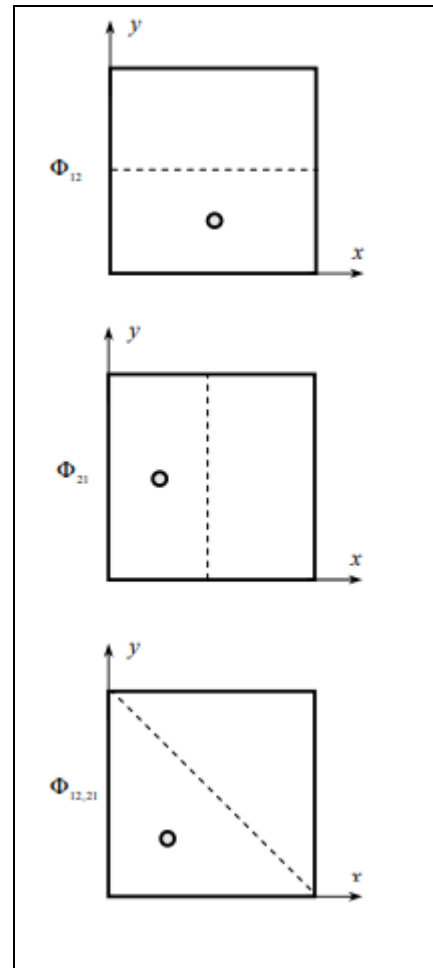


Figure 3.12 Déformées apparentes (non-modale) pour une plaque carrée.

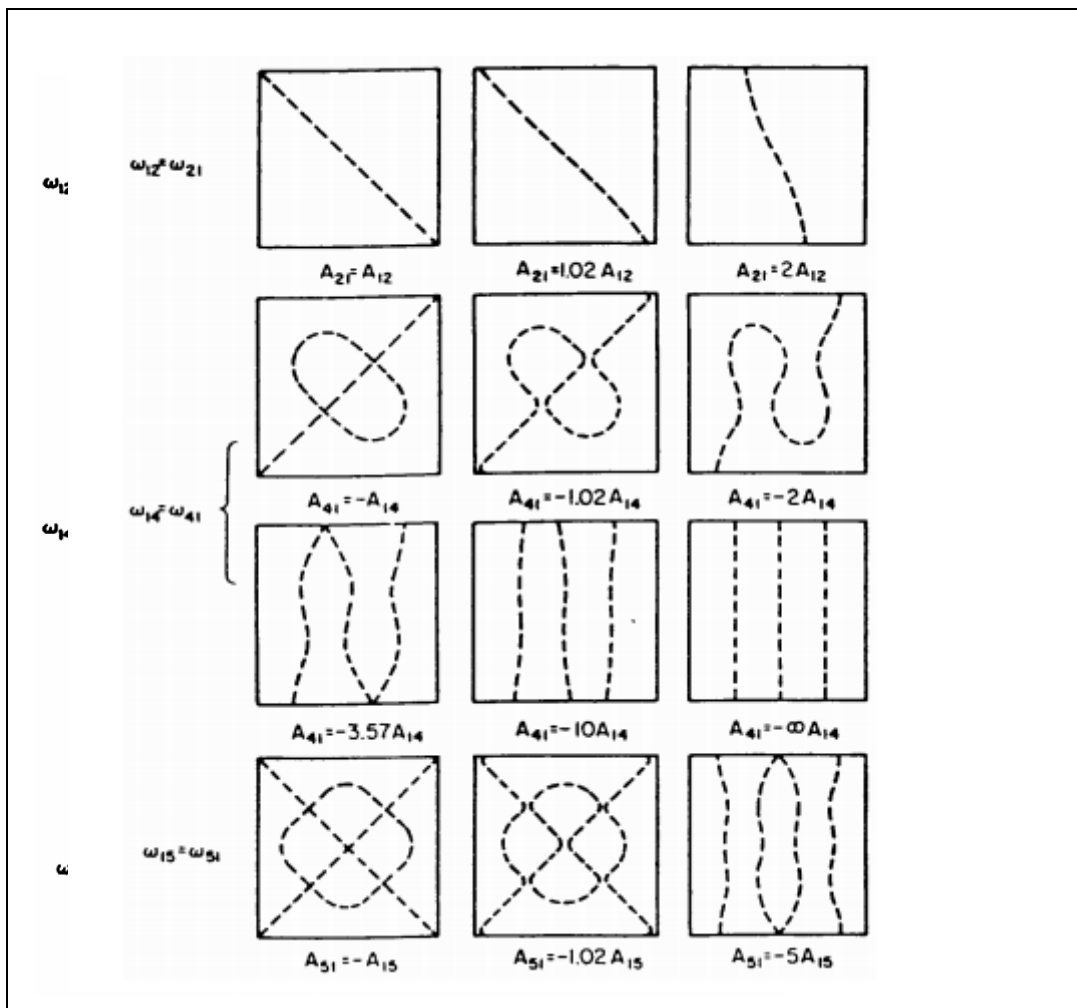


Figure 3.13 Lignes nodales des déformée apparente dues aux combinaisons de modes pour une plaque carrée

3.7.3 Grandeurs quadratiques moyennes

Ce sont souvent ces quantités qui sont mesurées sur les structures mécaniques vibrantes.

Soit le déplacement $w(x, y, t)$ et la vitesse $v(x, y, t)$

$$w(x, y, t) = e^{i\omega t} \sum_m \sum_n F_{mn} H_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y)$$

$$v(x, y, t) = j\omega w(x, y, t)$$

La vitesse quadratique moyenne se définit par

$$\begin{aligned} \langle v^2(x, y, t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v^2(x, y, t) dt \\ &= \frac{1}{2} |v(x, y, t)|^2 \\ &= \frac{\omega^2}{2} \left| \sum_m \sum_n F_{mn} H_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y) \right|^2 \end{aligned}$$

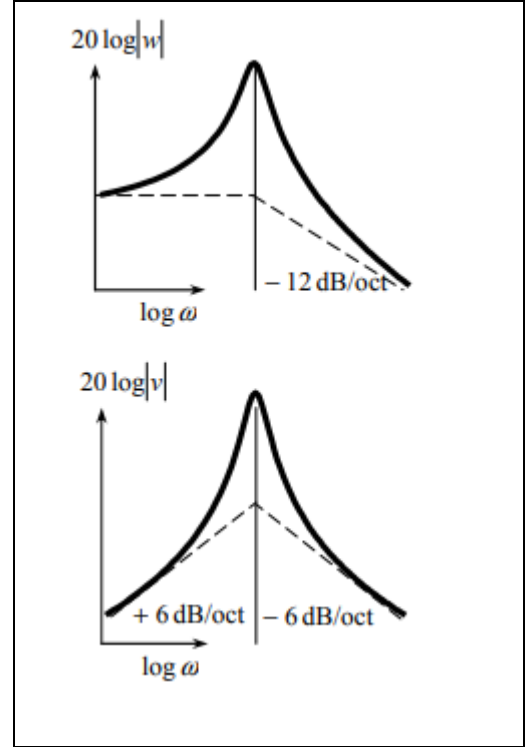


Figure 3.14 Réponse d'un mode en déplacement et en vitesse

En considérant que : $|\sum_i Z_i|^2 = \sum_i \sum_j Z_i Z_j^*$

$$\langle v^2(x, y, t) \rangle = \frac{\omega^2}{2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q F_{mn} F_{pq}^* H_{mn}(\omega) H_{pq}^*(\omega) \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) \quad (3.39)$$

L'intégration de $\langle v^2(x, y, t) \rangle$ sur la surface d'une plaque $L_x \times L_y$ conduit à

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \langle v^2(x, y, t) \rangle dx dy = \frac{\omega^2}{2} \sum_m \sum_n |F_{mn}|^2 |H_{mn}(\omega)|^2 \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy \quad (3.40)$$

Avec

$$|H_{mn}(\omega)|^2 = \frac{1}{M_{mn}^2 [(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_{mn}\zeta_{mn})^2]}$$

Pour une plaque homogène simplement supportée

$$M_{mn} = \rho h \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy = \frac{\rho h L_x L_y}{4}$$

d'où

$$\iint \langle v^2(x, y, t) \rangle dx dy = \frac{4\omega^2}{2(\rho h)^2 L_x L_y} \sum_m \sum_n \frac{|F_{mn}|^2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_{mn}\zeta_{mn})^2} \quad (3.41)$$

La vitesse quadratique moyenne sur la surface de la plaque peut s'exprimer par une simple somme de la valeur quadratique des composantes de chaque mode.

3.7.4 Facteur de perte et amortissement structural

Pour les calculs dynamiques de structures mécaniques, le module de Young est souvent considéré sous la forme complexe

$$\underline{E} = E(1 + j\eta)$$

où η est le **facteur de perte** qui se définit par

$$\eta = \frac{\text{Energie dissipée par cycle}}{2\pi \text{Energie potentielle maximale}}$$

La raideur modale généralisée de la structure (poutre, plaque, etc.) qui est proportionnelle au module de Young, devient elle aussi complexe

$$\underline{K}_n = K_n (1 + j\eta)$$

Une excitation harmonique $F_n e^{j\omega t}$ produit une réponse $q_n(t) = B_n e^{j\omega t}$ et l'équation du système mécanique est

$$-\omega^2 + M_n B_n + B_n \underline{K}_n = F_n$$

D'où

$$q_n(t) = \frac{F_n e^{j\omega t}}{M_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (3.42)$$

avec $\omega_n^2 = \underline{K}_n / M_n$ la pulsation propre complexe $\omega_n^2 = \omega_n^2(1 + j\eta)$, soit

$$q_n(t) = \frac{F_n e^{j\omega t}}{M_n(\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta\omega_n^2)} \quad \text{A la resonance } \omega = \omega_n \text{ et } \eta = 2\zeta_n$$

CHAPITRE 4

**FORMULATION
NUMÉRIQUE ET
RÉSULTATS**

4.1 Exposition du problème

Ce chapitre est consacré à une analyse dynamique d'une plaque mince rectangulaire qui est l'objectif de notre sujet afin de comparer le champ de contraintes et champ de déplacements selon les conditions d'appui dans chacun des trois cas ci-dessus, et pour cela revenons sur l'équation de la dynamique sous forme matricielle :

$$M \ddot{w} + C \dot{w} + Kw = F \quad (4.1)$$

Qui peut être vue comme l'équation de la statique $Kw = F$ à laquelle on ajoute des forces extérieures d'inertie $-M \ddot{w}$ et des forces extérieures visqueuses $-C \dot{w}$. D'un point de vue pratique, on distingue trois types de problèmes :

- détermination d'une réponse libre : dans ce cas, la sollicitation est nulle $F = 0$.
- détermination d'une réponse périodique : dans ce cas, la sollicitation F est périodique.
- détermination d'une réponse transitoire : dans ce cas, la sollicitation F est quelconque.

Et pour une restriction, on va se limiter à l'étude du premier cas, cas des vibrations libres non amorties.

En l'absence de sollicitation et d'amortissement, l'équation de la dynamique devient :

$$M \ddot{w} + Kw = F \quad (4.2)$$

Dont la solution générale est harmonique et s'écrit :

$$w = \bar{w} e^{i\omega t} \quad (4.3)$$

En injectant la forme de la solution générale dans l'équation de la dynamique, on voit que la Pulsation ω est solution du problème de valeurs propres suivant :

$$Kw = \omega^2 M \bar{w} \quad (4.4)$$

ce qui conduit à :

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (4.5)$$

On obtient ainsi les n valeurs propres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, où n est la taille du système (i.e. les matrices M et K sont d'ordre $n \times n$). On trouve également les n vecteurs \bar{u}_i appelés modes propres du système et que l'on norme par rapport à la masse, i.e. tels que :

$$w_i^T M w_i = 1 \quad \forall i \in [1, n] \quad (4.6)$$

La détermination des valeurs propres ω_i se fait rarement en cherchant les zéros de l'équation du déterminant (4.5) en raison de la très grande taille du système dans le cas général, et des considérables différences d'ordre de grandeur entre les valeurs propres.

De toute façon, ce sont les premières fréquences qui déterminent le comportement du système.

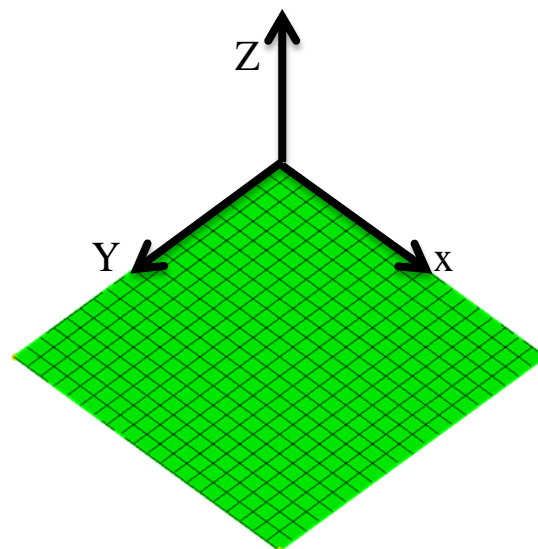
Et pour résoudre ce problème, on utilise l'un logiciel qui se base sur la méthode des éléments finis qui a été abordée précédemment dans le chapitre précédent.

4.2 Géométrie du problème

Pour réaliser notre analyse modale, on prend une plaque carrée mince

Ayant les caractéristiques suivantes :

Dimensions	Matériau	Maillage
1000 × 1000 × 10	$E = 2.110^5$ MPa	QUAD4 de taille

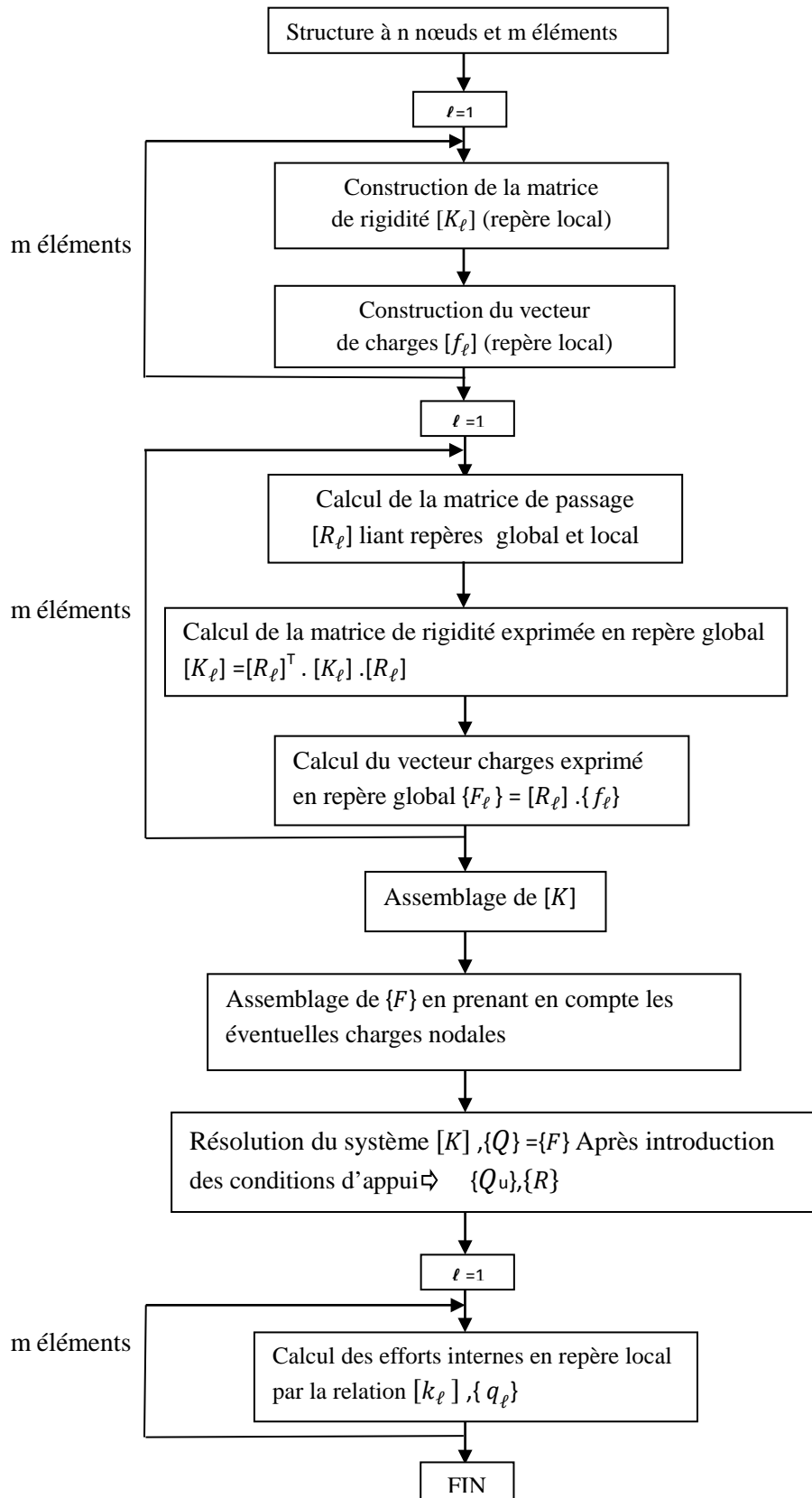


4.3 Détermination du champ de déplacements et du champ de contraintes en fonction des conditions aux rives

A l'aide d'un logiciel de simulation qui se base sur la méthode des éléments finis et selon

l'organigramme ci-dessous nous allons déterminer les champs de déplacements et de contraintes uniquement sur la peau supérieure.

Organigramme général de résolution



4.4 Différents cas d'appui de la plaque

4.4.1 Plaque encastrée sur un bord

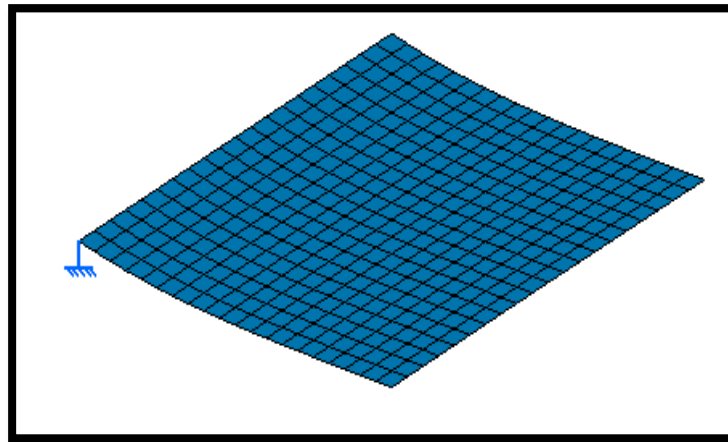
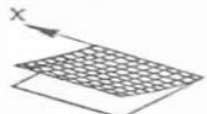
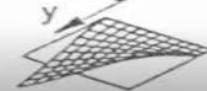
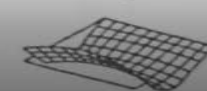
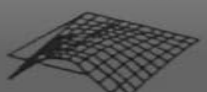


Figure4.1 :Plaque encastrée sur un bord

- **Type d'analyse** : Analyse modale (Problème tridimensionnel)
- **Type de calcul** : élémentaire
- **Référence (s)** : M.V. Barton, "Vibration of rectangular and skew cantilever plates", Journal of Applied , Mechanics, vol. 18, 1951, p.129-134
- **Paramètres calculés** : fréquences propres –flexion transverse –Plaque mince
- **Conditions aux limites** : Coté OA encastré

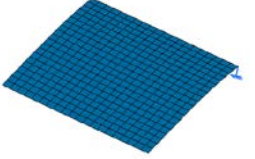
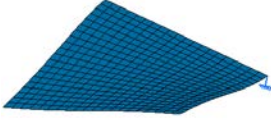

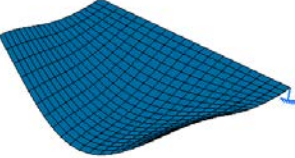
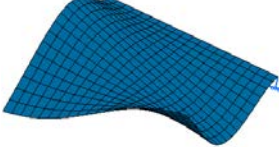
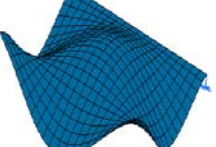


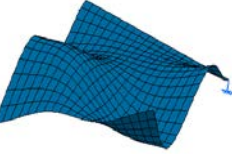
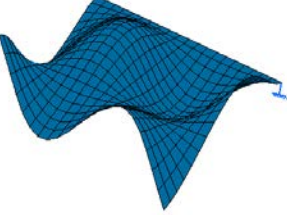
Pour tout point P tel que $y_p = 0$: $u = v = w = 0$ et $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

Valeurs de références

1. Plaque encastrée sur un côté		
Ordre du mode propre i	Fréquence (Hz)	Mode
1	8.7266	 1
2	21.3042	 2
3	53.5542	 3
4	68.2984	 4
5	77.7448	
6	136.0471	

Tablau4.1: valeurs de references

Résultats

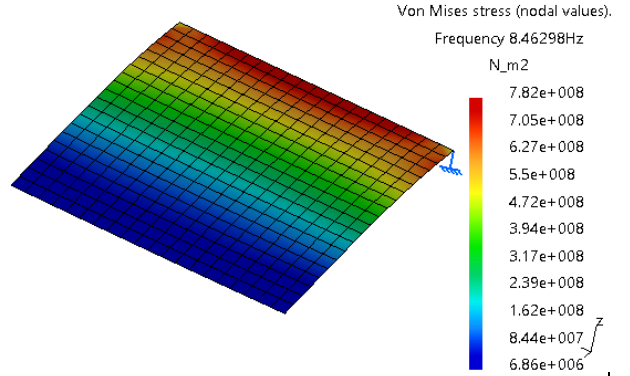
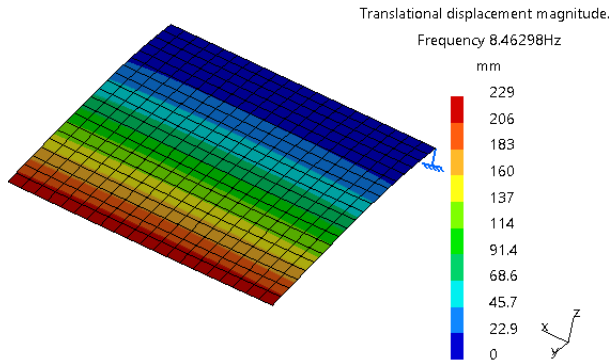
Number of modes	Frequency (Hz)			
1	8.46298			
2	20.6986			
3	52.0137			
4	66.3658			
5	75.4615			
6	131.988			
7	150.626			
8	157.432			
9	174.128			
10	227.136			
Les modes				
				

Tablau4.2 : Les déformées de la plaque encastrée sur un coté

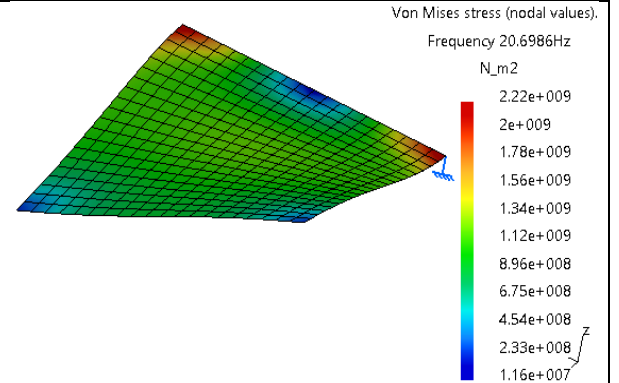
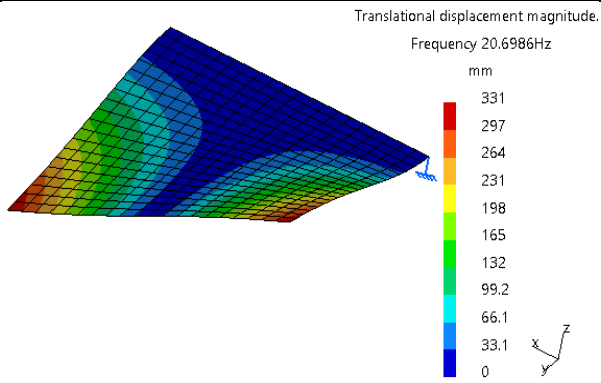
Le champ de déplacements et le champ de contraintes

Le champ de déplacement

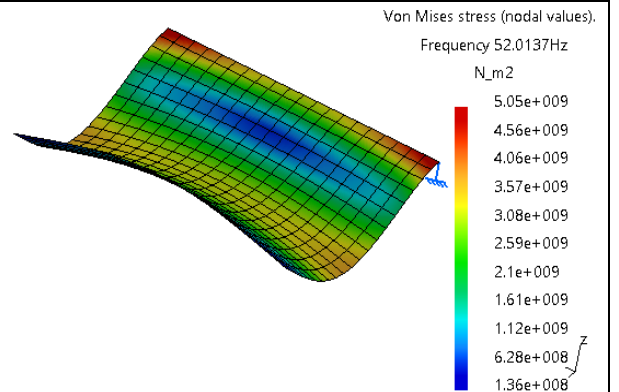
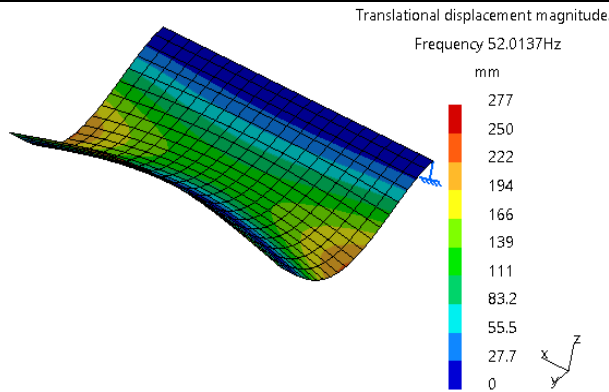
Le champ de contraintes



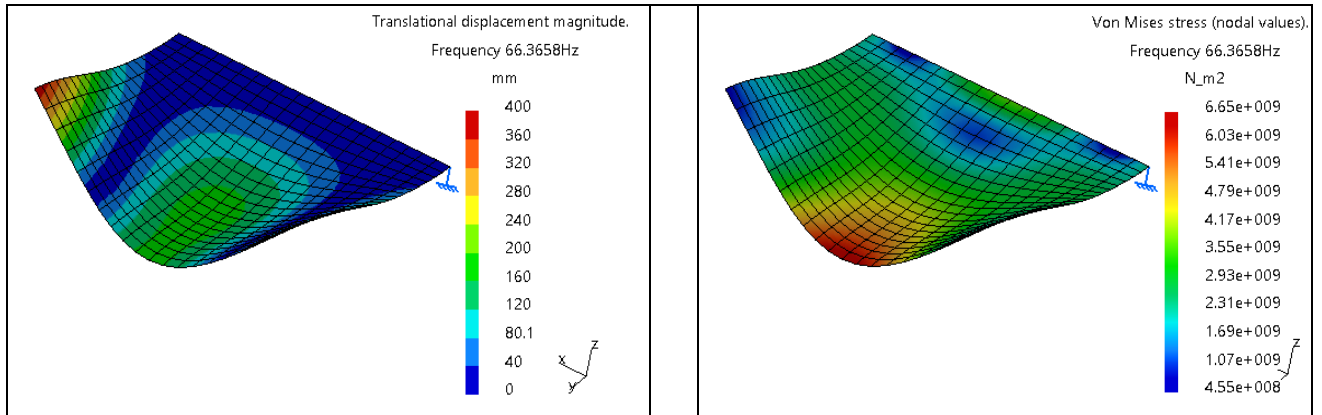
Mode 1 Fr=8.46298Hz



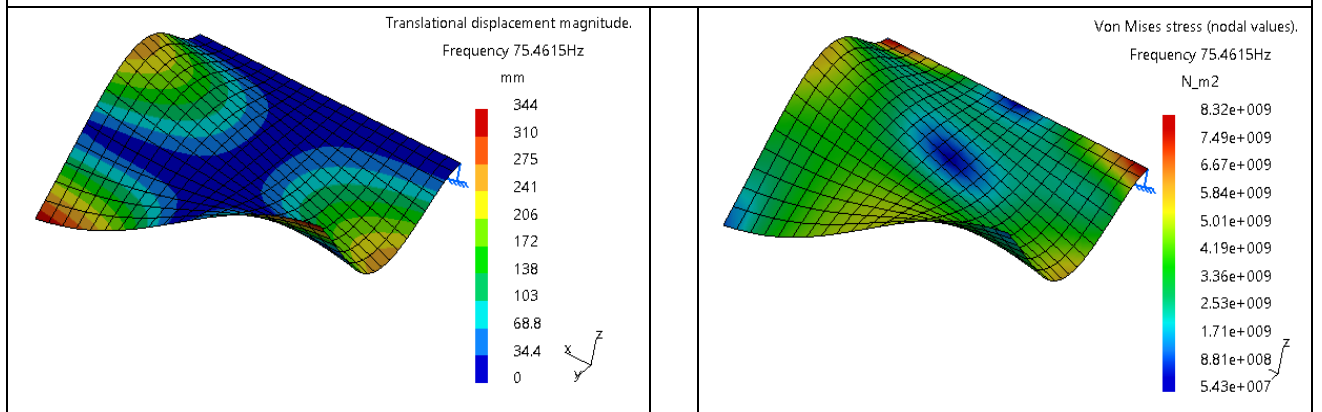
Mode 2 Fr=20.6986Hz



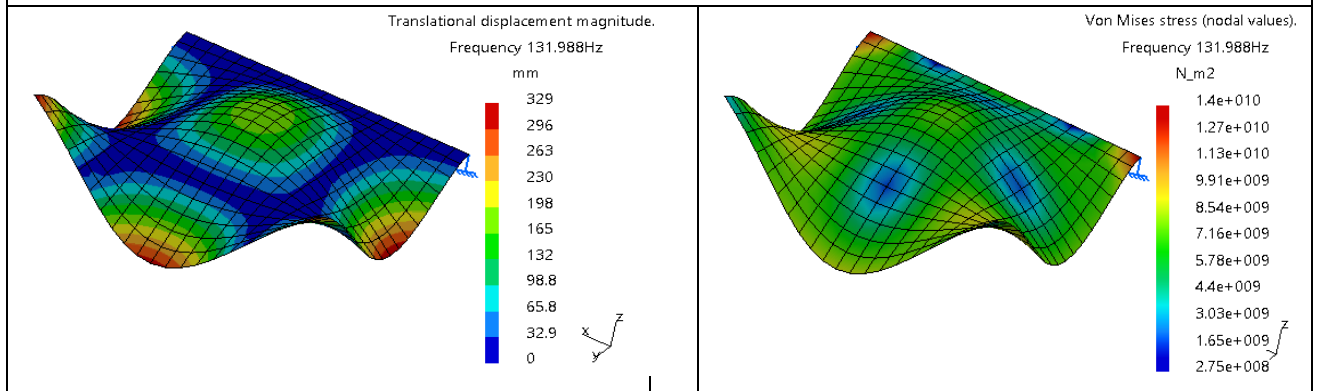
Mode 3 Fr=52.0137Hz



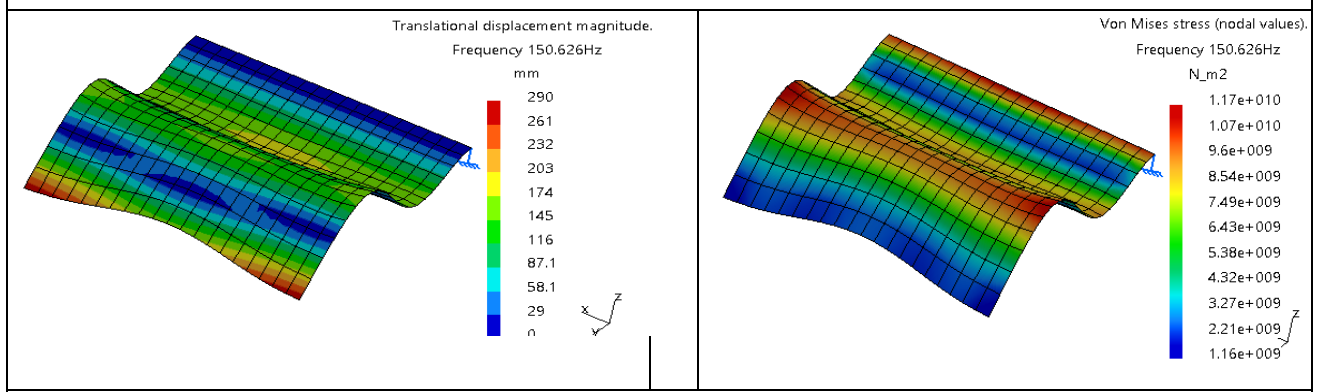
Mode 4 Fr=66.3658Hz



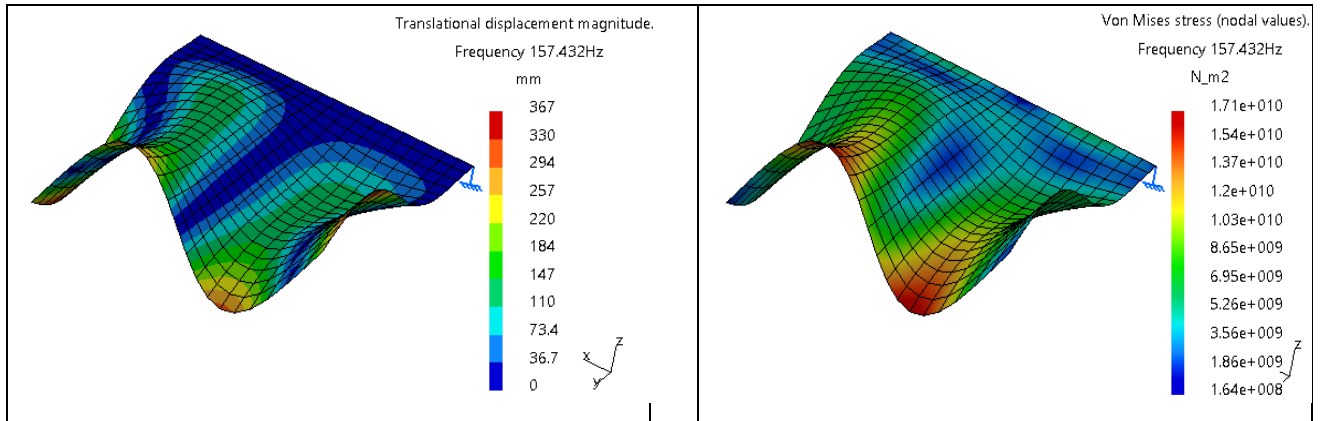
Mode 5 Fr=75.4615Hz



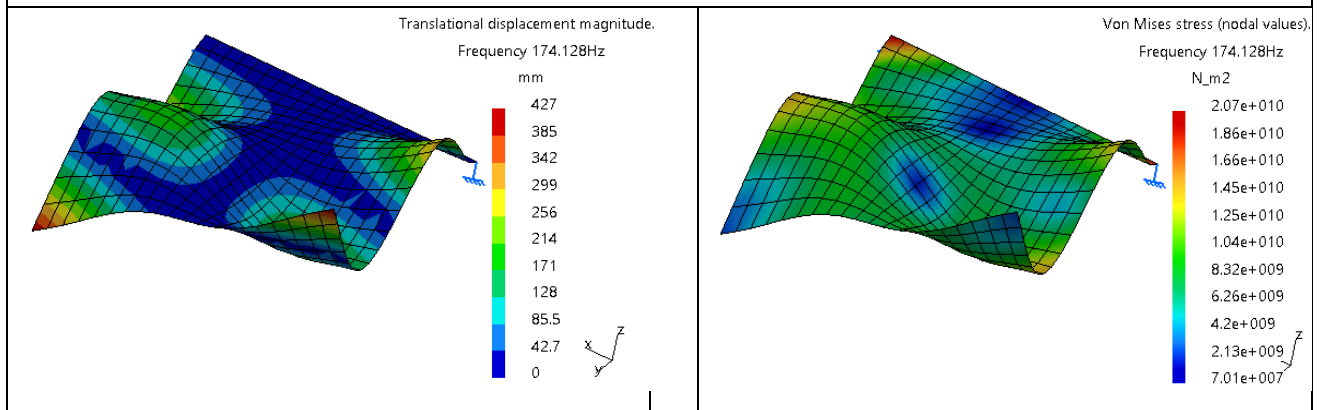
Mode 6 Fr=131.988Hz



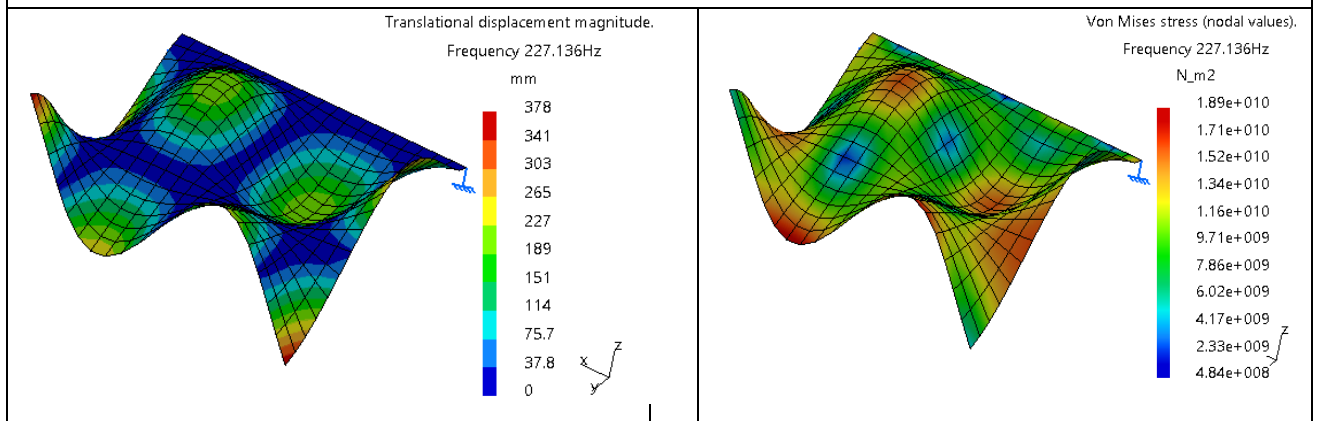
Mode 7 Fr=150.626Hz



Mode 8 Fr=157.432Hz



Mode 9 Fr=174.128Hz



Mode 10 Fr=227.136Hz

4.4.2 Plaque encastree sur deux cotes opposes (plaque bi-encastree)

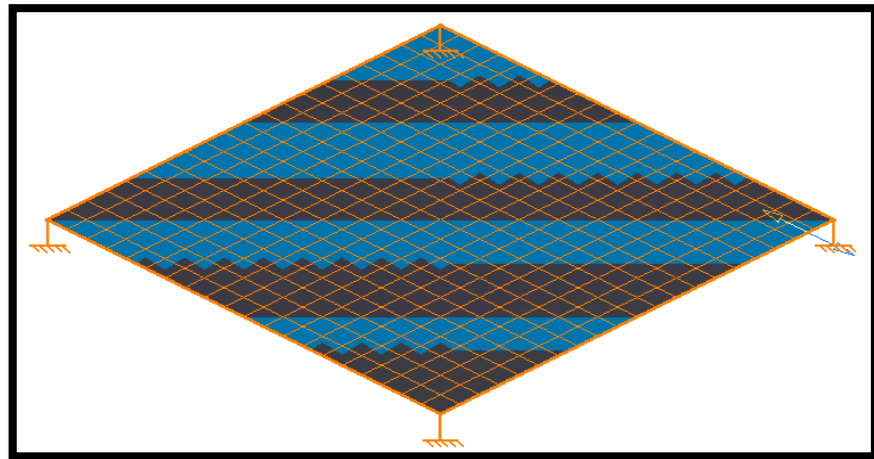


Figure 4.2 : Plaque encastree sur deux cotes opposes

Conditions aux limites : Cotes OA et CB encastres

Pour tout point P tel que $y_p = 0$ et $y_p = 1000$: $u = v = w = 0$ et $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

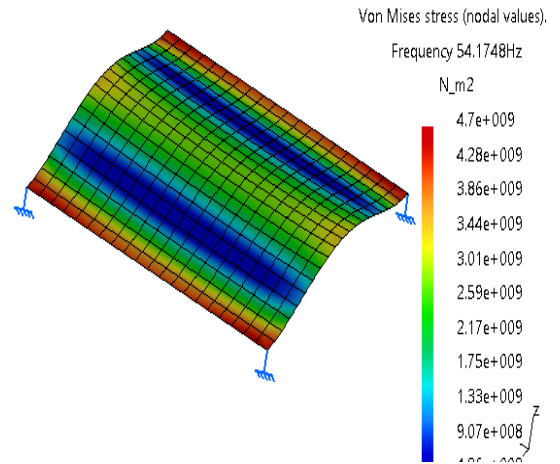
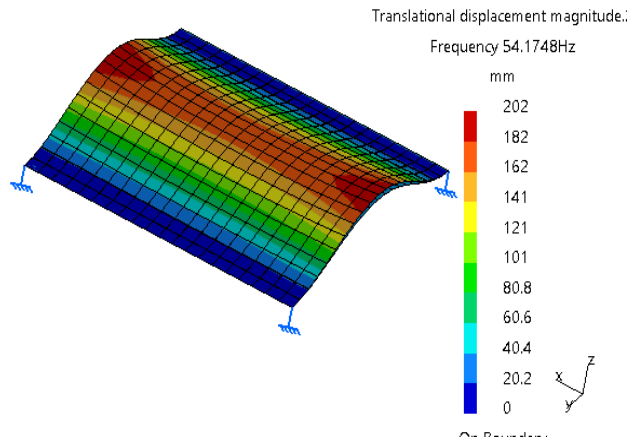
Number of modes	Frequency (Hz)			
1	54.1748			
2	64.3758			
3	106.058			
4	150.425			
5	164.787			
6	195.167			
7	213.867			
8	298.189			
9	303.722			
10	313.931			

Tablau4.3 : Les deforme'es de la plaque bi-encastree

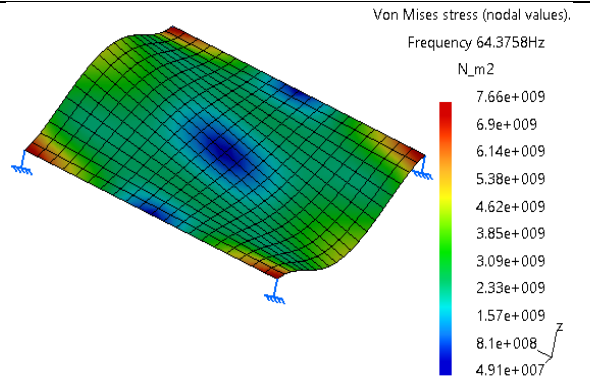
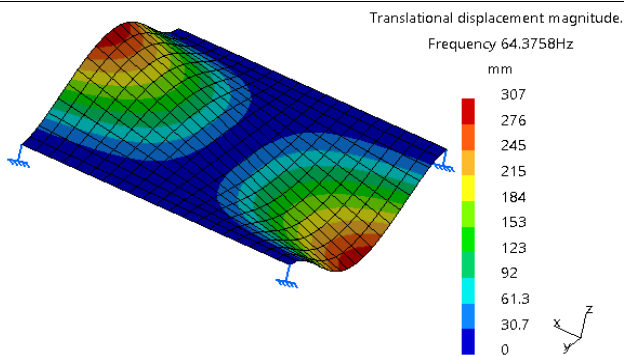
Le champ de déplacements et le champ de contraintes

Le champ de déplacement

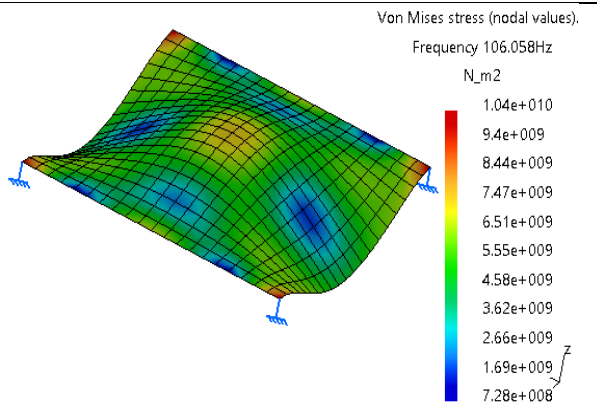
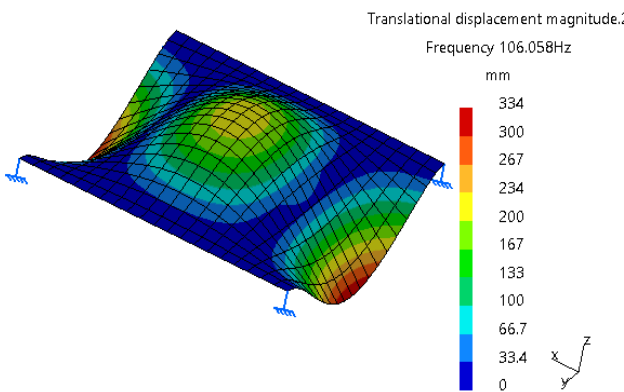
Le champ de contraintes



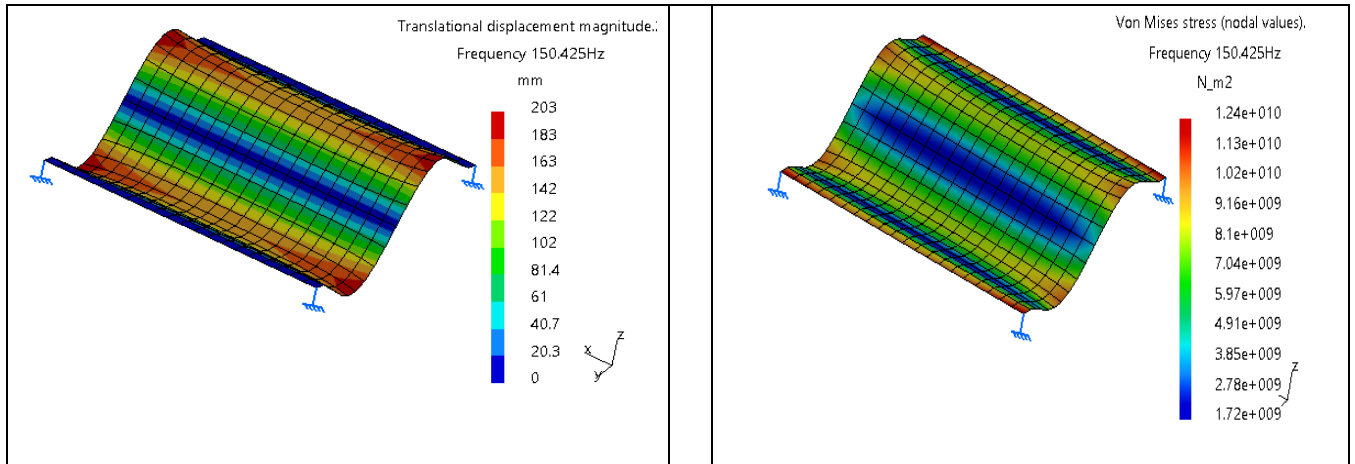
Mode 1 Fr=54.1748Hz



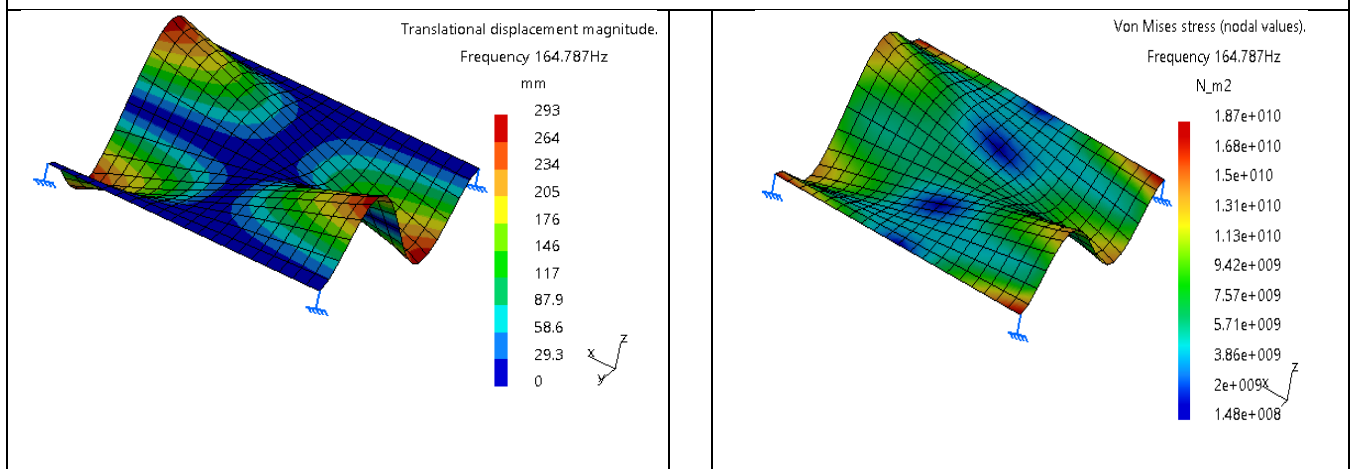
Mode 2 Fr=64.3758Hz



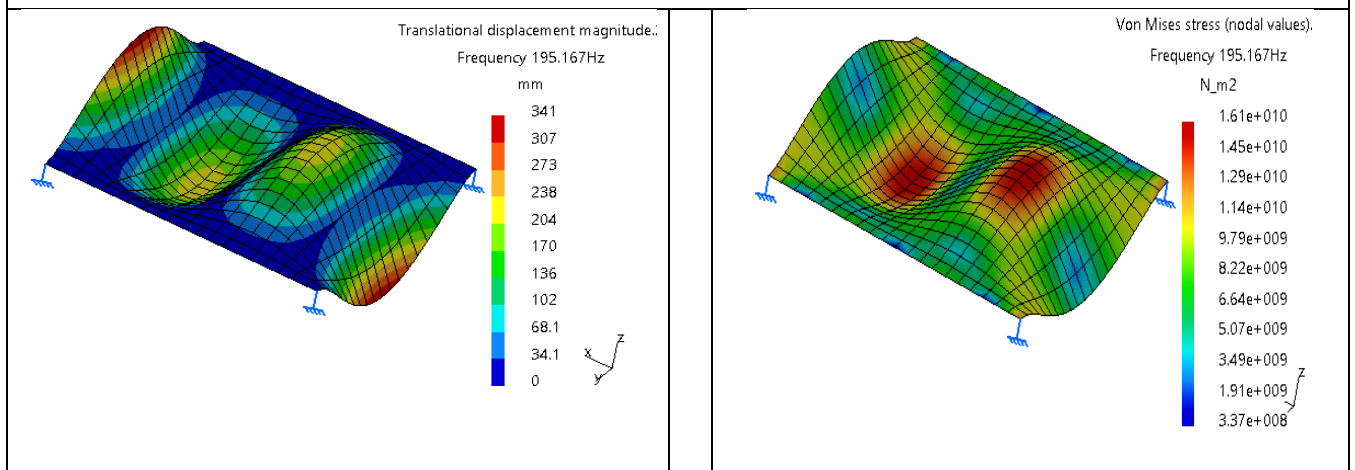
Mode 3 Fr=106.058Hz



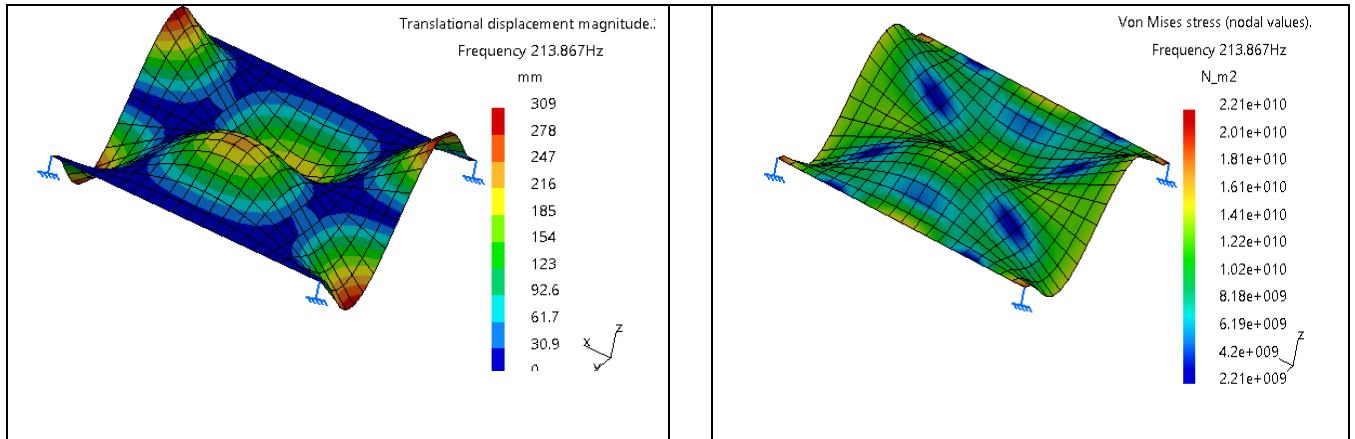
Mode 4 $F_r=150.425\text{Hz}$



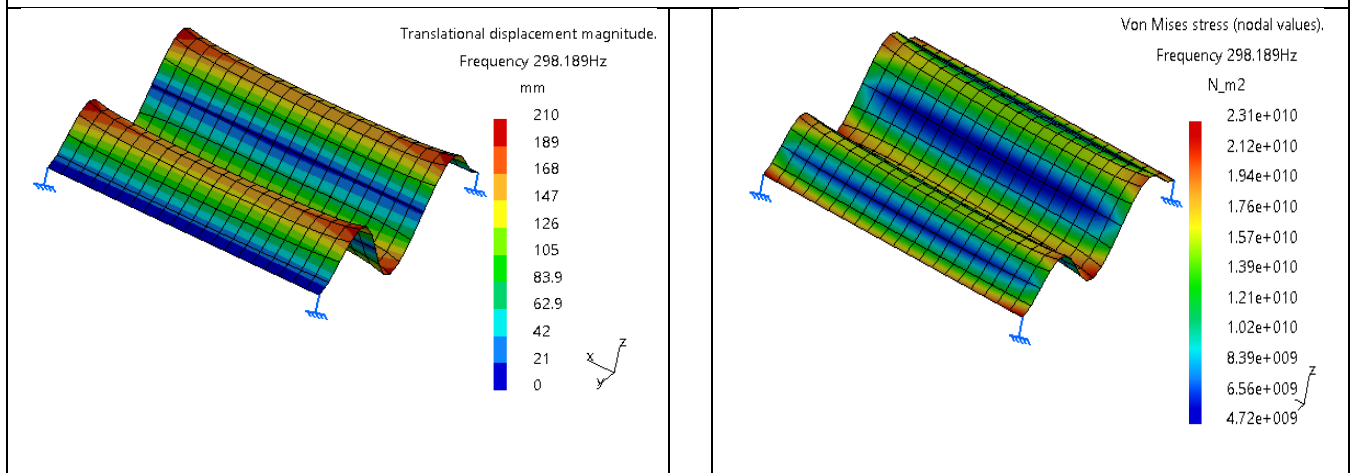
Mode 5 $F_r=164.787\text{Hz}$



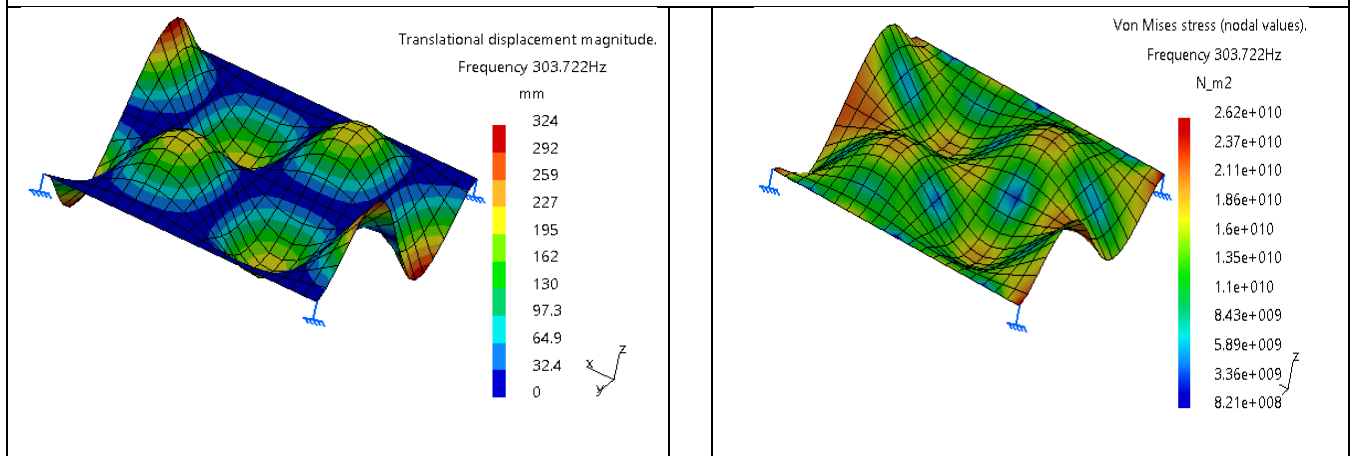
Mode 6 $F_r=195.167\text{Hz}$



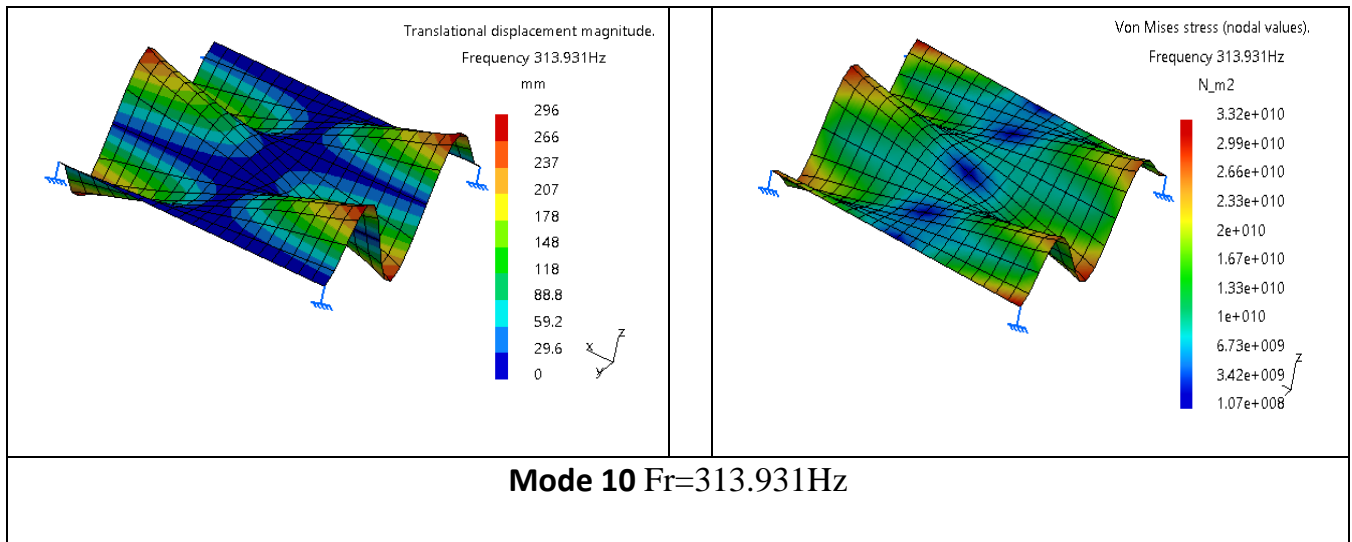
Mode 7 $F_r=213.867\text{Hz}$



Mode 8 $F_r=298.189\text{Hz}$



Mode 9 $F_r=303.722\text{Hz}$



4.4.3 Plaque encadrée sur un cotés et articulé sur le côté opposé

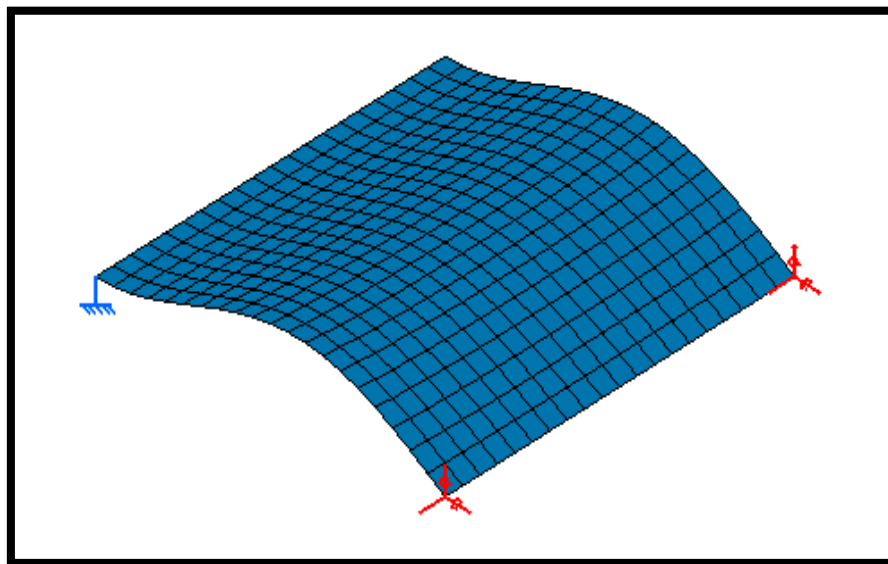
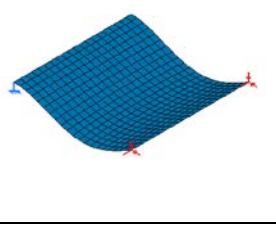
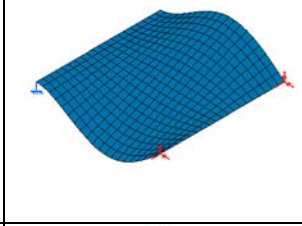
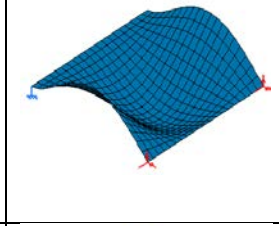
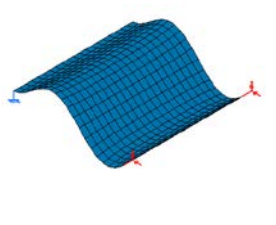
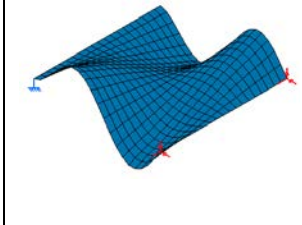
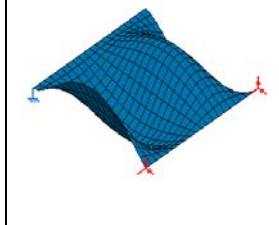
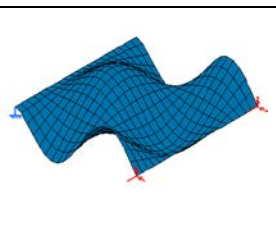
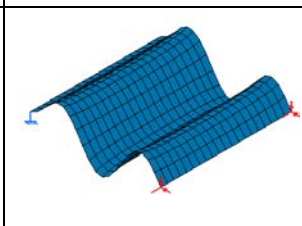
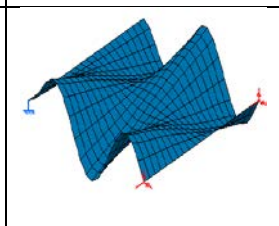
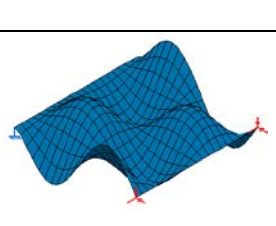
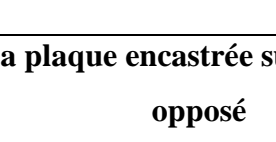


Figure4.3 : Plaque encadrée sur un cotés et articulé sur le côté opposé

Conditions aux limites : Cotés OA et CB articulé (liaison pivot)

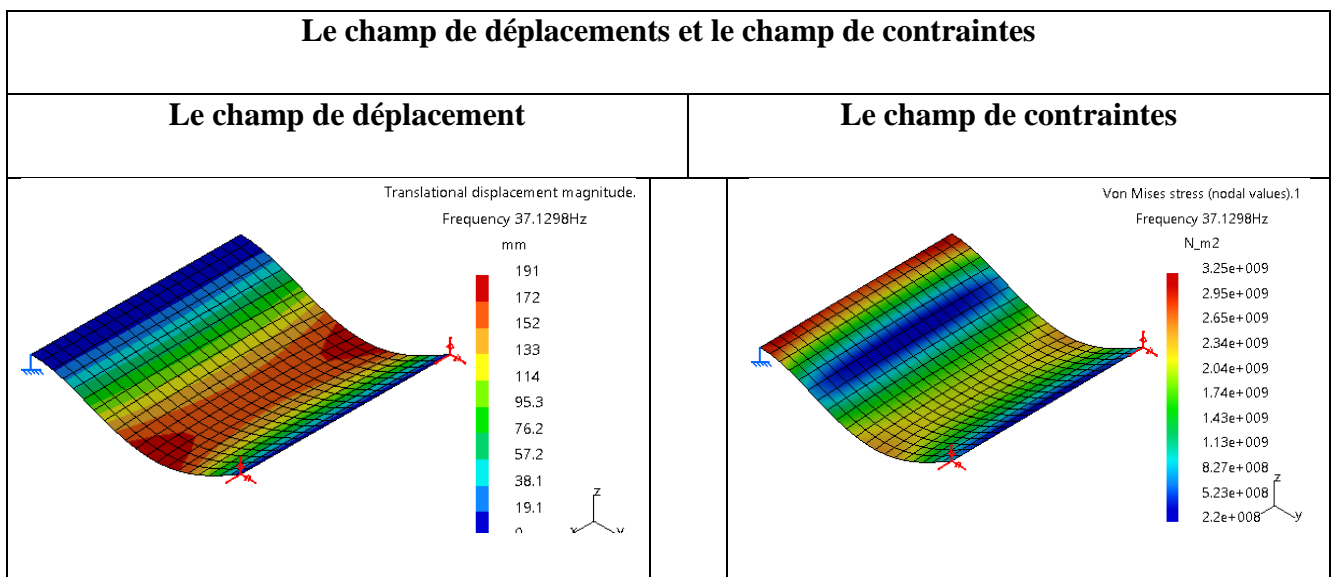
Pour tout point P tel que $y_p = 0$: $u = v = w = 0$ et $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

Et pour tout point P tel que $y_p = 1000$: $u = v = w = 0$ et $\theta_y = \theta_z = 0$

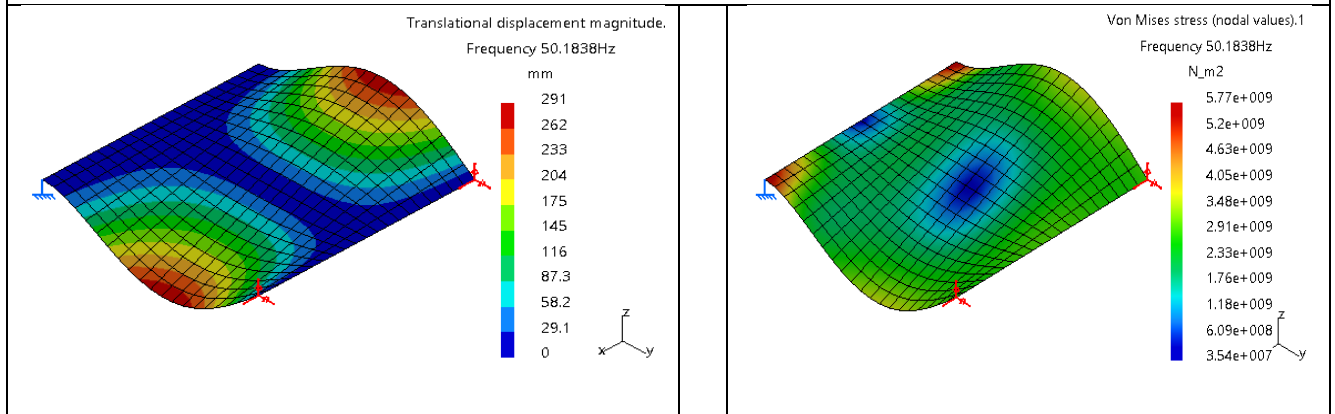
Number of modes	Frequency (Hz)			
1	37.1298			
2	50.1838			
3	96.7712			
4	121.57			
5	138.021			
6	189.302			
7	191.815			
8	256.739			
9	274.188			
10	286.493			
				
				

Les modes

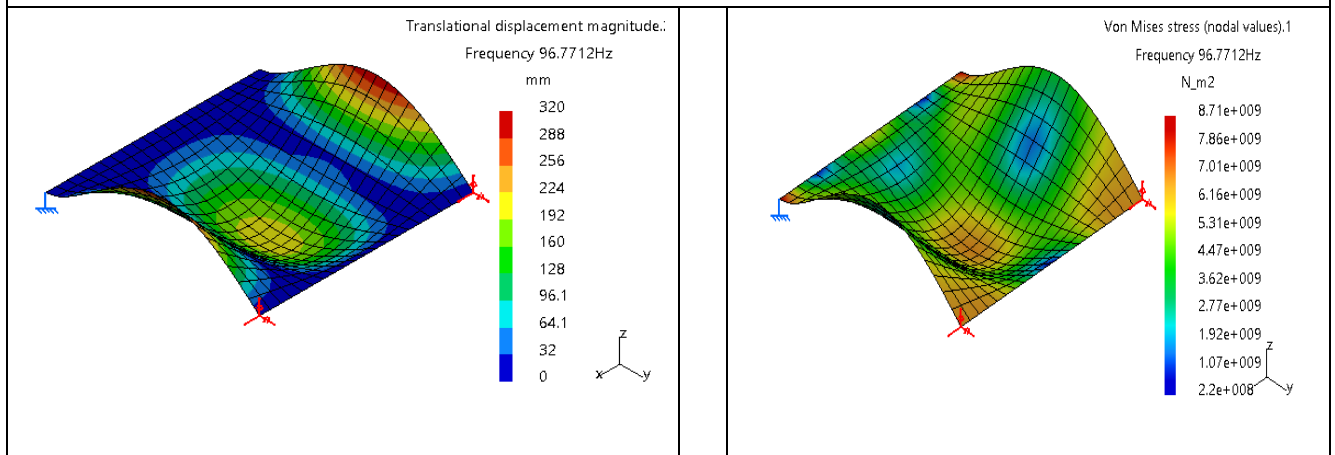
Tablau4.4: Les déformées de la plaque encastree sur un cote et en liaison pivot sur le cote oppose



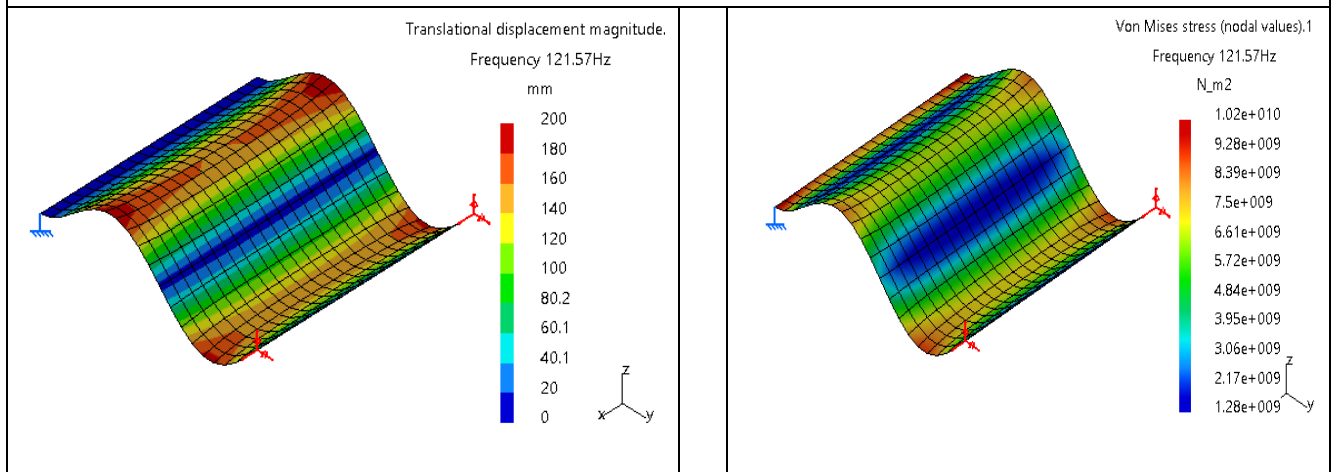
Mode 1 Fr=37.1298Hz



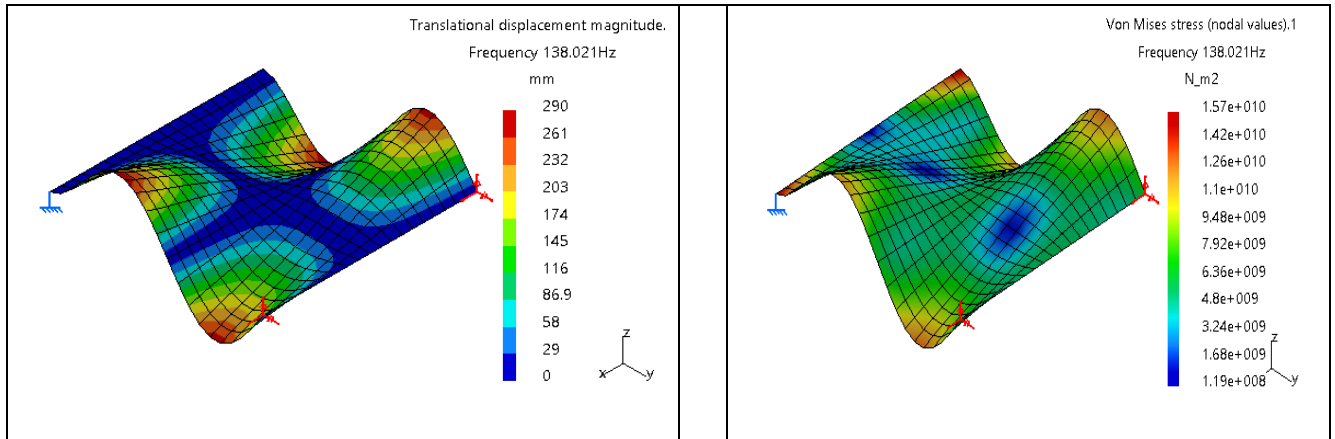
Mode 2 Fr=50.1838Hz



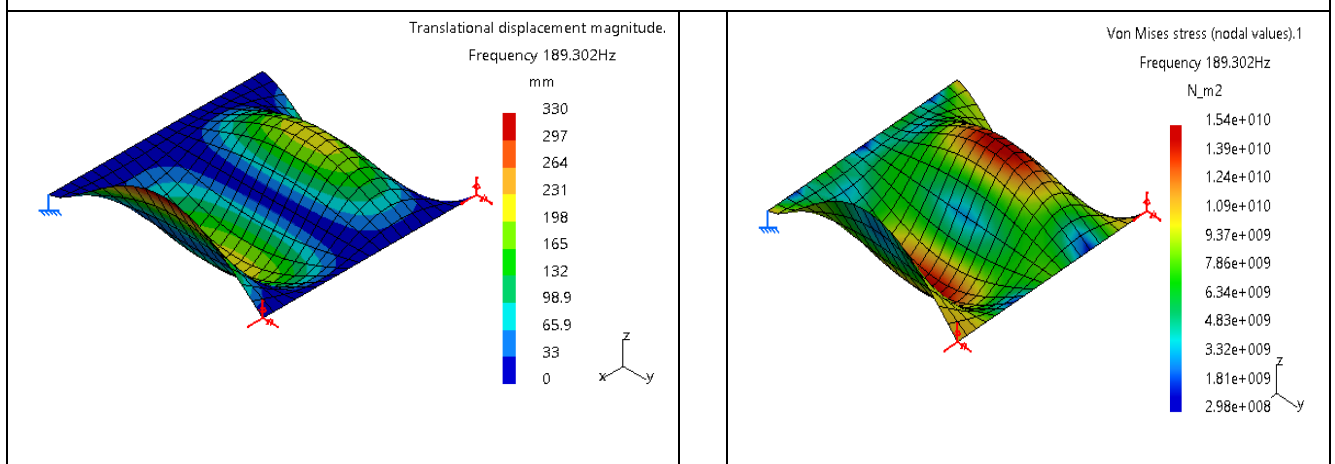
Mode 3 Fr=96.7712Hz



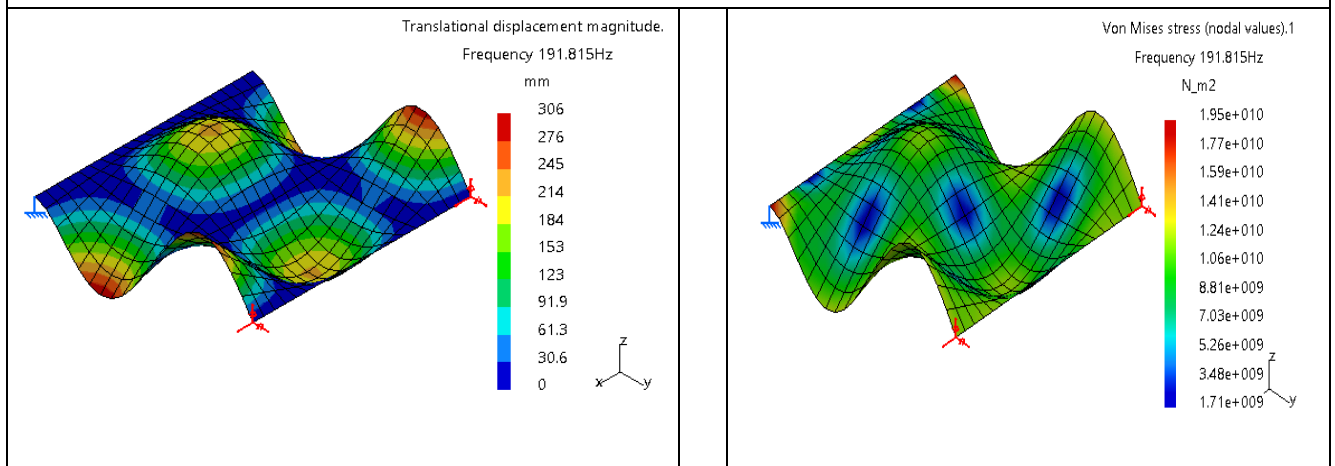
Mode 4 Fr=121.57Hz



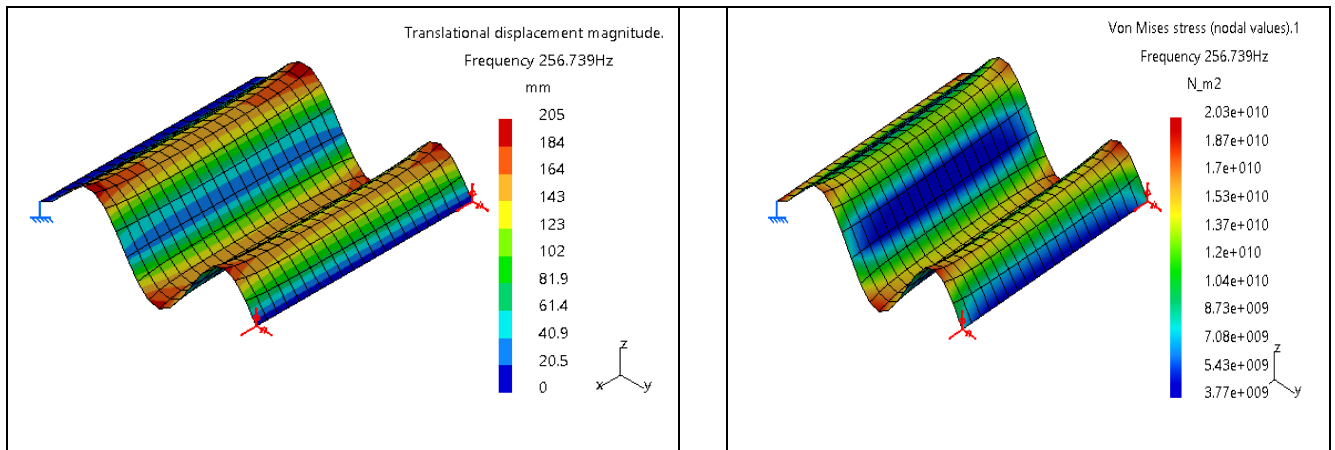
Mode 5 Fr=138.021Hz



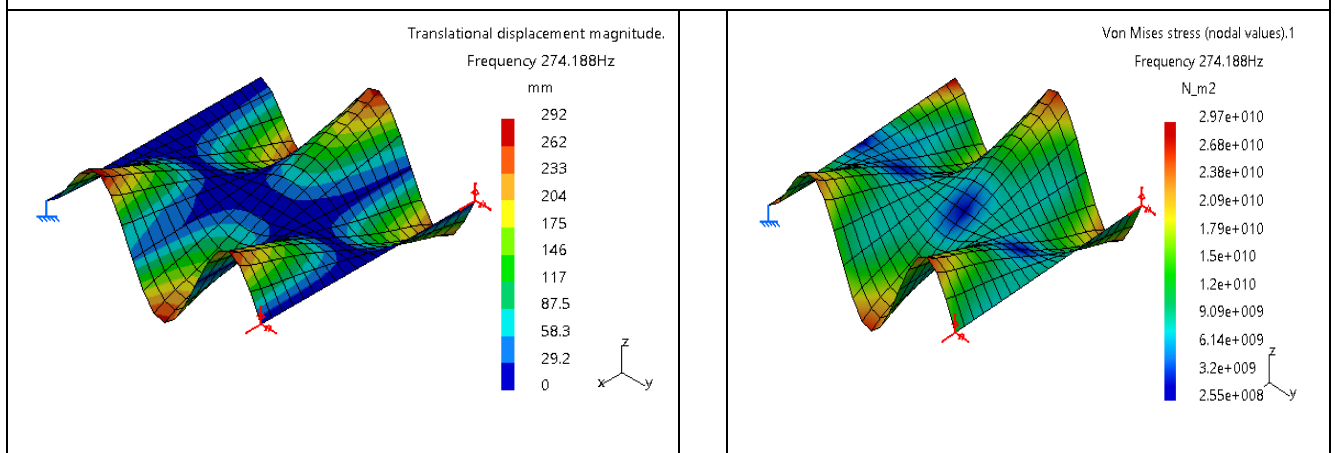
Mode 6 Fr=189.302Hz



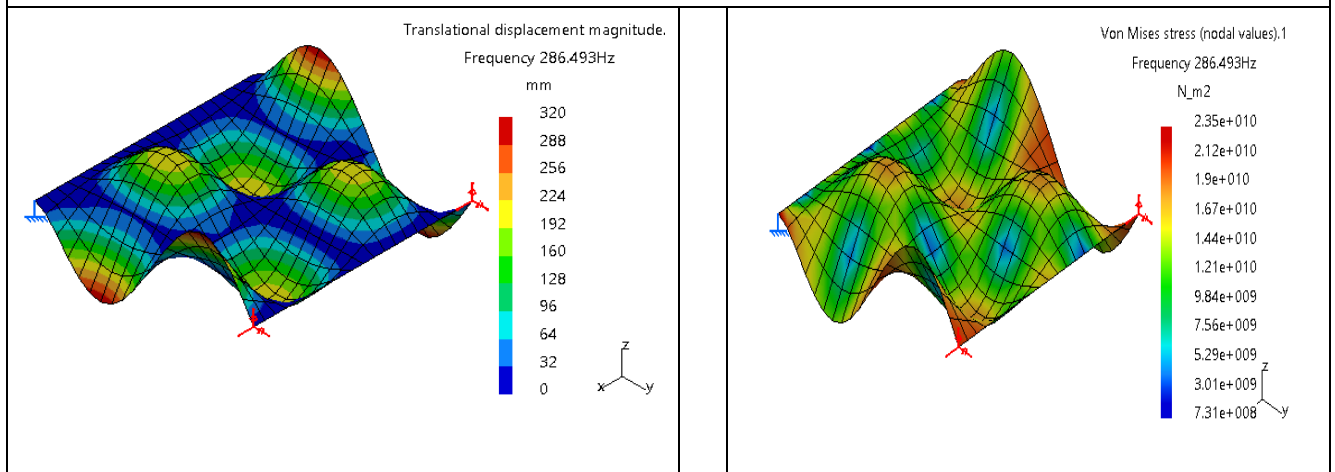
Mode 7 Fr=191.815Hz



Mode 8 Fr=256.739Hz



Mode 9 Fr=274.188Hz



Mode 10 Fr=286.493Hz

4.4.4 Plaque bi-articulée sur deux côtés opposés (en liaison pivot)

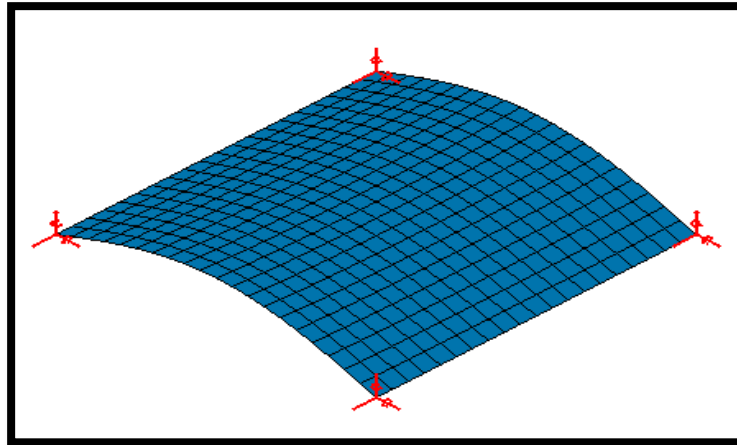


Figure 4.4: Plaque bi-articulée sur deux côtés opposés

Conditions aux limites : Cotés OA et CB articulé (liaison pivot)

Pour tout point P tel que $y_p = 0$: $u = v = w = 0$ et $\theta_y = \theta_z = 0$

Et pour tout point P tel que $y_p = 1000$: $u = v = w = 0$ et $\theta_y = \theta_z = 0$

Number of modes	Frequency (Hz)			
1	23.5332			
2	39.3334			
3	89.5176			
4	95.7149			
5	114.577			
6	172.848			
7	184.482			
8	218.325			
9	237.709			
10	271.568			

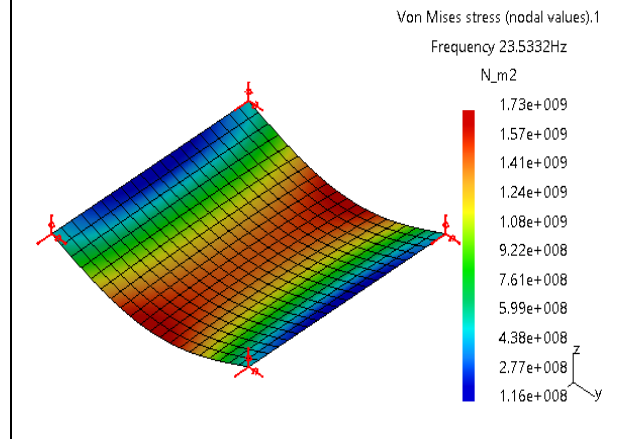
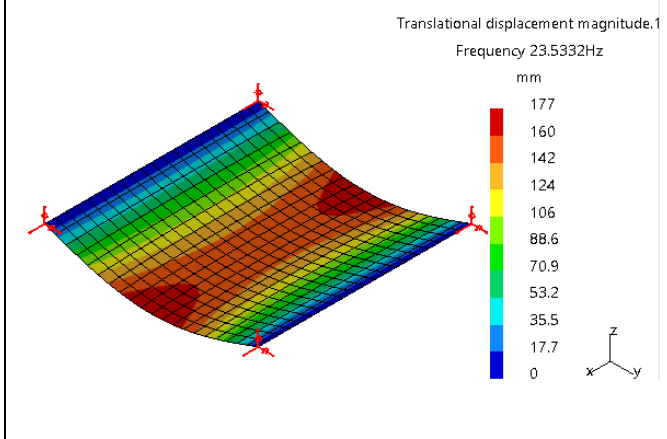
Les modes

Tablau4.5: Les déformées de la plaque bi-articulée sur deux côtés opposés (en liaison pivot)

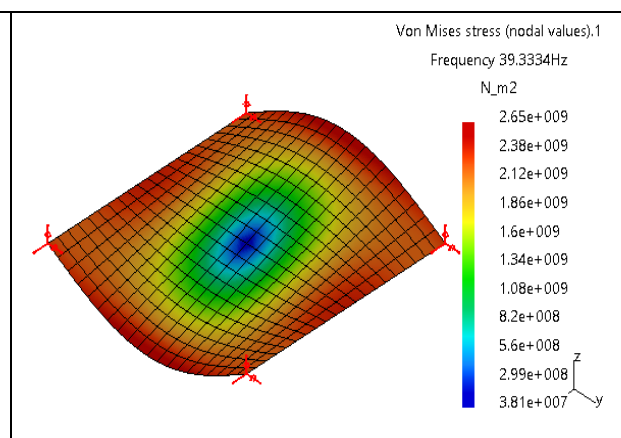
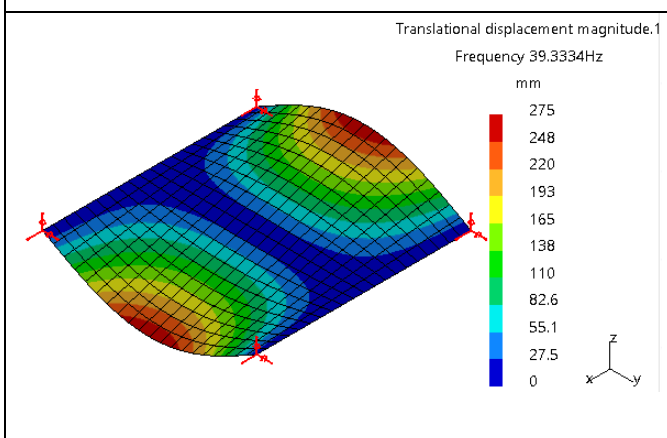
Le champ de déplacements et le champ de contraintes

Le champ de déplacement

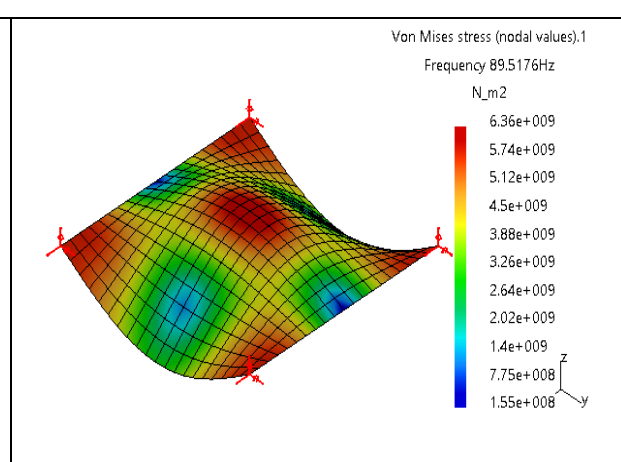
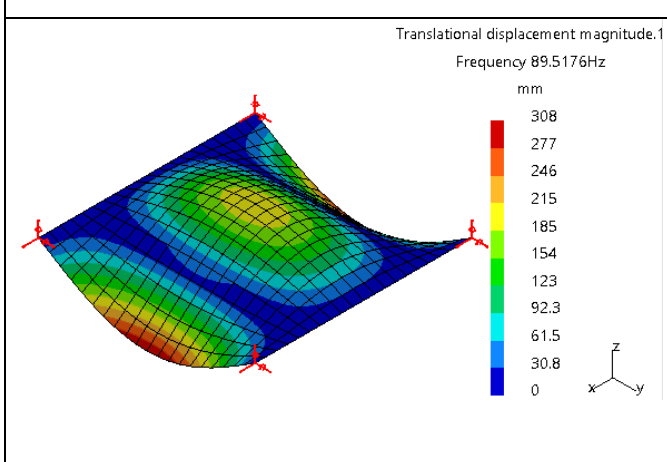
Le champ de contraintes



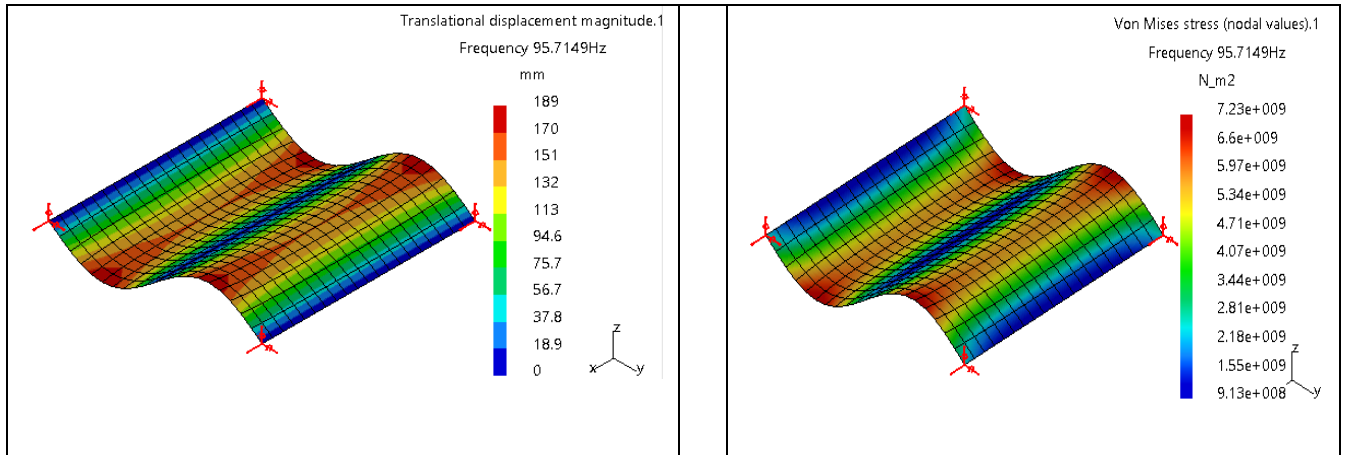
Mode 1 Fr=23.5332Hz



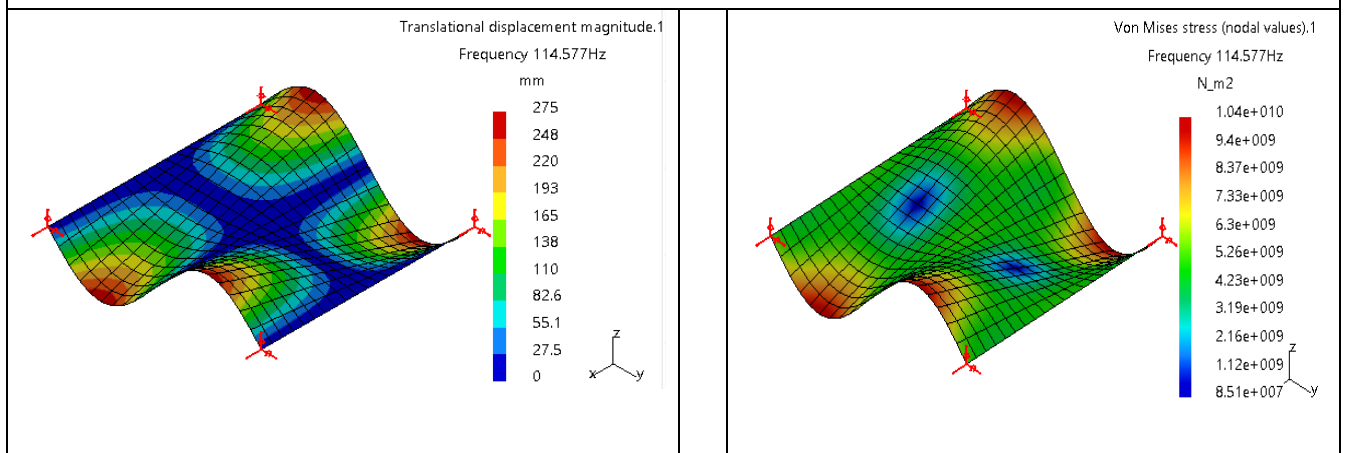
Mode 2 Fr=39.3334Hz



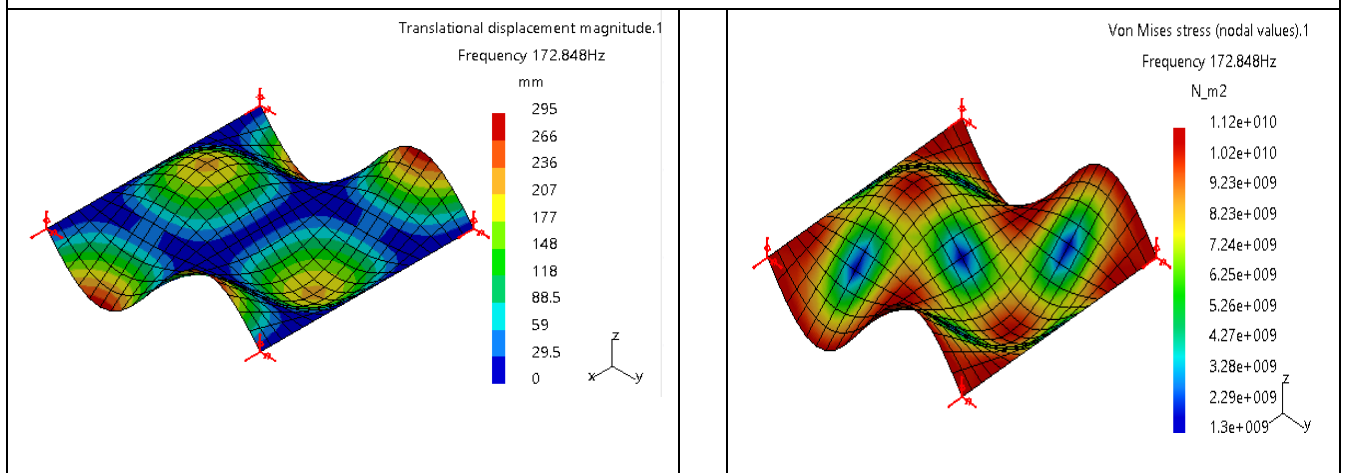
Mode 3 Fr=89.5176Hz



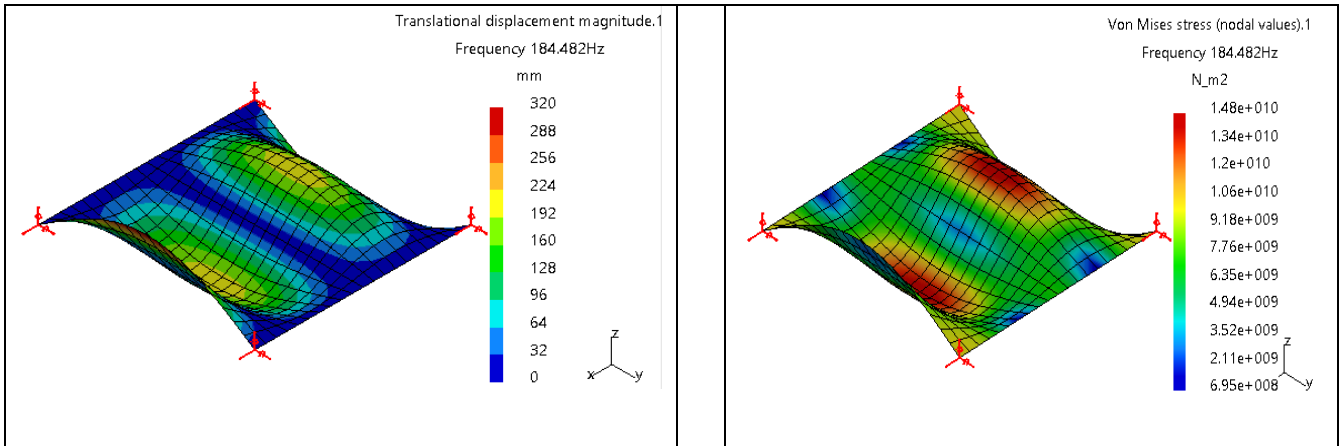
Mode 4 Fr=95.7149Hz



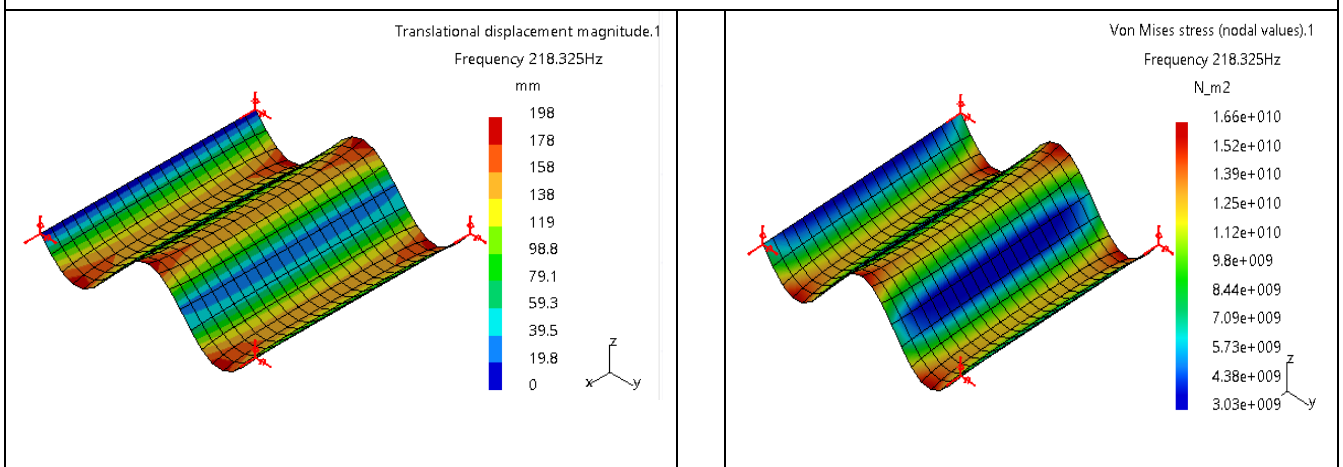
Mode 5 Fr=114.577Hz



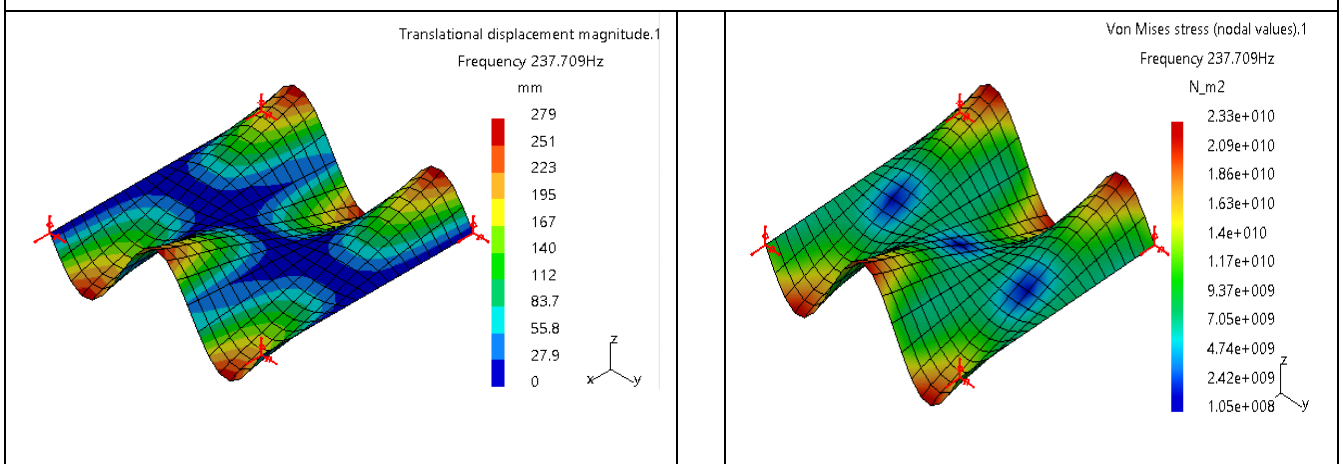
Mode 6 Fr=172.848Hz



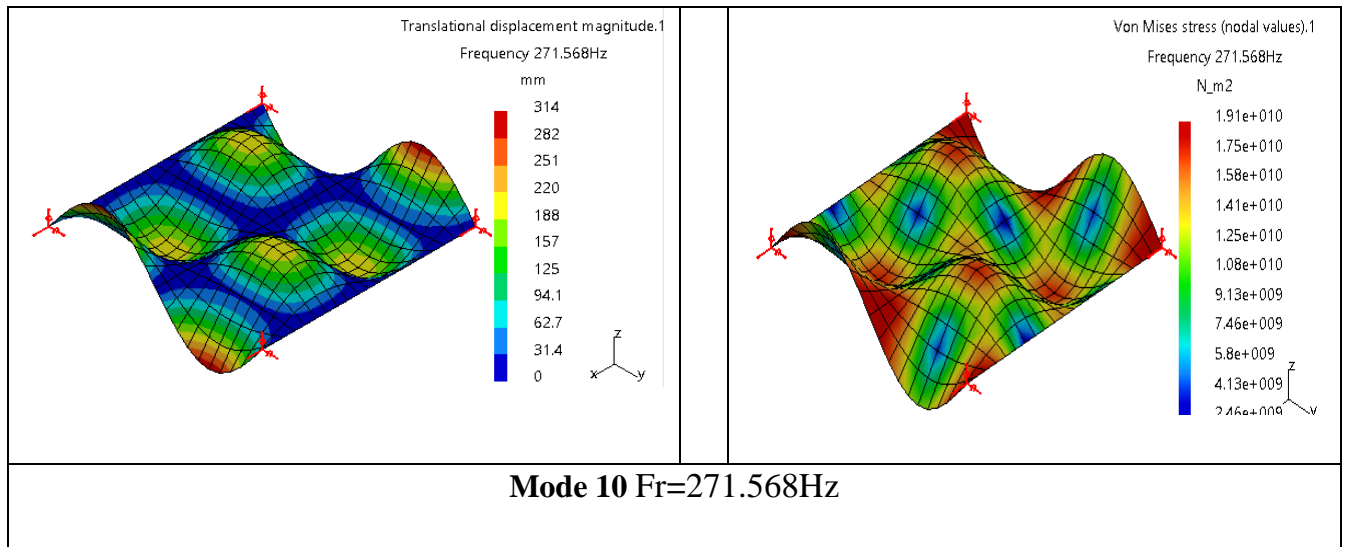
Mode 7 Fr=184.482Hz



Mode 8 Fr=218.325Hz



Mode 9 Fr=237.709Hz



4.5 Comparaisons des valeurs maximales des déplacements et des contraintes

Regroupons dans le tableau ci-dessous les valeurs fréquences ainsi que les valeurs maximales des déplacements flèches et des contraintes pour chaque mode et pour chaque cas des conditions aux rives adoptés, dans le but de repérer les cas de faibles champs de contraintes et /ou de déplacement afin de déterminer le cas le plus résistant:

N° Mode	Cas (B) Encastrement sur un coté			Cas (C) Bi-encastrement			Cas (D) Encastrement Et articulation (liaison pivot)			Cas (E) Bi-articulation En liaison pivot		
	Fréq Hz	Dép mm	Cont. MPa	Fréq Hz	Dép mm	Cont. MPa	Fréq Hz	Dép mm	Cont. MPa	Fréq Hz	Dép mm	Cont. MPa
1	8.46E+00	229	7.82E+08	5.42E+01	202	4.70E+09	3.71E+01	191	3.25E+09	2.35E+01	177	1.73E+09
2	2.07E+01	331	2.22E+09	6.44E+01	307	7.66E+09	5.02E+01	291	5.77E+09	3.93E+01	275	2.65E+09
3	5.20E+01	277	5.05E+09	1.06E+02	334	1.04E+10	9.68E+01	320	8.71E+09	8.95E+01	308	6.36E+09
4	6.64E+01	400	6.65E+09	1.50E+02	203	1.24E+10	1.22E+02	200	1.02E+10	9.57E+01	189	7.23E+09
5	7.55E+01	344	8.32E+09	1.65E+02	293	1.87E+10	1.38E+02	290	1.57E+10	1.15E+02	275	1.04E+10
6	1.32E+02	329	1.40E+10	1.95E+02	341	1.61E+10	1.89E+02	330	1.54E+10	1.73E+02	295	1.12E+10
7	1.51E+02	290	1.17E+10	2.14E+02	309	2.21E+10	1.92E+02	306	1.95E+10	1.84E+02	320	1.48E+10
8	1.57E+02	367	1.71E+10	2.98E+02	210	2.31E+10	2.57E+02	205	2.03E+10	2.18E+02	198	1.66E+10
9	1.74E+02	427	2.07E+10	3.04E+02	324	2.62E+10	2.74E+02	292	2.97E+10	2.38E+02	279	2.33E+10
10	2.27E+02	378	1.89E+10	3.14E+02	296	3.32E+10	2.86E+02	320	2.35E+10	2.72E+02	314	1.91E+10

Tablauh.6 Comparaisons des valeurs maximales des déplacements et des contraintes

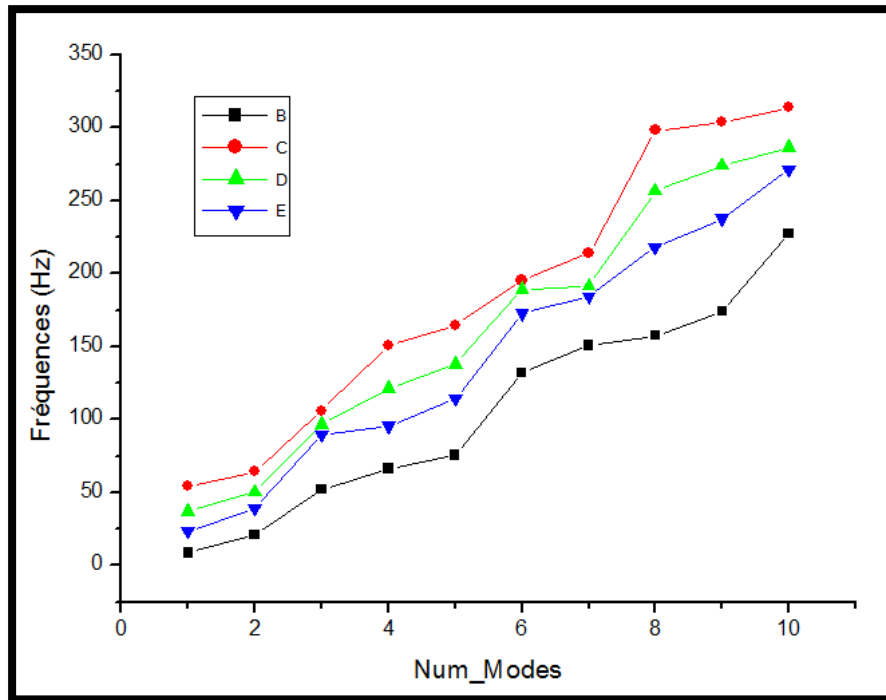


Figure 4.5 : Fréquences en fonction des modes propres obtenus

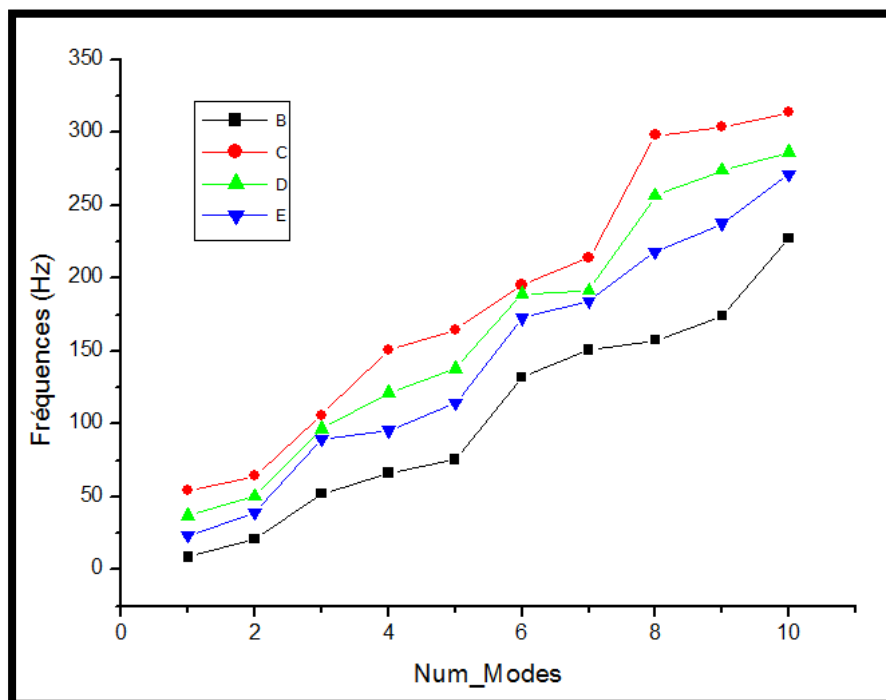


Figure 4.6 : Fréquences en fonction des modes propres obtenus

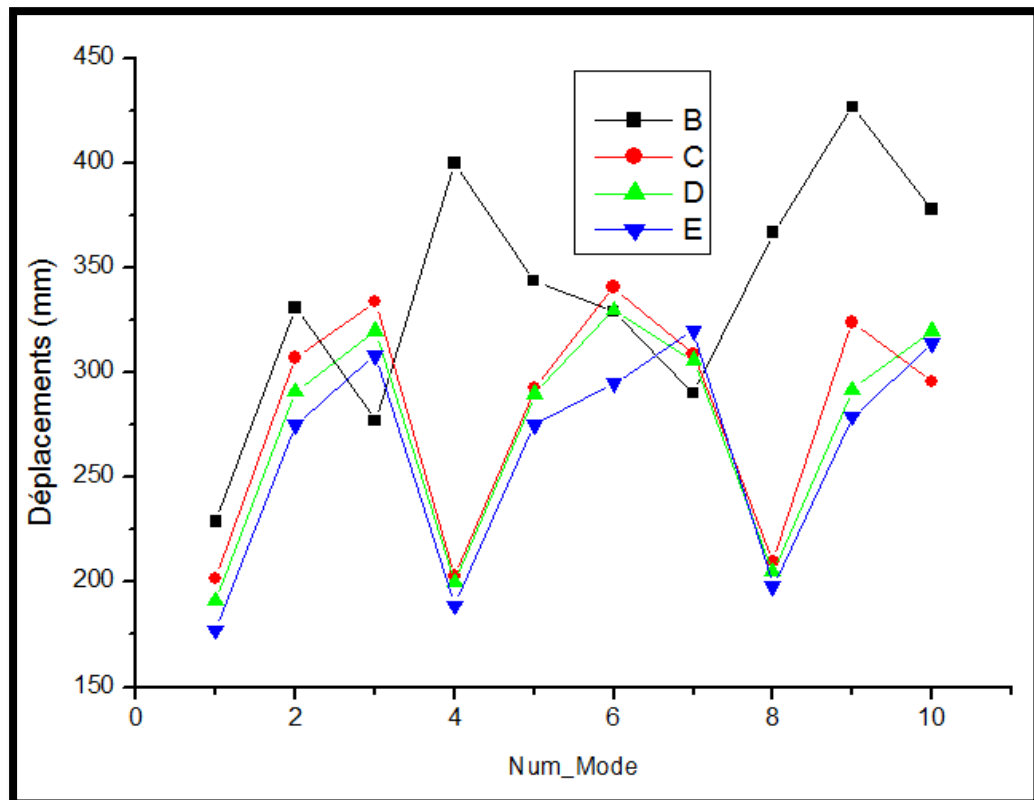


Figure 4.7 : Déplacements en fonction des modes propres obtenus

D'après les courbes ci-dessus, on dévoile les cas plus résistants :

A- en champ de contraintes : Cas de la plaque encastree sur un seul coté.

B- en champ de déplacements : Cas de la plaque bi-articulée sur deux cotés opposés

4.6 Détermination du champ de déplacements et du champ de contraintes en fonction du matériau de la plaque

Il est fortement conseillé de garder les mêmes paramètres géométriques $1000 \times 1000 \times 10$ comme données géométriques. Ceci permettra de plus d'analyser les résultats et d'interpréter les phénomènes physiques pour différentes valeurs. Cependant, pour commencer les calculs, on pourra choisir pour matériaux :

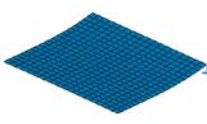
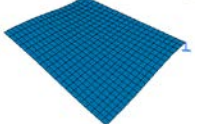

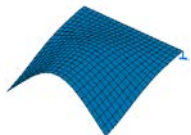
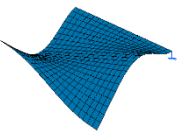
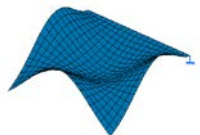


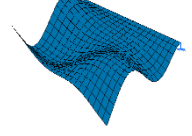
Matériau	Masse volumique ρ [kg.m^{-3}]	Module de Young E [GPa]	Coefficient de Poisson ν
Aluminium	2710	70	0.346
Bronze	8860	110	0.341

Et refaire le même calcul que précédemment (Calcul par simulation) pour les deux cas de conditions aux limites

4.6.1 Plaque encastree sur un bord

4.6.1.1 Plaque en aluminium

Résultats

Number of modes	Frequency (Hz)			
1	8.59546			
2	20.6012			
3	52.3804			
4	67.2683			
5	75.5991			
6	132.376			
7	153.221			
8	158.751			
9	176.598			
10	229.229			

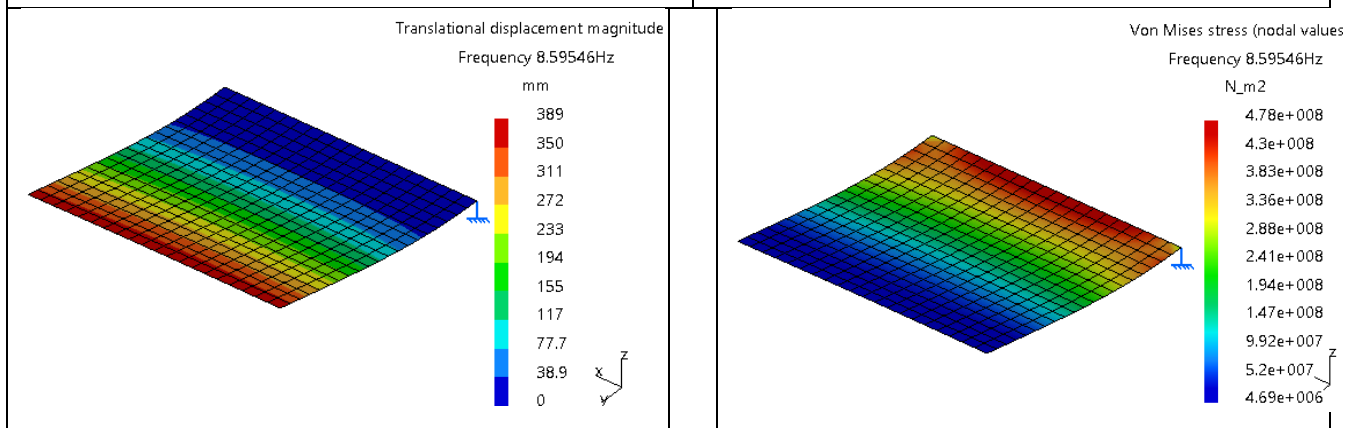
Les modes

Tablauh4.7Les déformées de la plaque (en aluminium) encastree sur un coté

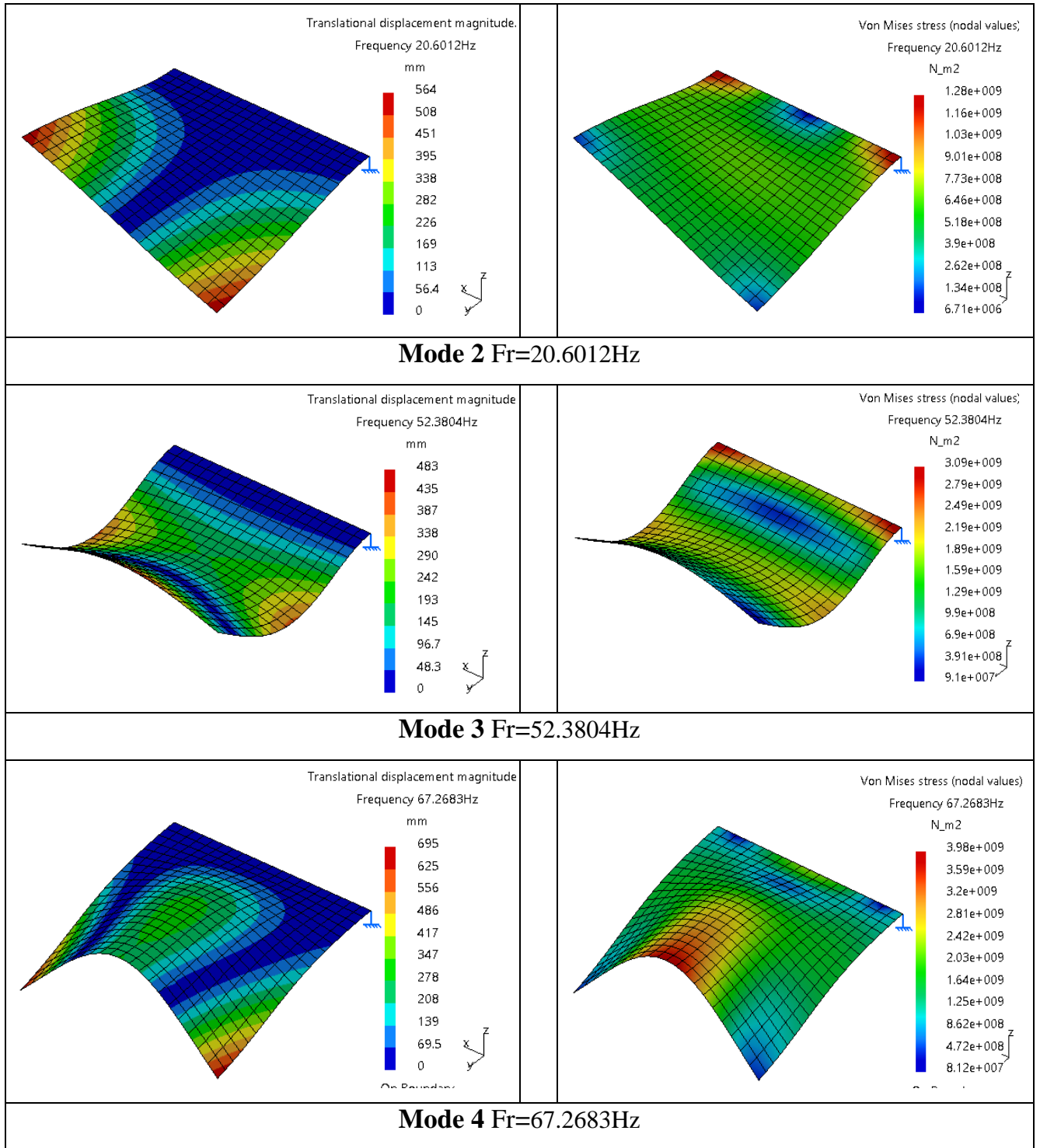
Le champ de déplacements et le champ de contraintes

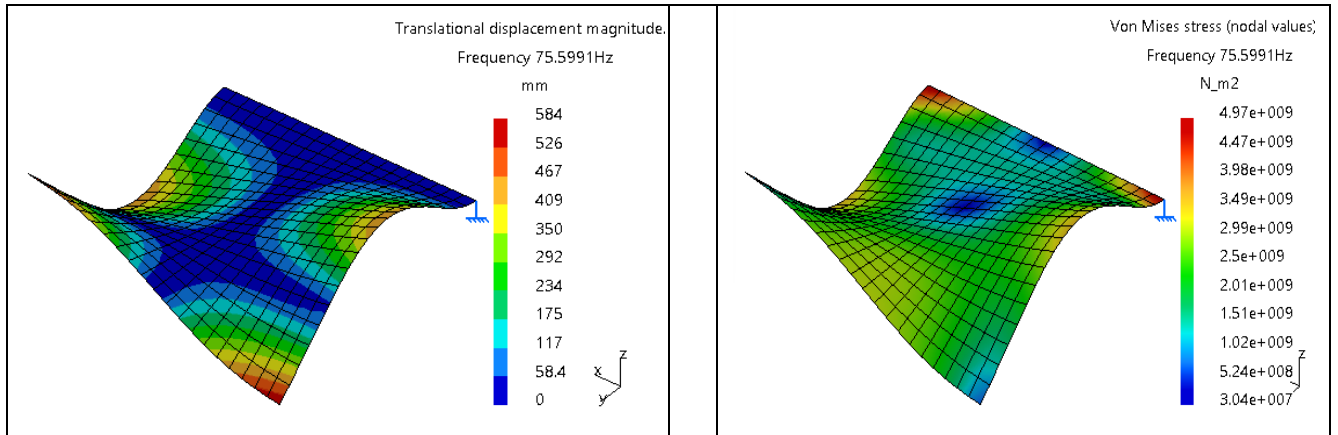
Le champ de déplacement

Le champ de contraintes

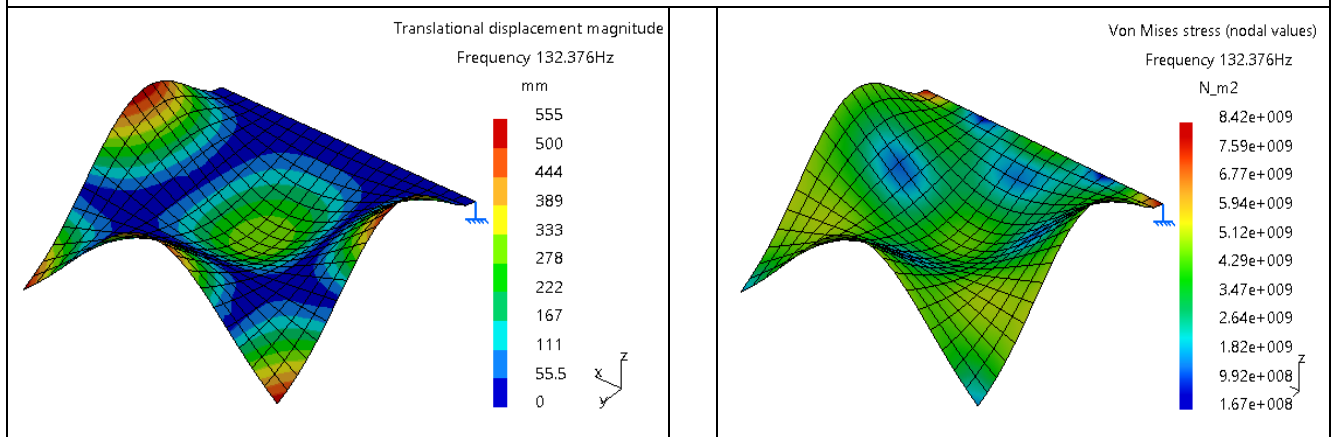


Mode 1 Fr = 8.59546H

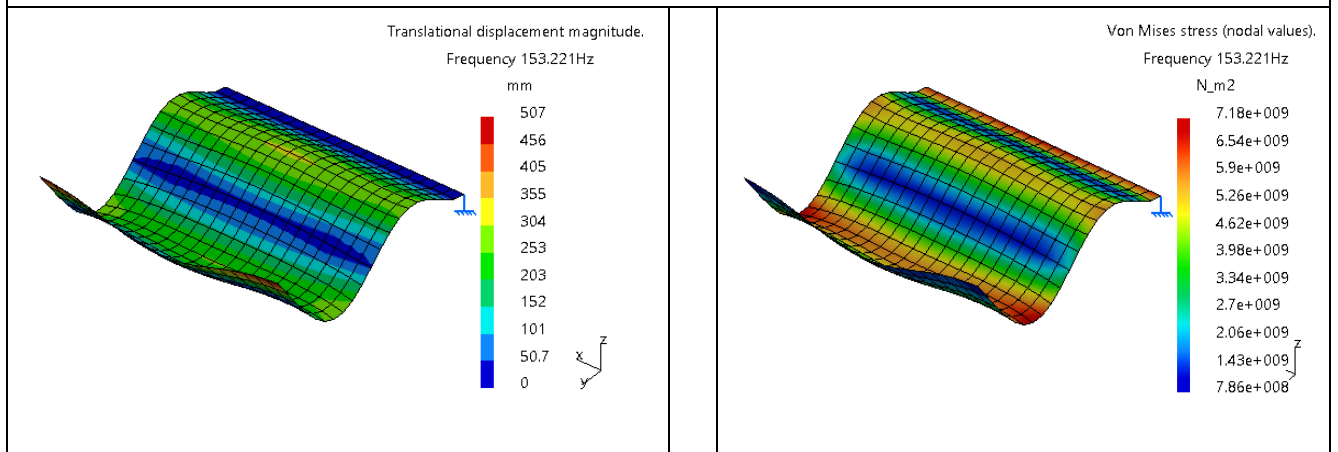




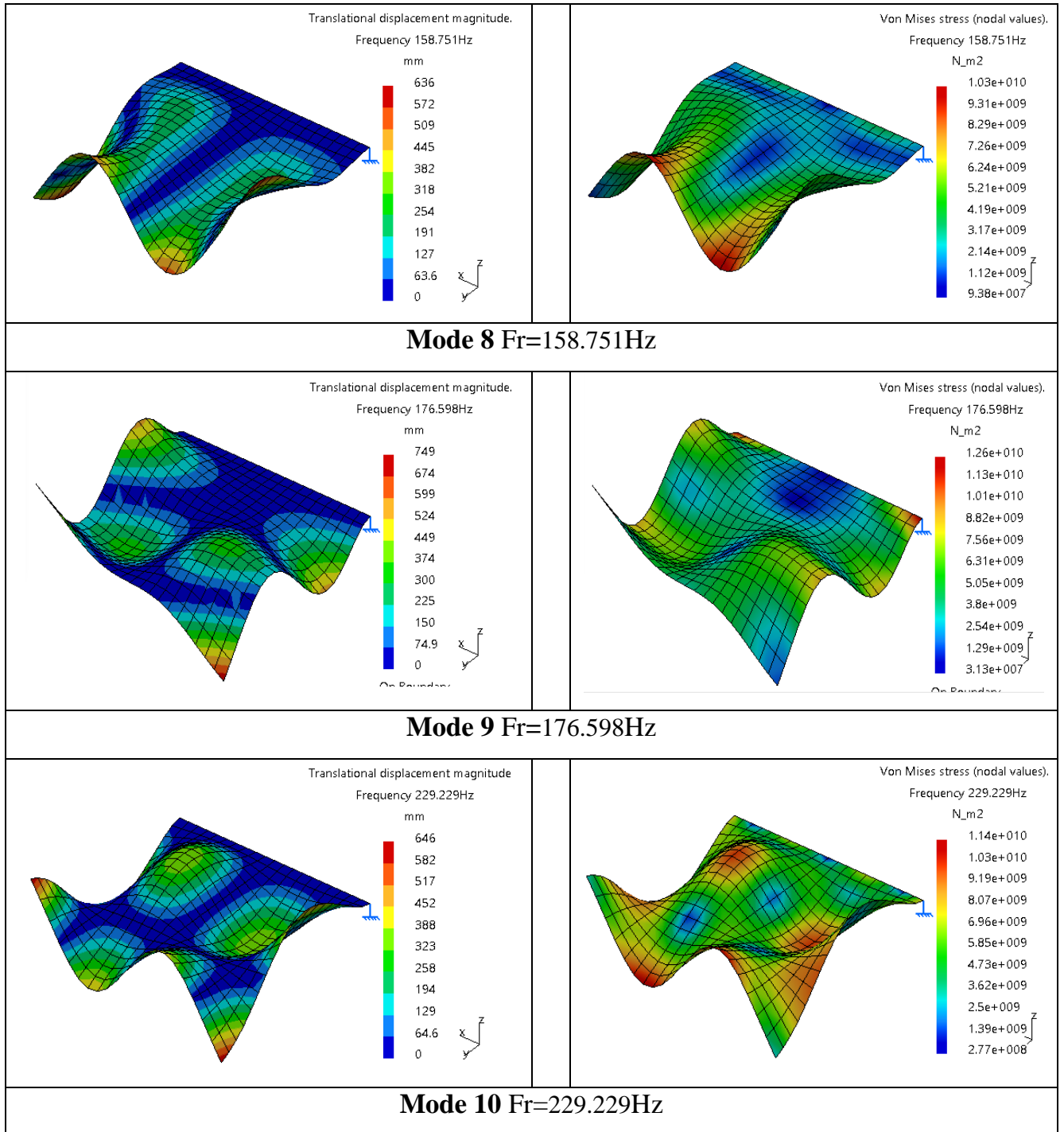
Mode 5 $Fr=75.5991\text{Hz}$



Mode 6 $Fr=132.376\text{Hz}$

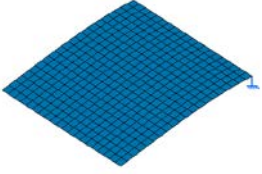
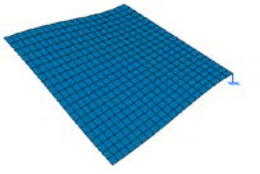
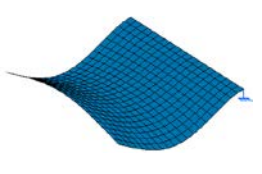
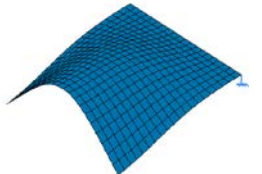

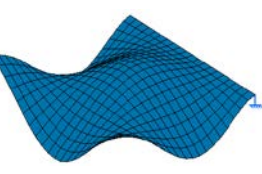


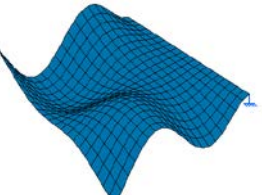
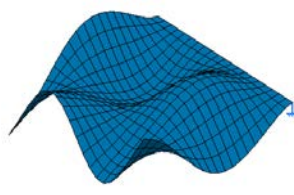


Mode 7 $Fr=153.221\text{Hz}$



4.6.1.2 Plaque en bronze

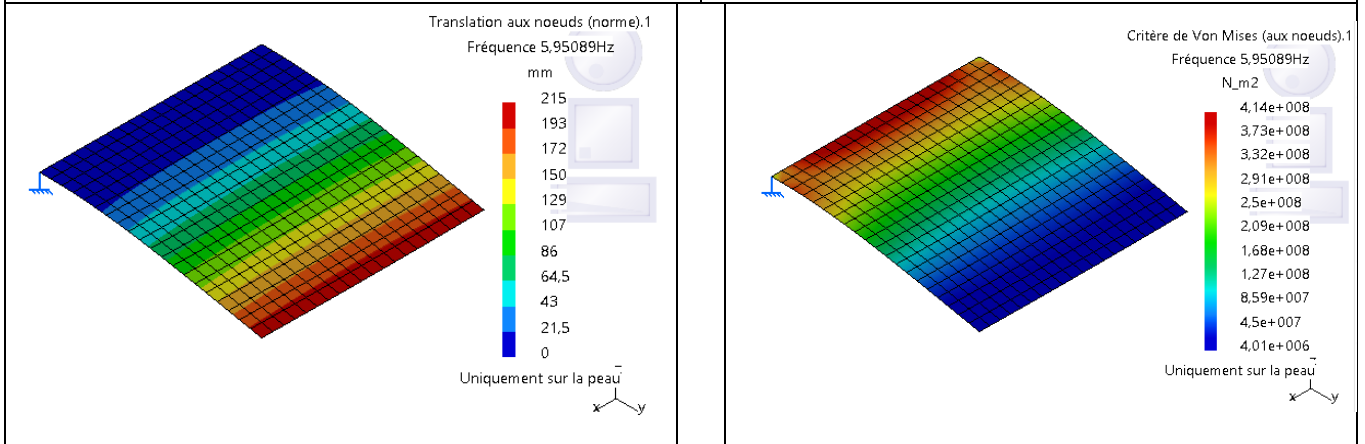
Résultats

Nombre de modes	Fréquences (Hz)			
1	5,95089			
2	14,2949			
3	36,3011			
4	46,5807			
5	52,42			
6	91,7753			
7	106,061			
8	110,001			
9	122,281			
10	158,811			
Les modes				
				
Tablau4.8 Les déformées de la plaque (en bronze) encastrée sur un coté				

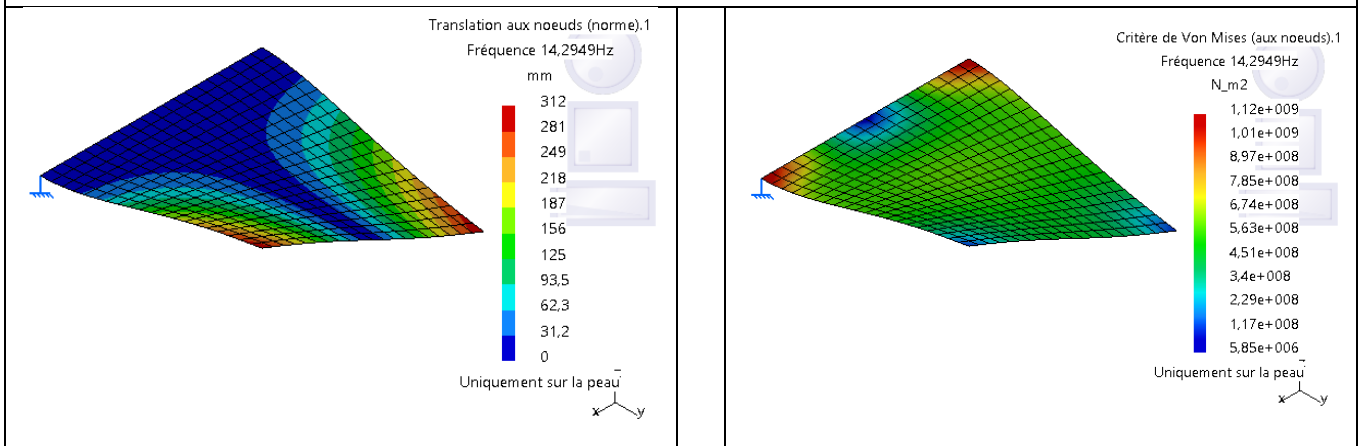
Le champ de déplacements et le champ de contraintes

Le champ de déplacement

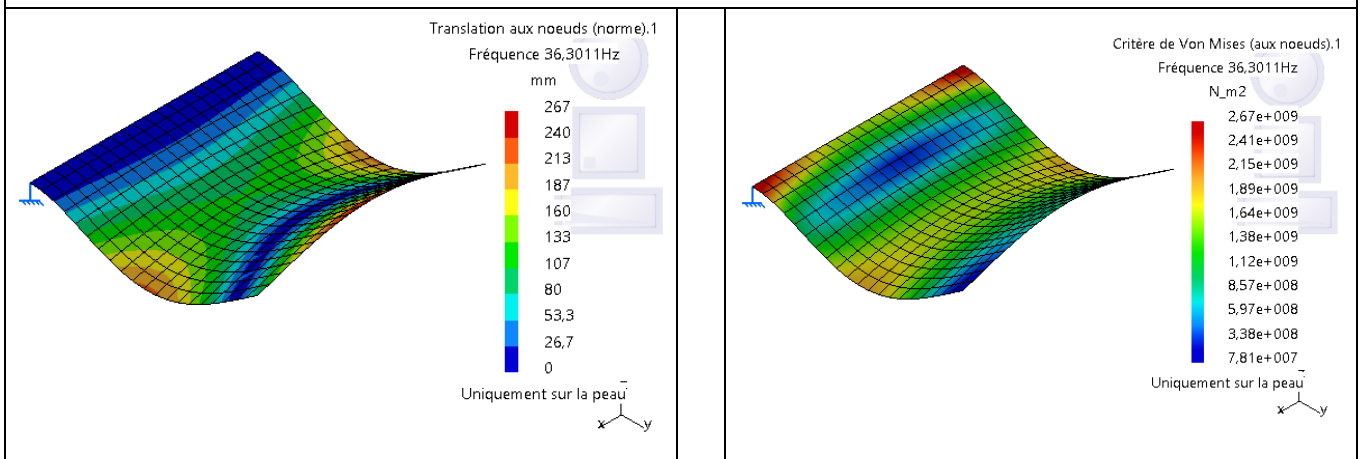
Le champ de contraintes



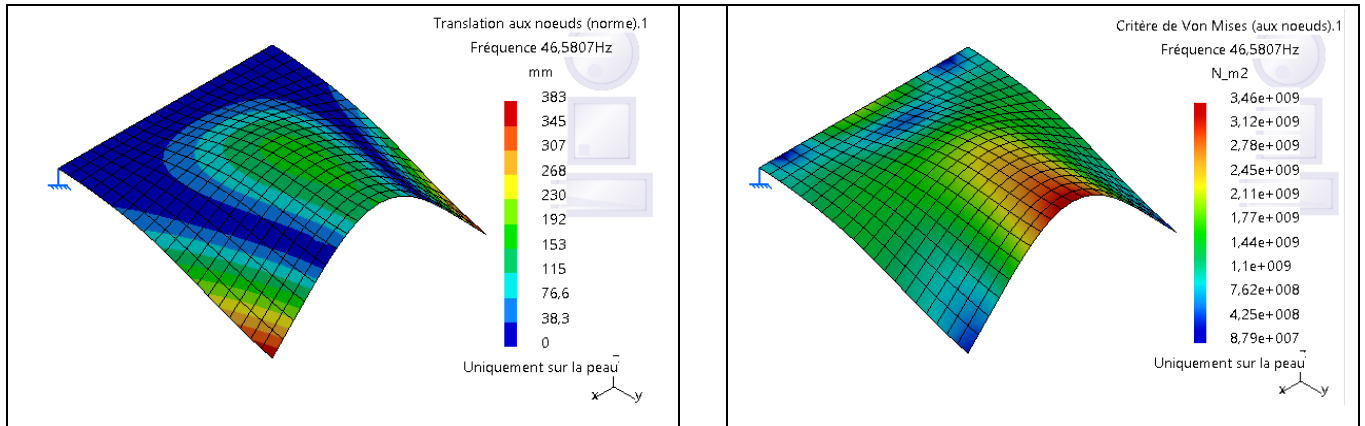
Mode 1 Fr=5.95089Hz



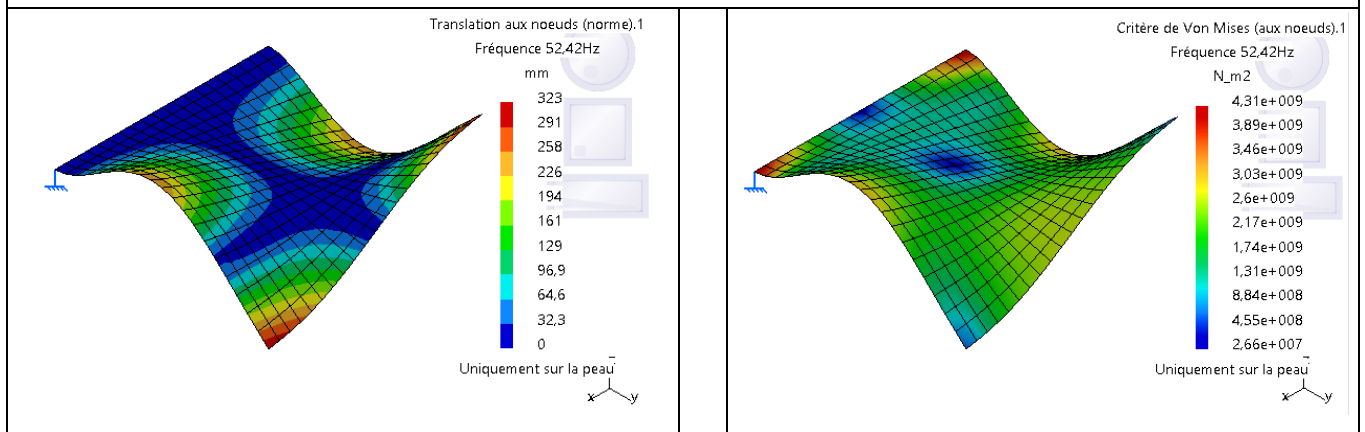
Mode 2 Fr=14.2949Hz



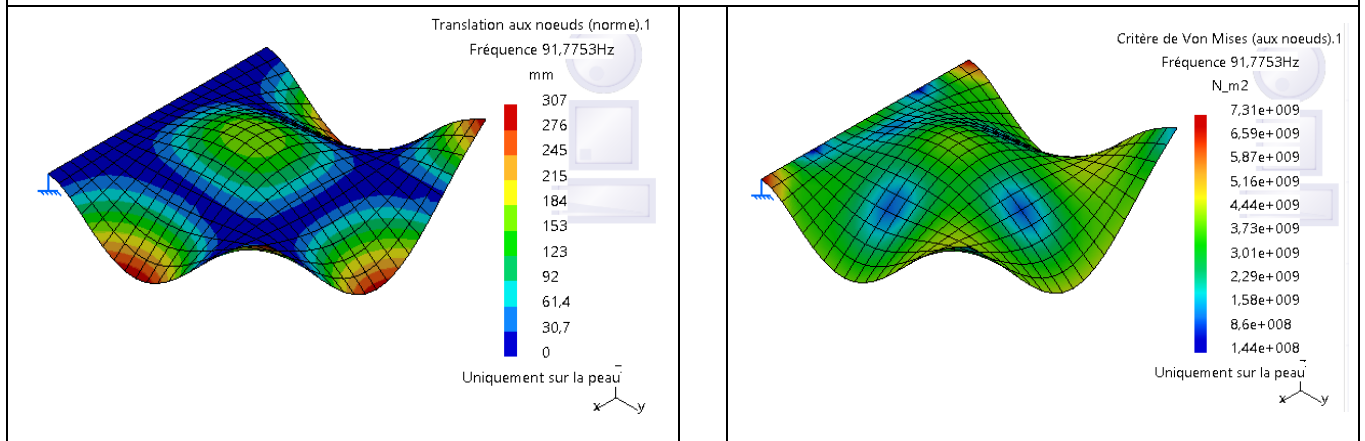
Mode 3 Fr=36.3011Hz



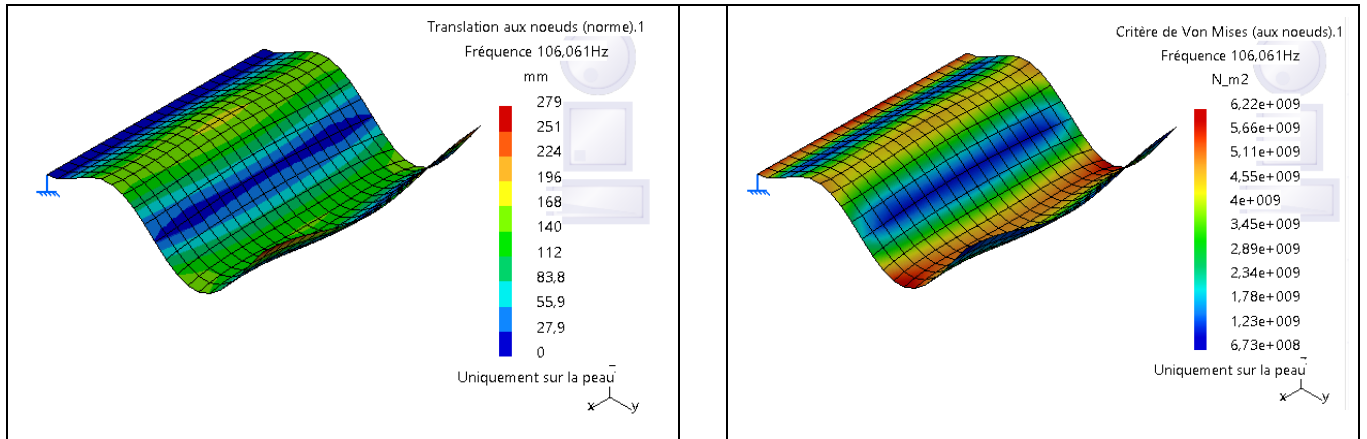
Mode 4 $Fr=46.5807Hz$



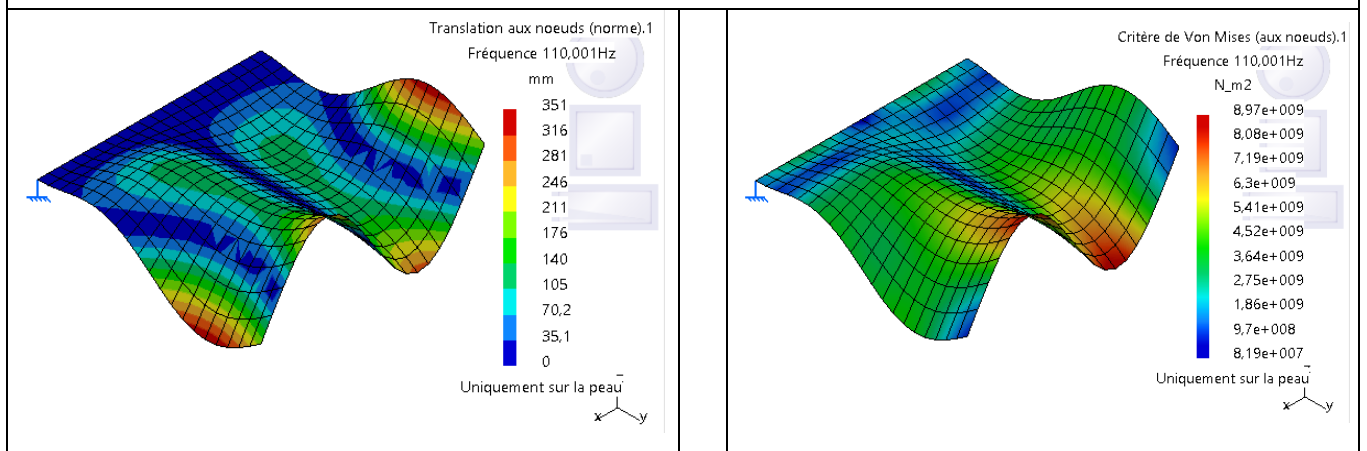
Mode 5 $Fr=52.42Hz$



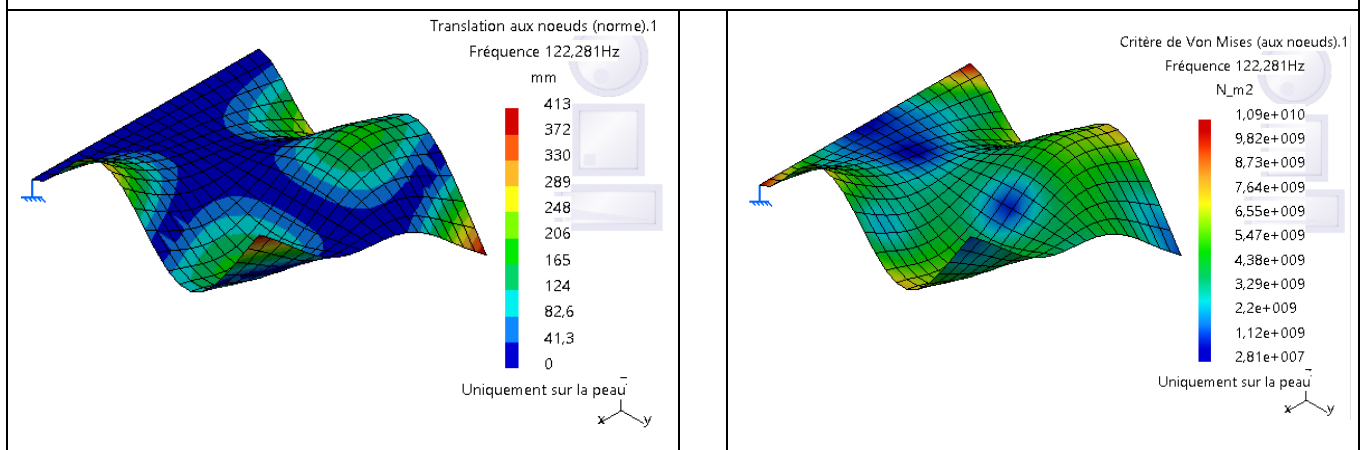
Mode 6 $Fr=91.7753Hz$



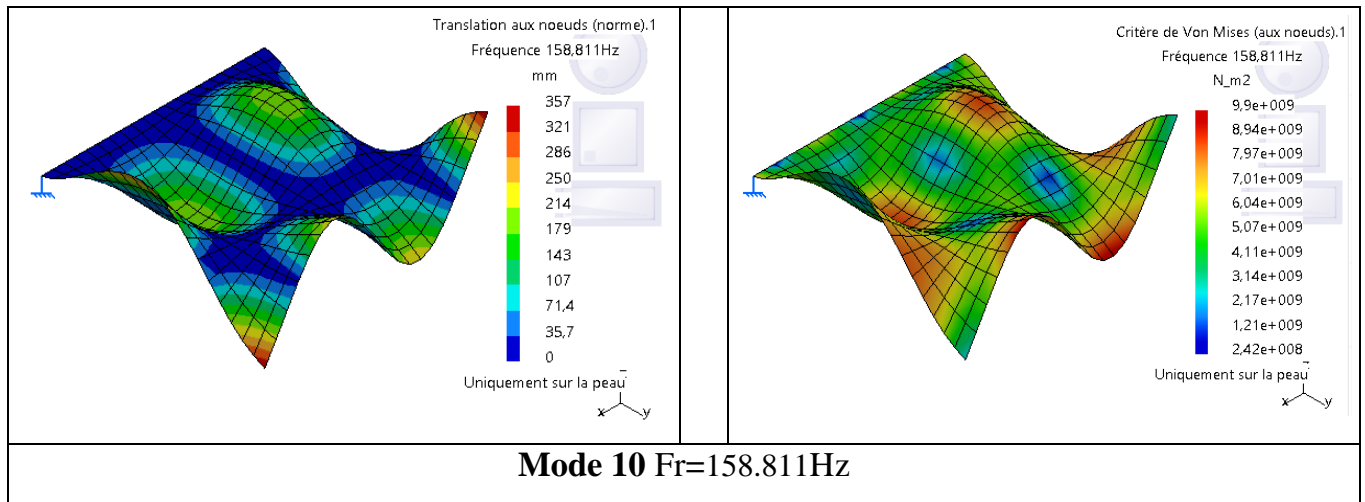
Mode 7 Fr=106.061Hz



Mode 8 Fr=110.001Hz



Mode 9 Fr=122.281Hz



4.6.2 Plaque bi-articulée (liaison pivot) sur deux côtés opposés

4.6.2.1 Plaque en aluminium

Résultats

Nombre de modes	Fréquences (Hz)			
1	23,7895			
2	39,2537			
3	90,2846			
4	97,1367			
5	115,48			
6	174,336			
7	187,329			
8	221,919			
9	240,602			
10	274,755			

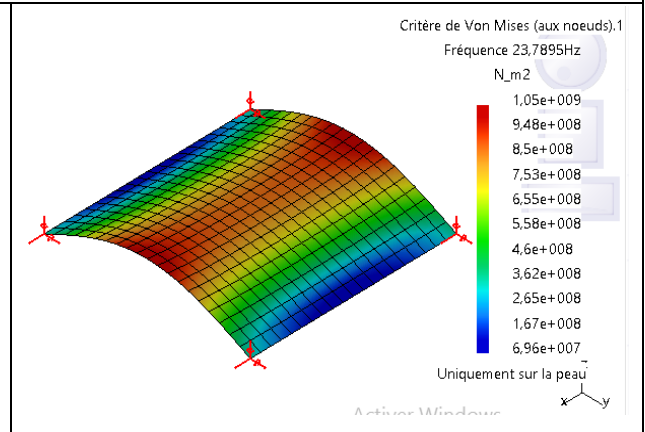
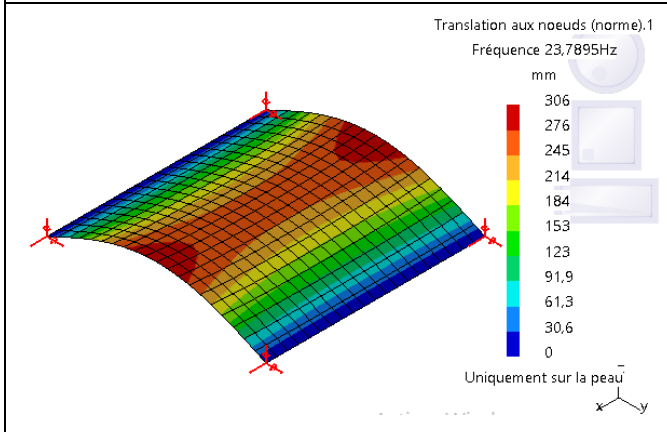
Les modes

Tablau4.9 Les déformées de la plaque bi-articulée (liaison pivot) sur deux côtés opposés

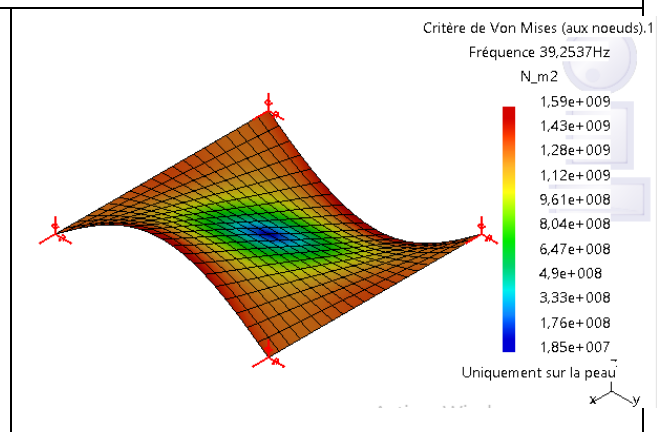
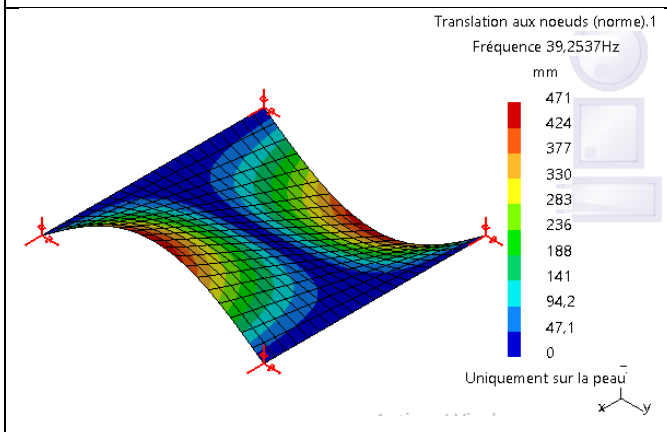
Le champ de déplacements et le champ de contraintes

Le champ de déplacement

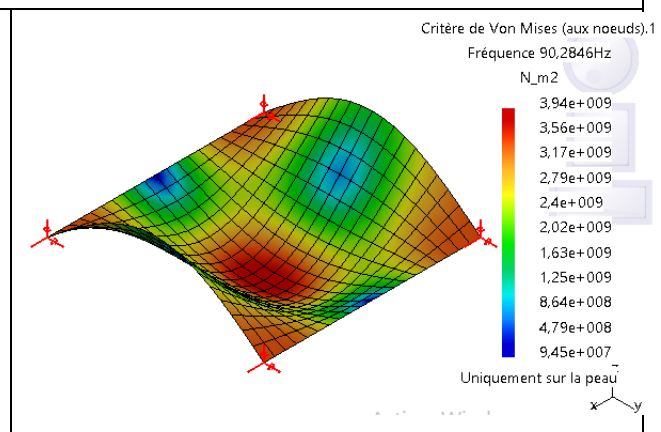
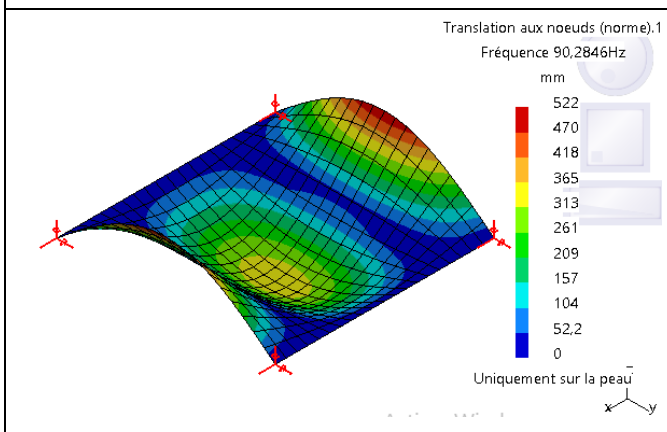
Le champ de contraintes



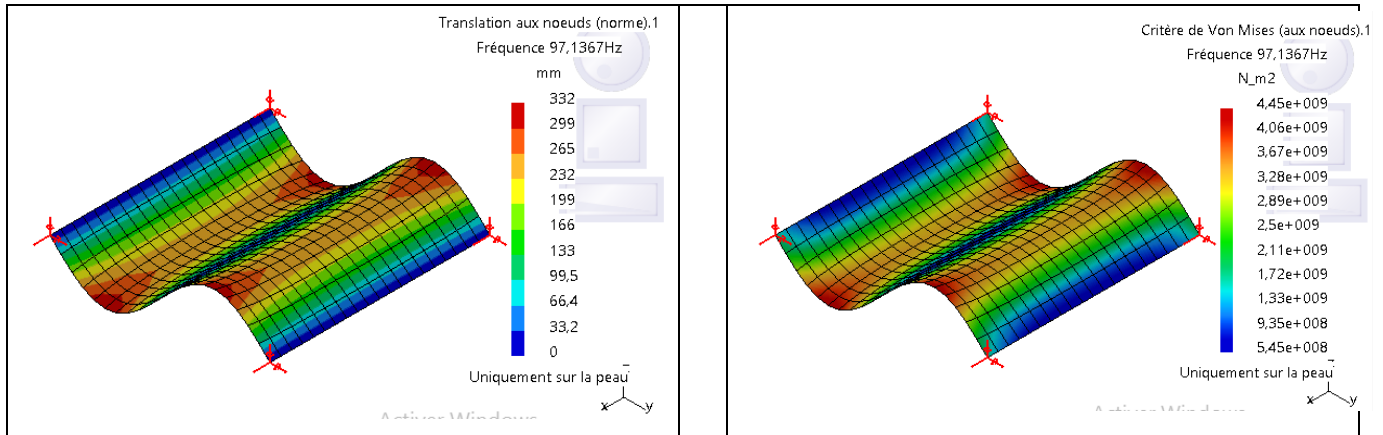
Mode 1 Fr=23.7895Hz



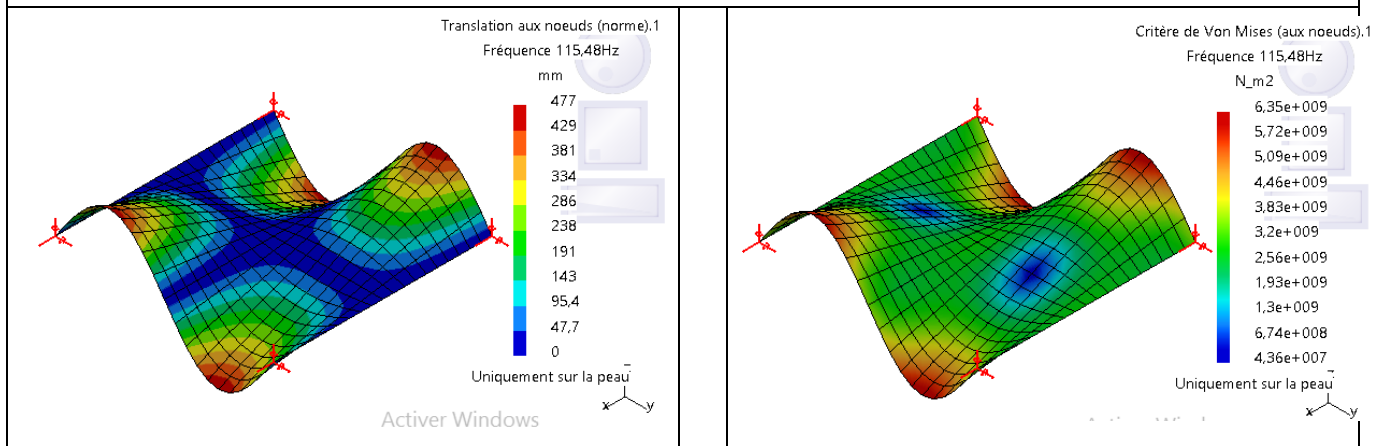
Mode 2 Fr=39.2537Hz



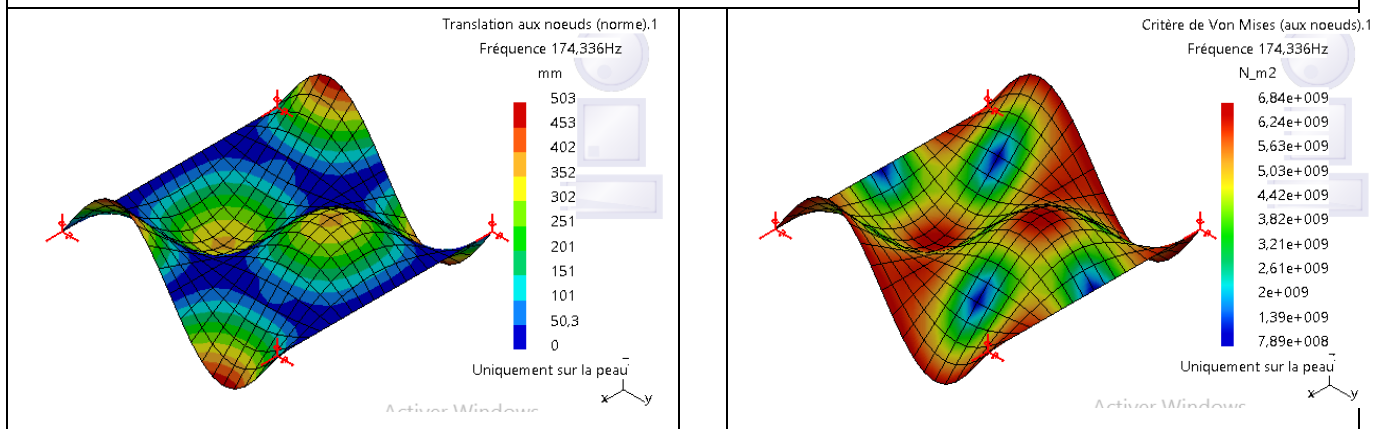
Mode 3 Fr=90.2846Hz



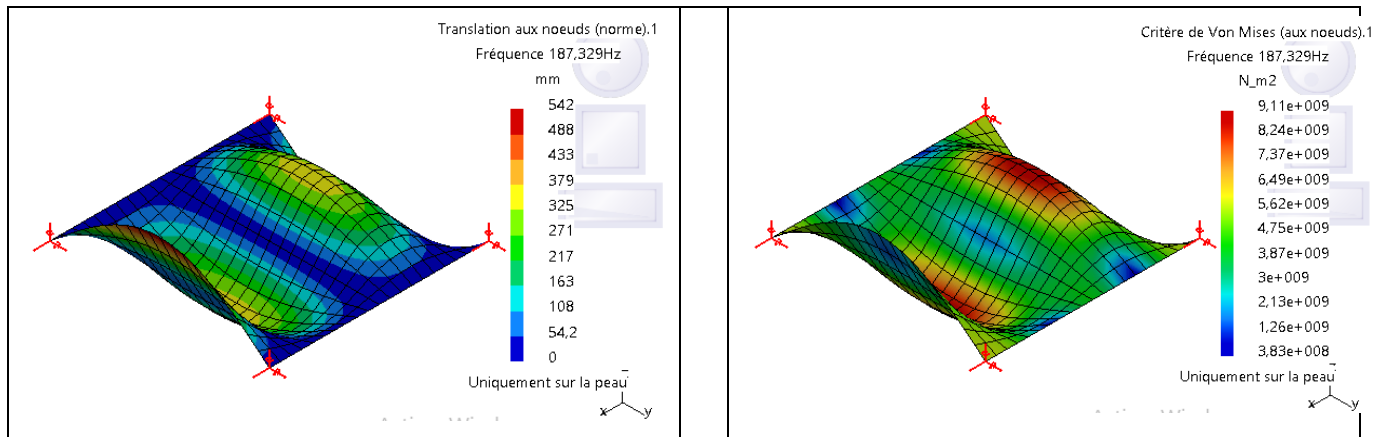
Mode 4 $Fr=97.1367\text{Hz}$



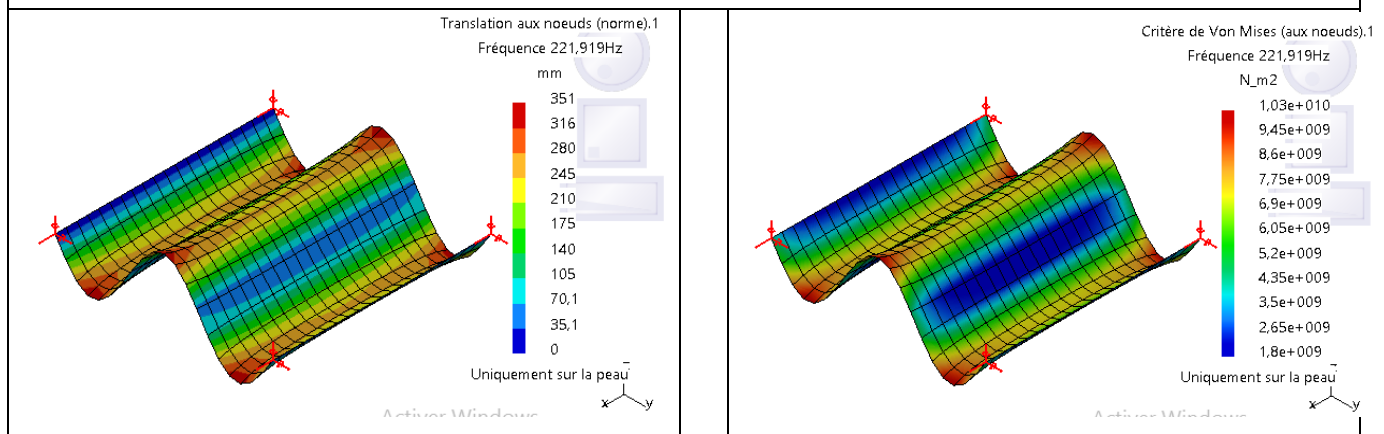
Mode 5 $Fr=115.48\text{Hz}$



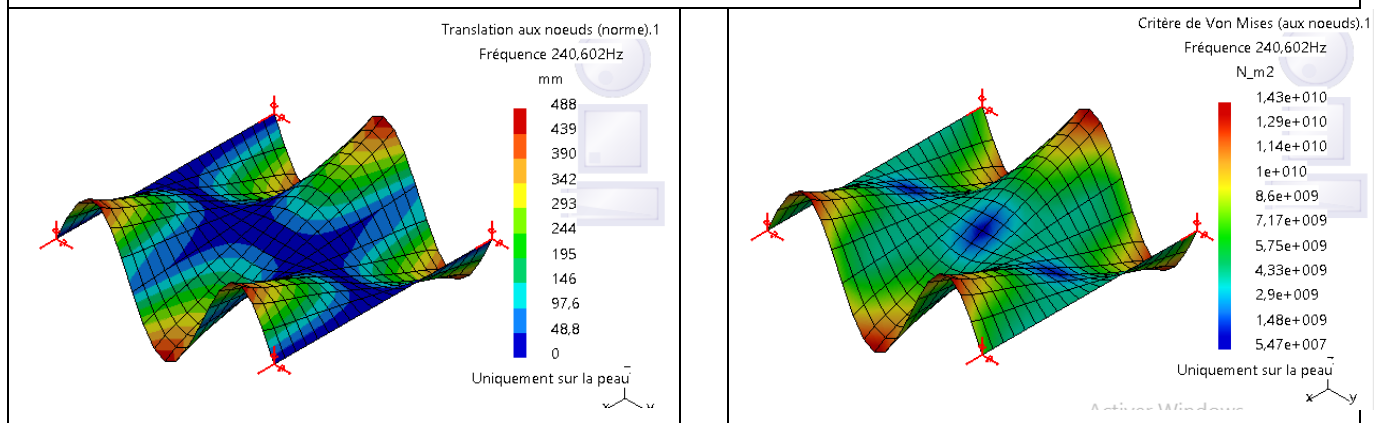
Mode 6 $Fr=174.336\text{Hz}$



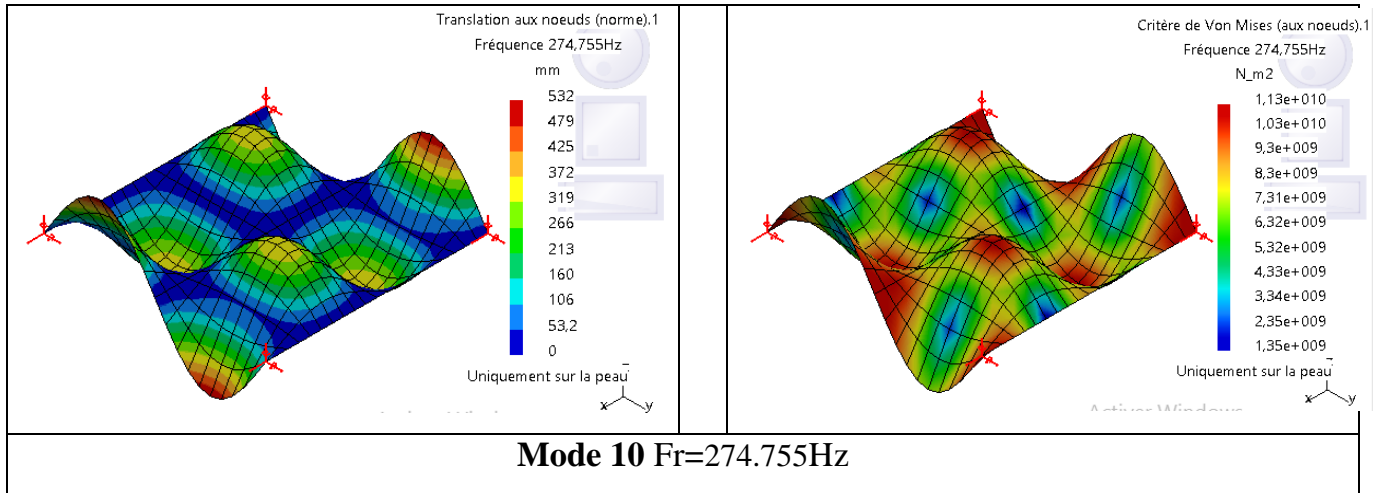
Mode 7 Fr=187.329Hz



Mode 8 Fr=221.919Hz



Mode 9 Fr=240.602Hz



4.6.2.2 Plaque en bronze

Résultats

Number of modes	Frequency (Hz)			
1	16.4794			
2	27.2302			
3	62.5529			
4	67.2577			
5	80.0212			
6	120.789			
7	129.691			
8	153.628			
9	166.644			
10	190.296			

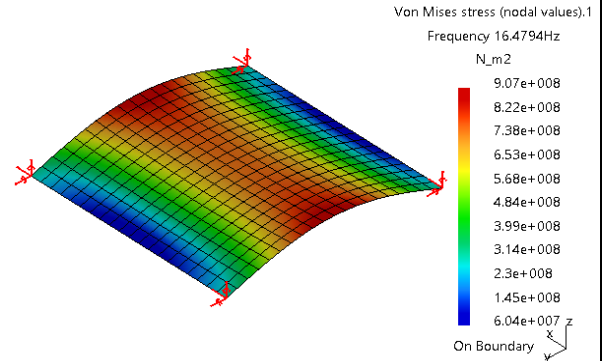
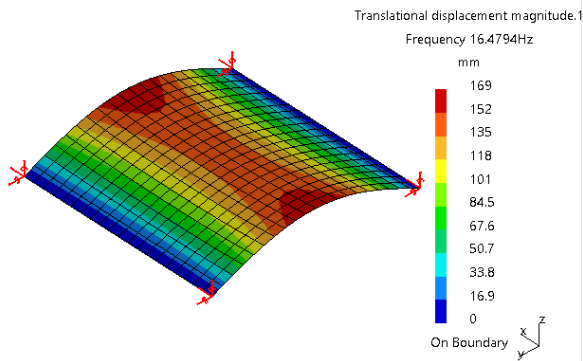
Les modes

Tablau4.10 Les déformées de la plaque bi-articulée (liaison pivot) sur deux côtés opposés

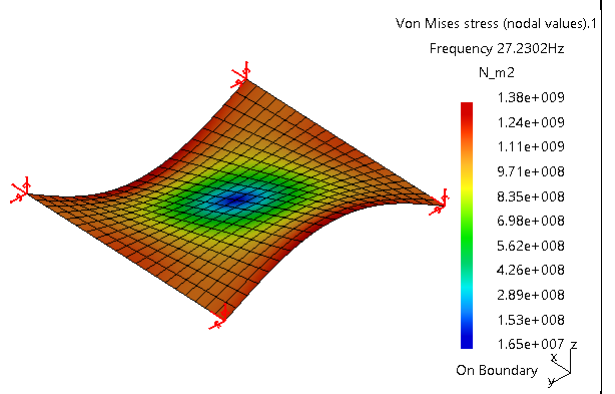
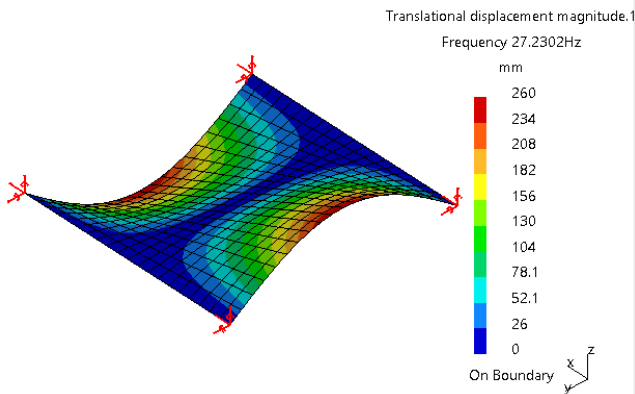
Le champ de déplacements et le champ de contraintes

Le champ de déplacement

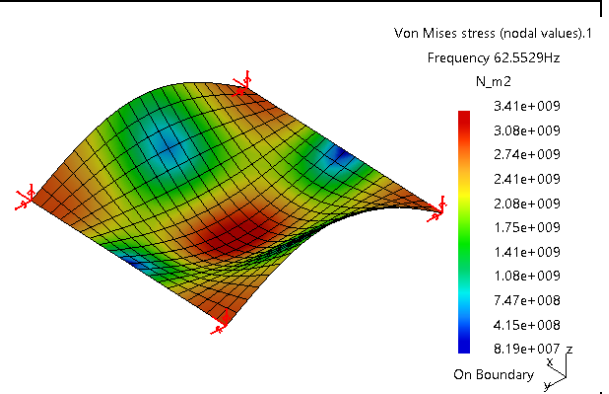
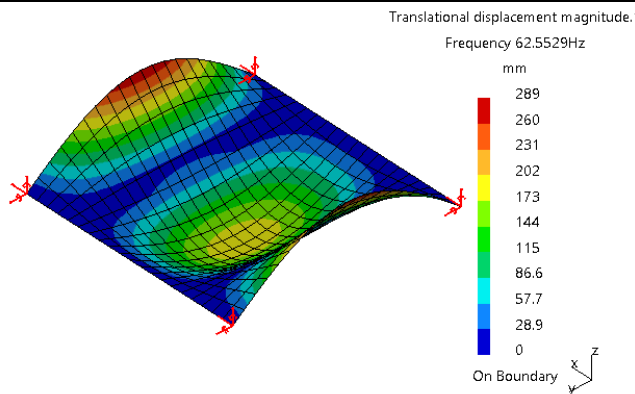
Le champ de contraintes



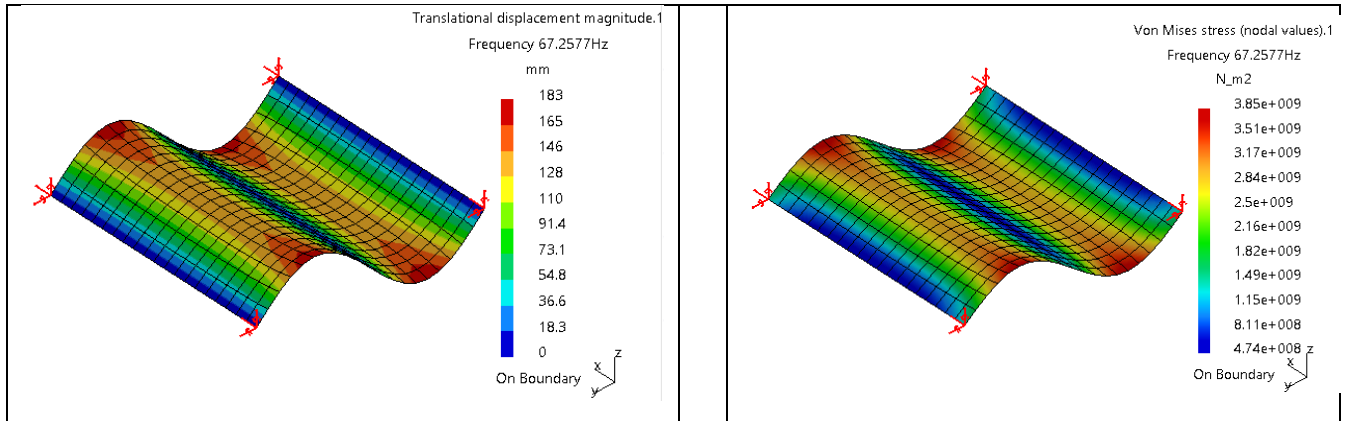
Mode 1 Fr=16.4794Hz



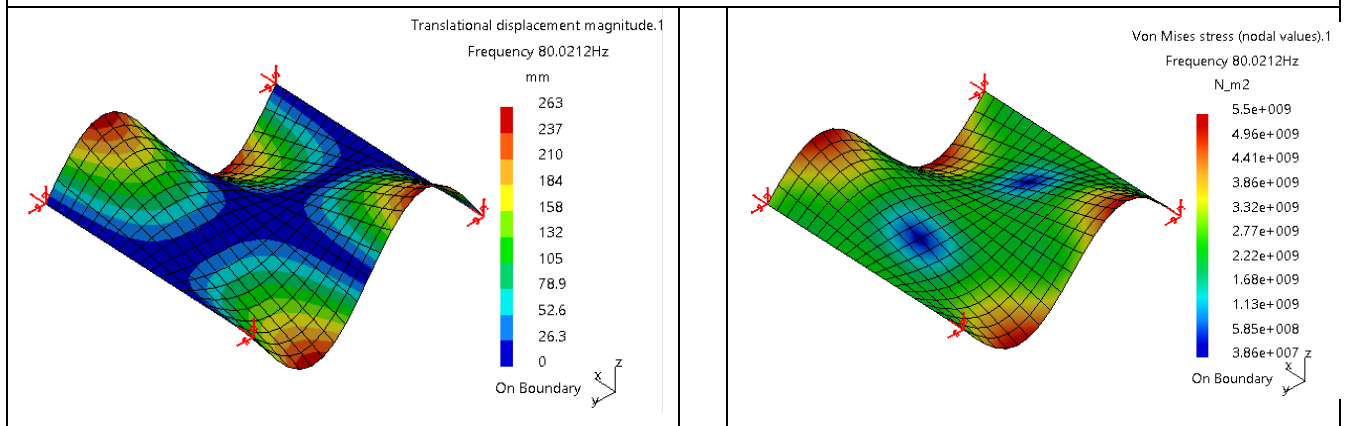
Mode 2 Fr=27.2302Hz



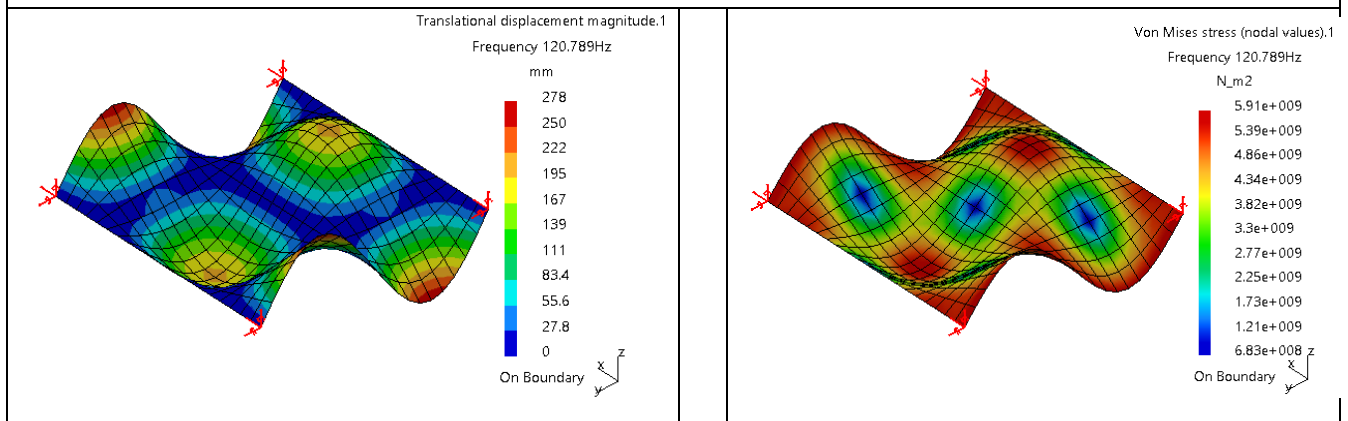
Mode 3 Fr=62.5529Hz



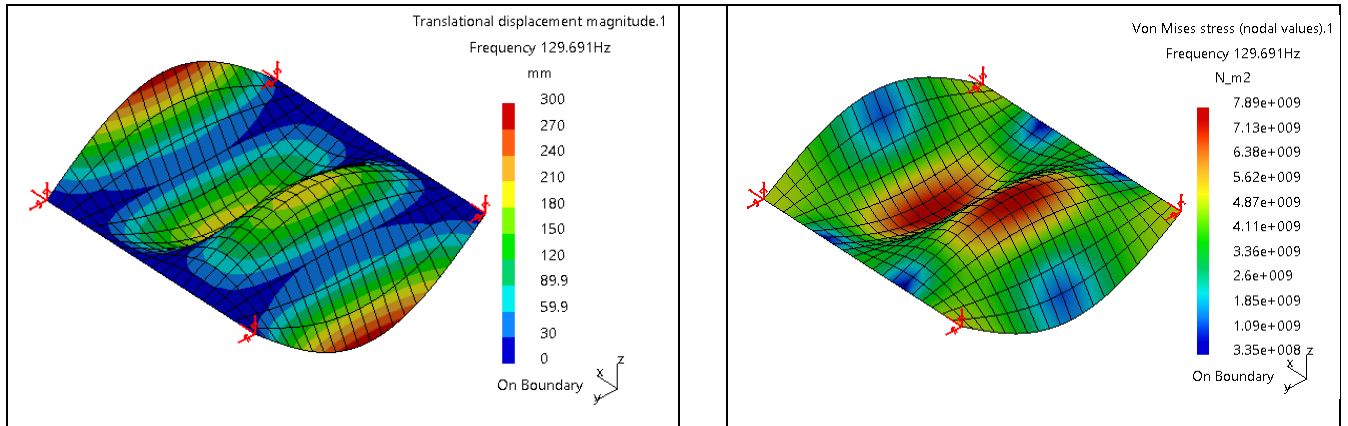
Mode 4 Fr=67.2577Hz



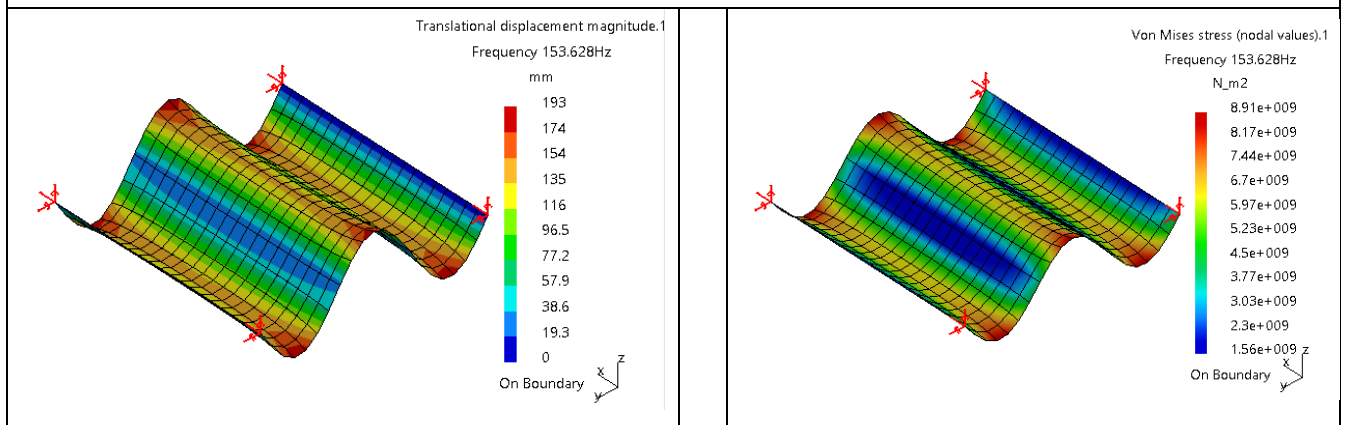
Mode 5 Fr=80.0212Hz



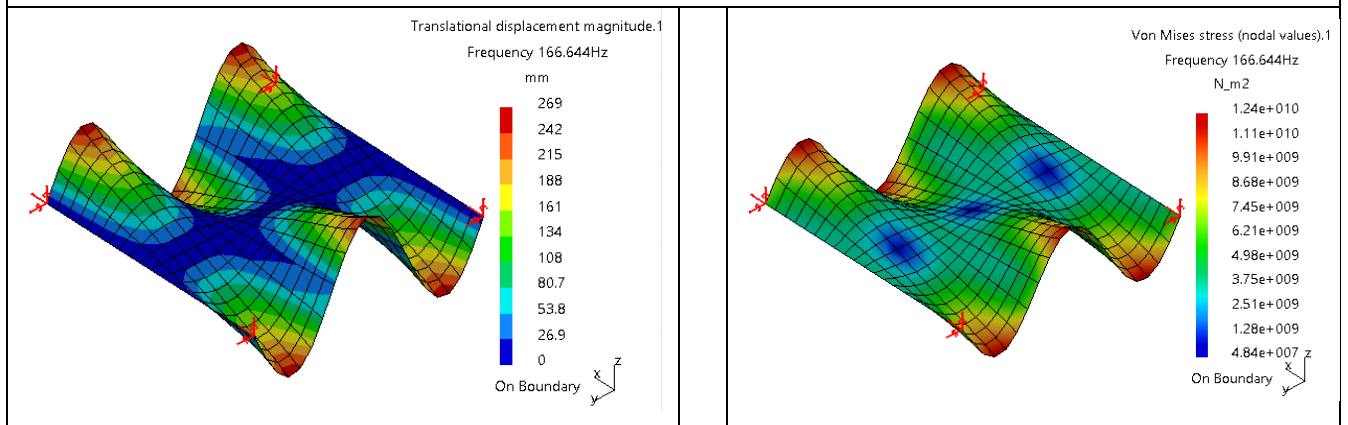
Mode 6 Fr=120.789Hz



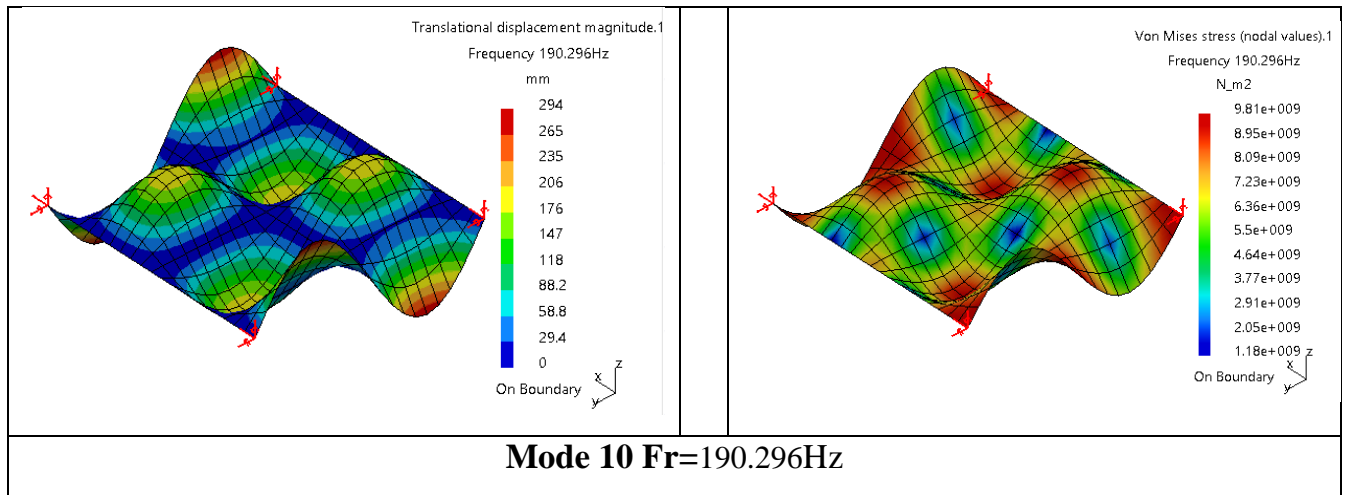
Mode 7 Fr=129.691Hz



Mode 8 Fr=153.628Hz



Mode 9 Fr=166.644Hz



4.7 Comparaison et discussion des résultats

N° Mode	Cas (B) Plaque en aluminium			Cas (C) Plaque en bronze			Cas (D) Plaque en aluminium			Cas (E) Plaque en bronze		
	Encastrement sur un coté						Bi articulation (liaison pivot) sur deux cotés opposés)					
	Fréq Hz	Dép mm	Cont. MPa	Fréq Hz	Dép mm	Cont. MPa	Fréq Hz	Dép mm	Cont. MPa	Fréq Hz	Dép mm	Cont. MPa
1	8.59546	389	4.78E+08	5.95089	215	4.14E+08	23.7895	306	1.05E+09	16.4794	169	9.07E+08
2	20.601	564	1.28E+09	14.2949	312	1.12E+09	39.2537	471	1.59E+09	27.2302	260	1.38E+09
3	52.3804	483	3.09E+09	36.3011	267	2.67E+09	90.2846	522	3.94E+09	62.5529	289	3.41E+09
4	67.268	695	3.98E+09	46.5807	383	3.46E+09	97.1367	332	4.45E+09	67.2577	183	3.85E+09
5	75.599	584	4.97E+09	52.42	323	4.31E+09	115.48	477	6.35E+09	80.0212	263	5.50E+09
6	132.376	555	8.42E+09	91.7753	307	7.31E+09	174.336	503	6.84E+09	120.789	278	5.91E+09
7	153.221	507	7.18E+09	106.061	279	6.22E+09	187.329	542	9.11E+09	129.691	300	7.89E+09
8	158.75	636	1.03E+10	110.001	351	8.97E+09	221.91	351	1.03E+10	153.628	193	8.91E+09
9	176.598	749	1.26E+10	122.281	413	1.09E+10	240.602	488	1.43E+10	166.644	269	1.24E+10
10	229.229	646	1.14E+10	158.811	357	9.90E+09	274.755	532	1.13E+10	190.296	294	9.81E+09

Tabl.4.11 Comparaison et discussion des résultats

4.7.1 Cas d'une plaque en aluminium et une plaque en bronze

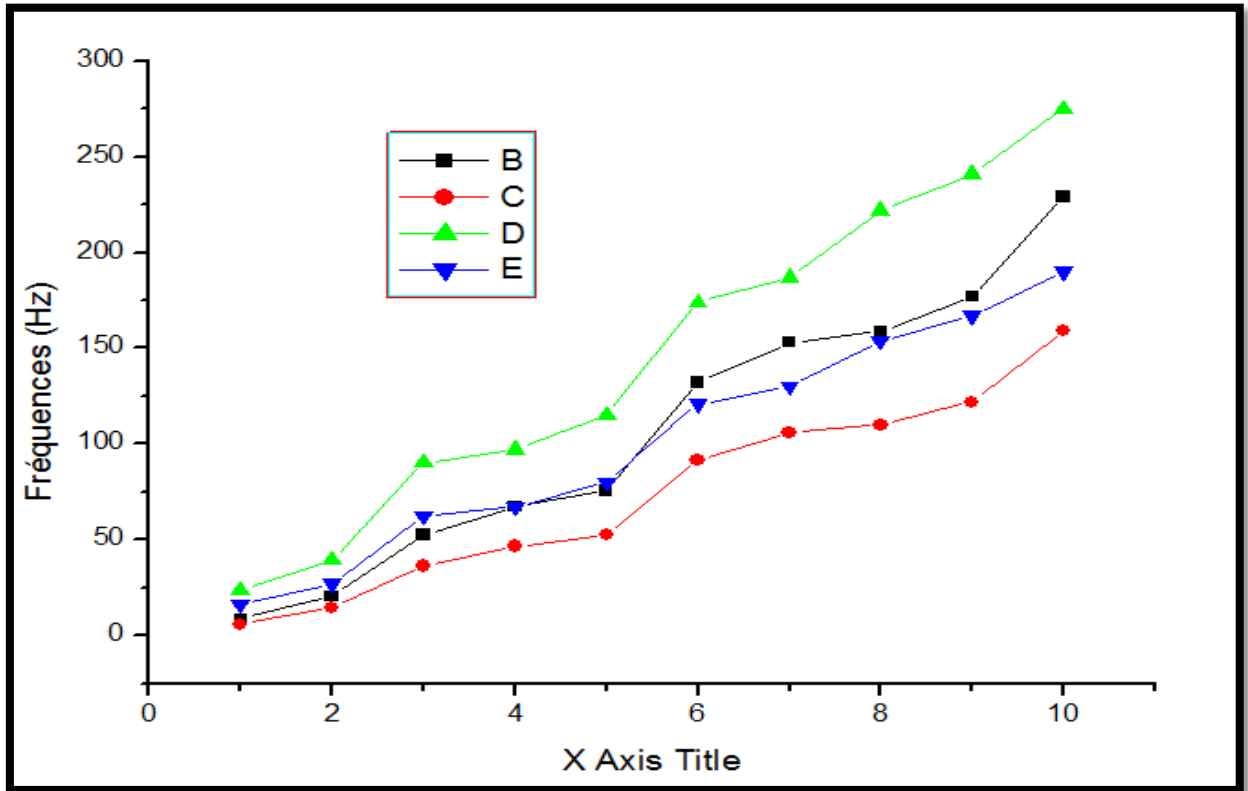


Figure4.8 : Fréquences en fonction du numéro des modes

Plaque en aluminium : (B) Encastrement sur un côté, (D) bi articulée sur deux côtés opposés

Plaque en bronze : (C) Encastrement sur un côté, (E) bi articulée sur deux côtés opposés

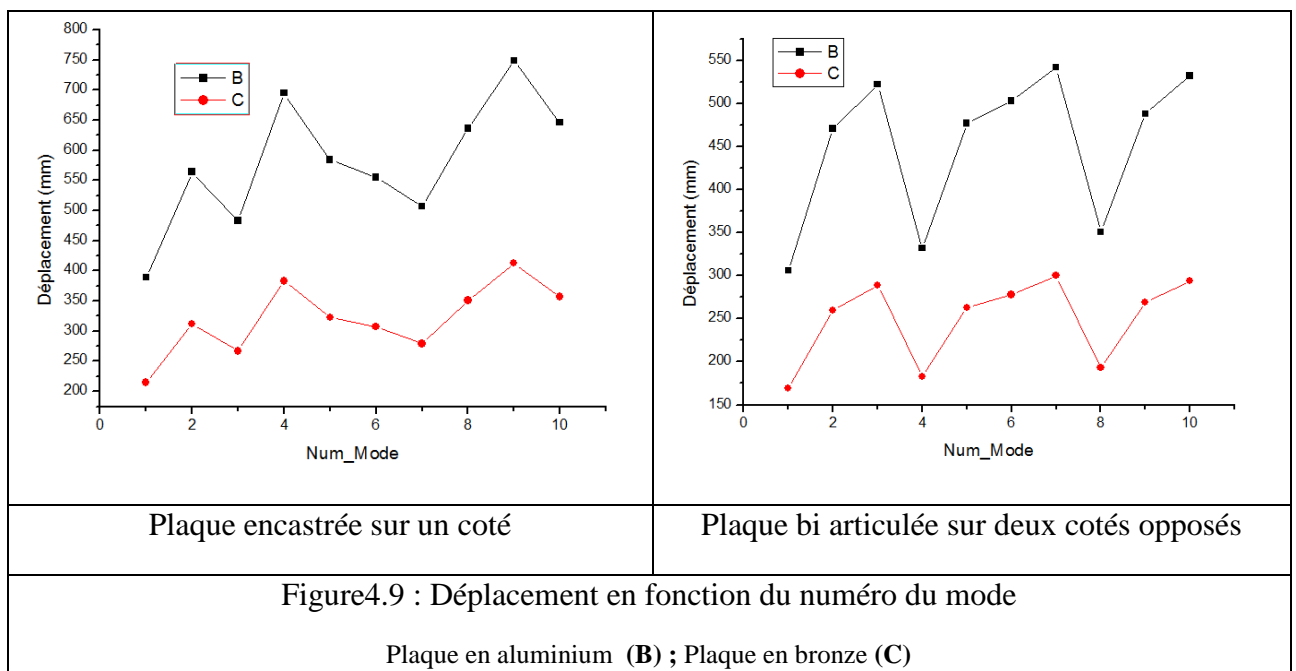
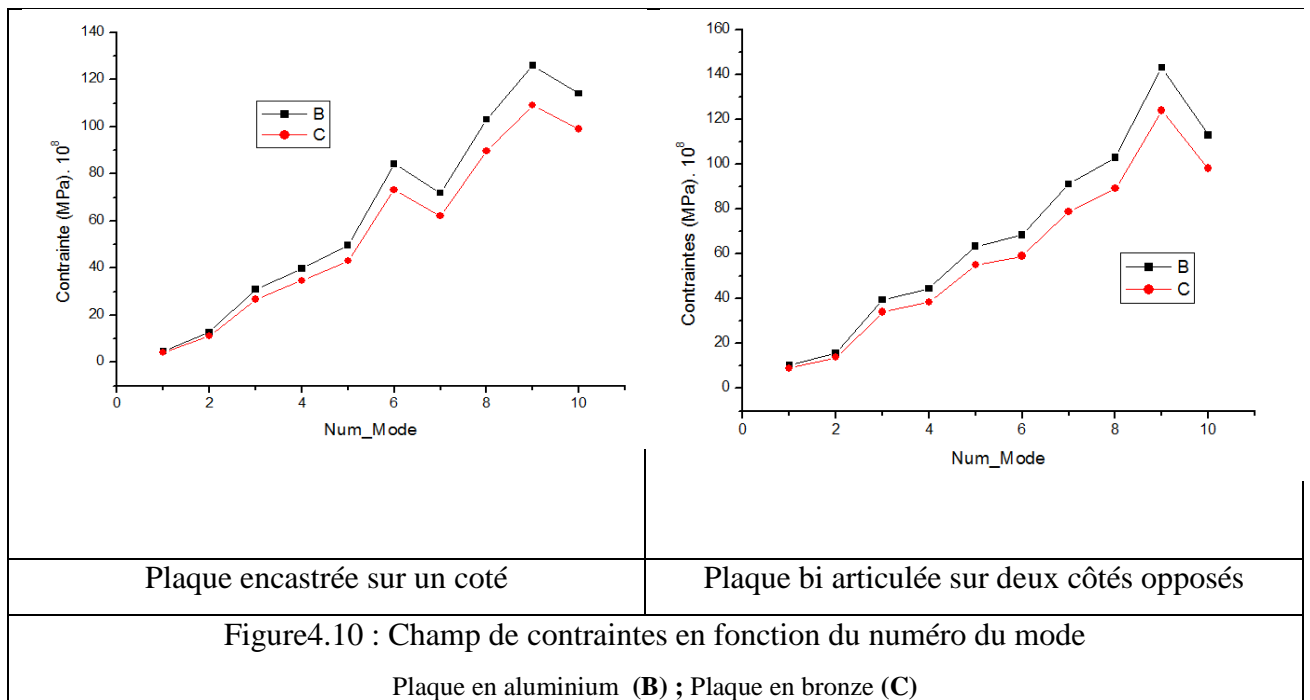


Figure4.9 : Déplacement en fonction du numéro du mode

Plaque en aluminium (B) ; Plaque en bronze (C)



4.7.2. Cas d'une plaque en acier et une plaque en bronze

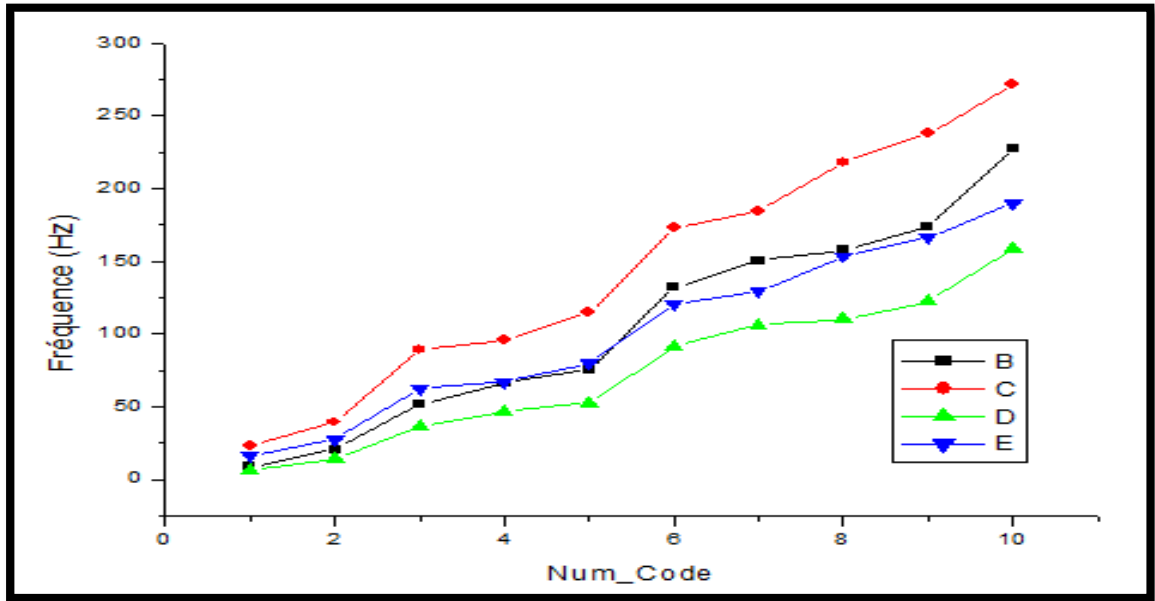
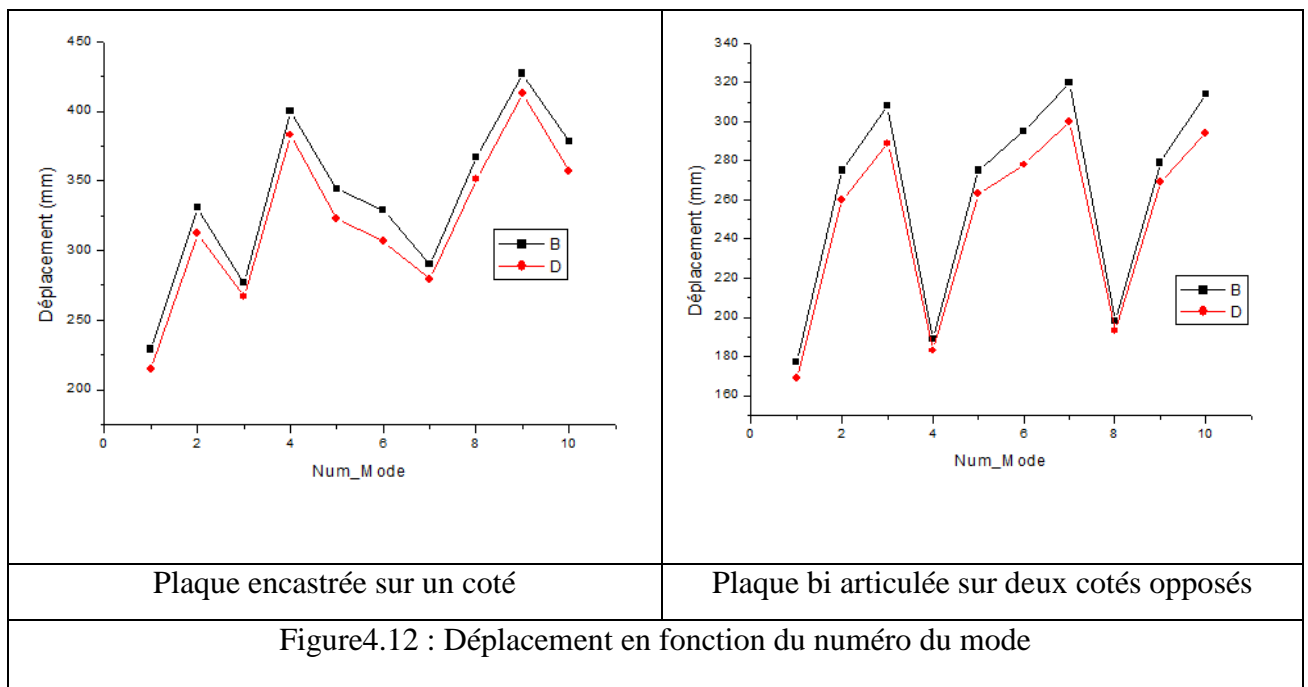


Figure4.11 : Fréquences en fonction du numéro des modes

Plaque en acier : (B) Encastrement sur un coté, (D) bi articulée sur deux cotés opposés

Plaque en bronze : (C) Encastrement sur un coté, (E) bi articulée sur deux cotés opposés

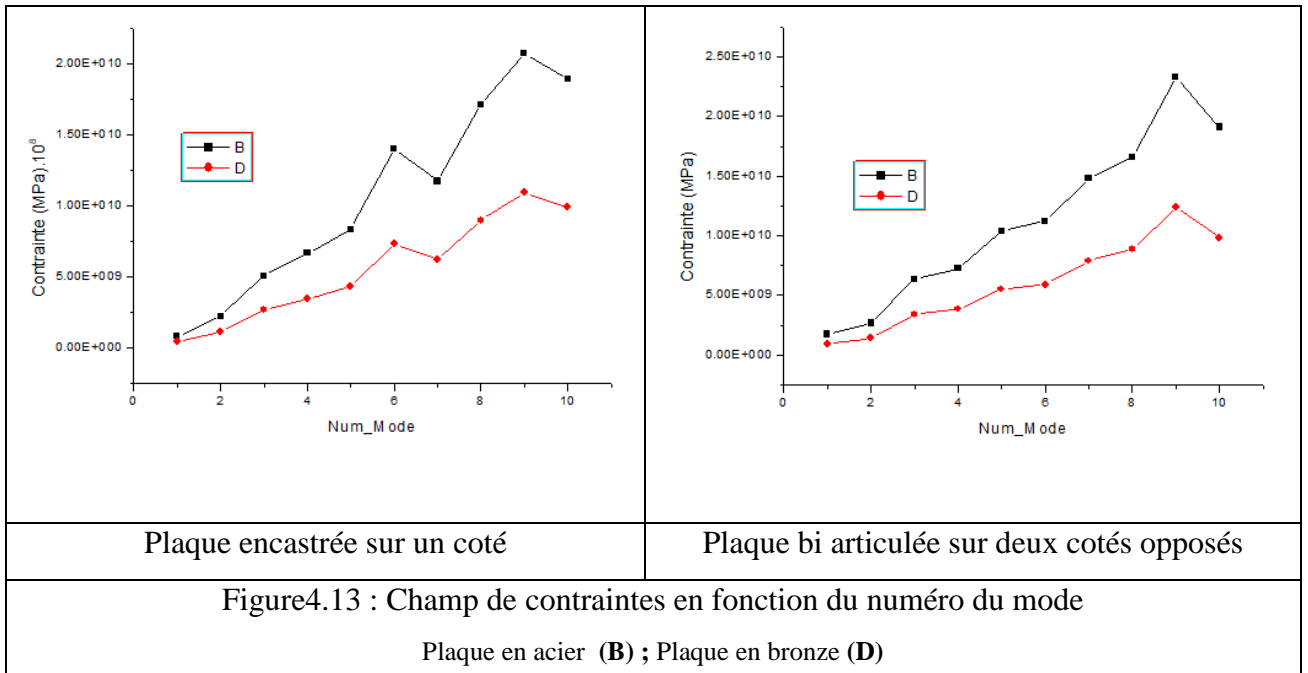


Plaque encastree sur un coté

Plaque bi articulée sur deux cotés opposés

Figure4.12 : Déplacement en fonction du numéro du mode

Plaque en acier (B) ; Plaque en bronze (D)



On remarque d’après les résultats obtenus ci-dessus que la structure la plus résistante selon les deux modes de liaison est celle en bronze.



Conclusion

Général

Conclusion générale

D'après les différentes combinaisons de mode d'appuis d'une plaque carrée qui assure à chaque fois les conditions aux rives correspondantes aux bords ainsi que la simulation de la plaque, au premier lieu avec des caractéristiques du matériau invariables mais seules changent les conditions aux limites on finit à déterminer que la plaque résiste en contraintes et en déplacement dans le cas d'un encastrement sur un coté et au cas bi-articulé sur deux cotés opposés.

En outre on conclut qu'une plaque en bronze résiste mieux qu'une plaque en acier i.e. une plaque vibrante lourde résiste en contraintes et en déplacement plus qu'une plaque légère.

A decorative scroll graphic with the word 'Bibliographie' written on it. The scroll is light gray with a black outline and is positioned in the center of the page. The word 'Bibliographie' is written in a bold, black, serif font with a white outline and a drop shadow effect. The scroll has a vertical strip on the left side and a small circular detail on the top right corner. The entire page is framed by a thick gray border with small square and triangular markers at the corners.

Bibliographie

Bibliographie :

- [1] Fortas lahcéne «Formulation isoparamétrique des éléments finis à champs de déformation»,fortas lahcéne ,Mémoir de magistère en génie civil,Université Mohemed khider 2014,Biskra
- [2] Yves Debard ,« Méthode des éléments finis élasticité plane », université de Mans, 2011,France.
- [3] Michel Cazenave,« Méthode des éléments finis », DUNOD 2010, France.
- [4] Antoine Legacy « Calcul des structures par éléments finis », Cnam , 2017, France.