الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عباس لغرور خنشلة
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR- KHENCHELA

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Mathématiques & Informatique

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées

Etude de certaines classes d'équations fonctionnelles émanant de la programmation dynamique

Diredteur de mémoir :
Dr. Hichem RAMOUL **M.C.A**

Réalisé par :
Ahlam KHERGAG
Khadidja DJEBAILI

Présenté le 03/07/2019

Devant le Jury :

Ms. Mourad BOUSSAADA	**Président**
Mlle. Djamila CHERGUI	**Examinateur**

DÉDICACE

Je dédie ce travail à...

Mes grands-parents, tante Nadia et oncle Kamal, qui ont œuvré pour mon succès dans leur amour et leur soutien pour moi, ainsi que pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis et leurs précieux conseils.

Mes parents , qui peut être fier et qui trouve ici grâce à de nombreuses années de sacrifices et de difficultés pour m'aider à avancer dans la vie. Dieu produit ce travail qui est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation. .

Merci pour vos valeurs nobles, votre éducation et votre soutien continu de votre part.

Mes sœurs et frères : « Nariman ,Nassira,Mihoub,Sife Addin».

Je vous dédie ce travail avec tous vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A tous mes oncles et tantes «Abde el ouahab , Nabila, Rabia».

Mes professeurs surtout : «Hacene Lechekhab et Bachir Moussaoui», qui doivent voir dans ce travail la fierté de connaissances bien acquises.

A La grand-mère : «El aalia »,malgré sa séparation,qui reste toujours dans mon cœur.

A toutes mes copines : « Rahma,Aicha,Samira »,et chère : «Hadia».

A toute mes amis et collègues de promotion.

A tout la famille Djebaili et Rouidjel

A mon binôme : « Ahlem ».

A tous qui aime KHADIDJA et tous que KHADIDJA aime.

K.HADIDJA

DEDICACE

A la lumière de mes jours,ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.
A mon soutien moral et matériel,ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation. ; papa « Djamel ».

Ames grand péres et grand méres.
A mes sœurs : « Chaima,Karima,Bassair».

A mes frères :« Adel,Naim,,Abdelnour».

A tout mes ouncles et tantes surtout : « Mouhamed,Ibramine,Ahmedamine,Lamine,Somia,Nadjma,Imane ».

Amon bougeone de ma famille : « Mouslam,Duaa,Abdzlaali,Tayab,Hiba,Jonaid,Athina,Qusai ».
A toutes mes copines : « Sara,Amina,Dounya,Sakina,Imane,Asya,Layla».
A mon amie, et mon binôme : « Khadidja».
A toute ma grande famille : « Ben Othmane ».

Ahlem

Remerciements

*Nous remercions **Dieu** de nous avoir donné le courage, la santé,*

patience et courage de finir ce mémoire.

*Nous tenons à remercier notre directeur de mémoire : **Dr. Hichem RAMOUL** qui n'a pas hésité de nous apporter main forte en nous guidant avec ses précieux conseils et remarques.*

Il nous a été d'une grande utilité et il fait preuve d'une grande humilité, modestie et grâce à ses efforts ce travail a fini par voir la lumière.

*Un grand merci **à Ms. BOUSSAADA Mourad** pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider ce jury.*

*Nos profonds remerciements vont aussi **à Mlle Djamila CHERGUI***

d'avoir accepter d'examiner ce travail.

Nous tenons à remercier l'université

***Abbes Laghror-Khenchela-** surtout les enseignants des mathématiques qui ont laissé leur trace sur notre cursus universitaire.*

Enfin, nous remercions toute personne qui a participé, de près ou de loin à réaliser ce mémoire

Abstract

This memoir is devoted to study properties of solutions for some
functional equations arising in dynamic programming.
Utilizing θ-contractions in b-metric spaces , Banach
fixed point theorem and iterative algorithms,
we prove the existence, uniqueness and iterative
approximations of solutions for the functional
equation in suitable Banach spaces.

.

Résumé

Ce mémoire est consacré à m'étude des propriétés de solutions
pour certaines équations émanant de la programmation dynamique.
En utilisant les θ-contractions dans des espaces b-métriques,
le théorème du point fixe de Banach et les algorithmes itératifs ,
nous prouvons l'existence , l'unicité et les approximations
itératives des solutions pour l'équation fonctionnelle
dans des espacesde Banach appropriés.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'une classe d'équations fonctionnelles émanant de la programmation dynamique. Ce genre de problèmes est d'actualité dans l'optimisation mathématique et présente plusieurs applications en informatique via la méthode algorithmique consistant à trouver une solution optimale à partir de solutions optimales de sous-problèmes. On propose ici deux approches, une première se basant sur des contractions généralisées et une seconde suscitant des espaces fonctionnels adéquats. Les deux approchent font appel à un outil très puissant de l'analyse fonctionnelle c'est la théorie du point fixe.

Le mémoire est organisé comme suit :
Le chapitre 1 est consacré à rappel sur les espaces b-métriques et les θ-contractions ainsi que quelques théorèmes indispensables pour mieux situer les différentes approches relatives à la théorie du point fixe.

Au chapitre 2, on démontre un résultat concernant les θ-contractions en affaiblissant les hypothèses par rapport aux résultats existants dans la littérature. A la fin du chapitre, on donne une application à une équation fonctionnelle provenant de la programmation dynamique.

Le chapitre 3 est destiné à étudier les propriétés d'une classe d'équations fonctionnelles dans des espaces fonctionnels adéquats. L'étude de l'existence, l'unicité et approximations itératives des solutions se fait dans l'espace des fonctions continues et bornées et via la contraction de Banach.

Le mémoire s'achève par une conclusion et des perspectives à envisager

Chapitre 1 Préliminaires

Résumé

Ce chapitre est dédié essentiellement à un rappel sur les notions principales des espaces b-métriques et leurs propriétés ainsi qu'à la notion de θ-contraction. Quelques théorèmes du point fixe concernant les contractions usuelles telle que la contraction de Kannan sont introduits pour mieux situer les éventuelles généralisations autour des θ-contractions (cf. [C :93] et [K :69]).

1.1 Espace b-métrique

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application $d : X\times X$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

(a) $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

(b) $d(x,y)=d(y,x)$

(c) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

Le couple (X,d) est appelé un espace métrique.

Définition 1.1.2. Soit X un ensemble non vide et $s\geq 1$ un nombre réel donné.
Une fonction $\sigma : X\times X \longrightarrow [0,\infty[$ est dite b-métrique si elle satisfait pour tout $x,y,z\in X$
(σ_1) $\sigma\left(x,y\right)=0$ si seulement si $x=y$;
(σ_2) $\sigma\left(x,y\right)=\sigma\left(y,x\right)$;
(σ_3) $\sigma\left(x,z\right)\leq s\left[\sigma\left(x,y\right)+\sigma\left(y,z\right)\right]$.
Le couple (X,σ) est appelé espace b-métrique de coefficient s .

Remarque 1.1.1. Si $s=1$, on retrouve l'espace métrique habituel.

Exemple 1.1.1. 1) Soit $X=l_p(\mathbb{R})$ avec $0<p<1$ où $l_p(\mathbb{R})=\left\{\{x_n\}\subset\mathbb{R} : \sum\limits_{n-1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\right\}$.

Soit $d : X\times X\longrightarrow\mathbb{R}^+$ avec :

$$d(x,y)=\left(\sum_{n-1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{où } x=\{x_n\}, y=\{y_n\}.$$

Alors d est un espace b-métrique de coefficient $s=2^{\frac{1}{p}}$.

2) Soit $X=L_p([0,1])$ est l'espace de toutes les fonctions réelles $x(t)$, $t\in[0,1]$ telle que $\int_0^1|x(t)|^p<\infty$ avec $0<p<1$; Définie $d : X\times X\longrightarrow\mathbb{R}^+$ comme :

$$d(x,y)=\left(\int_0^1\left|x(t)-y(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors d est un espace b-métrique de coefficient $s=2^{\frac{1}{p}}$.

Exemple 1.1.2. Soit (X,d) un espace métrique, et $\rho(x,y)=\left(d(x,y)\right)^p$, où $p>1$ est un nombre réel. Alors (X,ρ) est espace b-métrique avec $s=2^{p-1}$.

Exemple 1.1.3. Soit $X=\mathbb{N}\cup[\infty]$ et soit $\sigma : X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ définit par

$$\sigma(m,n)=\begin{cases} 0 & \text{Si} \quad m=n \\ \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| & \text{Si} \quad \text{un des } m,\ n \text{ est pair ou l'autre est pair ou } \infty \\ 5 & \text{Si} \quad \text{un des } m,\ n \text{ est impair, } m\neq n \text{ ou l'autre est impair ou } \infty \\ 2 & \text{Sinon} \end{cases}$$

On a

$$\sigma(m,n) \leq \frac{5}{2}\left[\sigma(m,n)+\sigma(n,p)\right] \quad \forall m,n,p \in X$$

alors (X,σ) est un espace b-métrique avec $s = \dfrac{5}{2}$.

Cet exemple montre aussi que la fonction b-métrique n'est pas toujours continue. En effet, si on prend $x_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(2n,\infty) = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ceci se traduit par $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} \infty$. Cependant $\sigma(x_n,1) = 2 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 5 = \sigma(\infty,1)$.

Définition 1.1.3. Soit (X,σ) un espace b-métrique, $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et $x \in X$.

i) La suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite b-convergente en (X,σ) vers x si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n > n_0 \;\; tel\ que \;\; : \sigma(x_n,x) < \varepsilon$$

ii) On dit que la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Cauchy dans (X,σ) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; tel\ que \;\; \sigma(x_n,x_{n+p}) < \varepsilon \;\; pour\ tout \;\; n > n_0 \;,\; p \in \mathbb{N}$$

iii) L'espace b-métrique (X,σ) est b-complet si :tout suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de cauchy dans X converge vers $x \in X$.

Lemme 1.1.1. *Soit (X,d) un espace b-métrique avec $s \geq 1$.Si une suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ est b-convergent, alors elle admet une limite unique.*

Lemme 1.1.2. *Soit (X,σ) un espace b-métrique et $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x_n,x_{n+1}) = 0$. Si $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite de b-Cauchy, alors il existe $\epsilon > 0$*

et deux suites $\left(m_{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$et $\left(n_{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de positif entiers tels que pour les quatre séquences suivantes

$$\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)}}) \;,\; \sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)+1}}) \;,\; \sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)}}) \;et\; \sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)+1}})$$

telle que

$$\epsilon \leq liminf_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)}})) \leq limsup_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)}})) \leq s\epsilon \tag{1.1}$$

$$\frac{\epsilon}{s} \leq liminf_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)+1}}))) \leq limsup_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)+1}}))) \leq s^2\epsilon \tag{1.2}$$

$$\frac{\epsilon}{s} \leq liminf_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)}})) \leq limsup_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)}})) \leq s^2\epsilon \tag{1.3}$$

$$\frac{\epsilon}{s^2} \leq liminf_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)+1}})) \leq limsup_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)+1}})) \leq s^2\epsilon \tag{1.4}$$

Démonstration. Si $\{x_n\}$ n ?est pas une suite de Cauchy,
alors il existe $\varepsilon > 0$ et$\{m_{(k)}\}$ et $\{n_{(k)}\}$ deux suites d ?entiers positifs tels que

$$n_{(k)} > m_{(k)} > k \quad , d(x_{m(k)}, x_{n(k)?1}) < \varepsilon, \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon \tag{1.5}$$

pour tous entiers positifs k. de (1.5) et en utilisant l'inégalité triangle nous avons

$$\varepsilon \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq s\left[d(x_{m(k)}, x_{n(k)?1}) + d(x_{n(k)?1}, x_{n(k)})\right] < s\varepsilon + sd(x_{n(k)?1}, x_{n(k)}) \tag{1.6}$$

passant à la limites supérieure et inférieure comme $k \longrightarrow \infty$ in (1.6), et en utilisant $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x_{n+1}) =$ 0, on obtient que

$$\varepsilon \leq \limsup_{k\longrightarrow\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq \liminf_{k\longrightarrow\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq s\varepsilon. \tag{1.7}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire , nous avons

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq s\left[d(x_{m(k)}, x_{n(k)?1}) + d(x_{n(k)?1}, x_{n(k)})\right] && (1.8)\\ &\leq s^2\left[d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})\right] + sd(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}) && (1.9)\\ & && (1.10)\end{aligned}$$

passant à la limites supérieure et inférieure comme $k \longrightarrow \infty$ in (1.6), et en utilisant $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, x_{n+1}) =$ 0et(1.7) , on obtient que

$$\varepsilon \leq s \limsup_{k\longrightarrow\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq s^3\varepsilon.$$

ou équivalent,

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \limsup_{k\longrightarrow\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq s^2\varepsilon.$$

Les deux conditions restantes du lemme peuvent être prouvées de la même manière ■

On rappelle ici quelques résultats qui vont faire l'objet de généralisations dans le chapitre qui va suivre :

Théorème 1.1.1 (Kannan)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet et T est une application de X dans X. On suppose qu'il existe une constante $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ telle que pour tout $x, y \in X$, on dit*

$$d(Tx, Ty) \leq \gamma\left(d(x, Tx) + d(y, Ty)\right).$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Théorème 1.1.2 (Samet, [S :15])**.** *Soit (X, σ) un espace b -métrique b -complet avec une constante $s \geq 1$ et T est une application de X ans X. On suppose qu'il existe une constante $\gamma \in \left]0, \frac{1}{s(s+1)}\right[$ telle que pour tout $x, y \in X$, on ait*

$$\sigma(Tx, Ty) \leq \gamma\left(\sigma(x, Tx) + \sigma(y, Ty)\right).$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

1.2 θ-contractions

Définition 1.2.1. Soit (X,d) un espace métrique. $T : X \longrightarrow X$ est un $\theta-contraction$, s'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$x,y \in X, d(Tx,Ty) \Longrightarrow \theta\left(d(Tx,Ty)\right) \leq \left[\theta\left(d(x,y)\right)\right]^k$$

où $\theta :]0,+\infty[\longrightarrow]1,+\infty[$ est une fonction vérifiant les conditions suivantes :

(Θ_1) θ est croissant.

(Θ_2) pour toit suite $\left(t_n\right)_n \subset]0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(t_n) = 1$ si $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

(Θ_3) $\exists\ r \in]0,1[$ et $\exists\ l \in]0,\infty[$ tel que $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\theta(t)-1}{t^r} = l$.

(Θ_4) θ est continue .

Lemme 1.2.1. *Soit* $\theta :]0,+\infty[\longrightarrow]1,+\infty[$ *une fonction croissante et continue avec* $\inf\limits_{t\in]0,+\infty[} \theta(t) = 1$ *et soit* $\left(t_k\right)_k$ *une suite de* $]0,+\infty[$ *. Alors la conclusion suivante est vraie :*

$$\lim_{k\to\infty} \theta(t_k) = 1 \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} t_k = 0$$

Exemple 1.2.1. On note $\tilde{\Theta}$ l'ensemble des fonctions $\theta :]0,+\infty[\longrightarrow]1,+\infty[$ satisfaisant les conditions suivantes

$(\theta_1)'$ θ est croissante et continue.

$(\theta_2)'$ $\inf\limits_{t\in]0,+\infty[} \theta(t) = 1$.

Les fonction suivantes appartiennent à $\tilde{\Theta}$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = e^{e^{-\frac{1}{t^p}}} \ , \ p > 0 \ ; \ \theta_2(t) = e^{\sqrt{t}} \ , \ t > 0 \\ \theta_3(t) = 1 + t \ , \ t > 0 \ ; \ \theta_4(t) = 2 - \dfrac{2}{\pi}\arctan(\dfrac{1}{t^\alpha}) \ , \ 0 < \alpha < 1 \ , \ t > 0. \end{cases}$$

Définition 1.2.2. On note Θ l'ensemble des fonctions $\theta :]0,+\infty[\longrightarrow]1,+\infty[$ satisfaisant aux conditions suivantes

(θ_1) θ est croissante.

(θ_2) pour toit suite $\left(t_n\right)_n \subset]0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(t_n) = 1$ ssi $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

(θ_3) θ est continue .

Théorème 1.2.1. *Soit* (X,d) *un espace b-métrique b-complet avec* $s > 1$,*et soit* f *une fonction* $\alpha - admissible$ *triangle.Supposons qu'il existe* $\theta \in \Theta$ *et* $k \in]0,1[$ *tels que*

$$\frac{1}{2}d(x,fx) \leq d(x,y) \Longrightarrow \alpha(x,y)\theta\left(s^2 d(fx,fy)\right) \leq \theta\left[\left(M(x,y)\right)\right]^k, \forall x,y \in X \quad avec \quad fx = fy,$$

où

$$M(x,y) = max\left\{d(x,y), \frac{d(x,fx)d(x,fy)+d(y,fy)d(y,fx)}{1+s\left[d(x,fx)+d(y,fy)\right]}, \frac{d(x,fx)d(x,fy)+d(y,fy)d(y,fx)}{1+d(x,fy)+d(y,fx)}\right\}$$

Aussi, supposons que on a :

(i) $\exists\ x_0 \in X$ *tel que* $\alpha(x_0, fx_0) \geq 1$

(ii) pour toute suite $\left(x_n\right)_n$ *dans* X *avec* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1, \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *tel que* $x_n \longrightarrow x$ *quand* $n \longrightarrow \infty$ *,on a* $\alpha(x_n, x) \geq 1;\ \ \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Alors f *admet un point fixe.*

Chapitre 2 Etude d'une équation fonctionnelle via une contraction généralisée

Résumé

L'objet de ce chapitre est de donner un résultat d'existence et d'unicité pour une équation fonctionnelle émanant de la programmation dynamique. L'outil principal est de démontrer un résultat de point fixe concernant les $\theta-$ contractions. Ce résultat en question est une amélioration considérable des résultats antérieurs. L'étude de l'équation fonctionnelle est donnée à titre d'application des résultats obtenus pour les $\theta-$ contractions. (cf. [L :13] et [L :16]).

On démontre dans cette section un théorème du point fixe concernant les $\theta-$ contractions pour nous permettre à la fin d'étudier une équation fonctionnelle issue de la programmation dynamique

2.1 $\theta-$ Contraction généralisée de type Kannan

☛ On note $\mathbb{L}$ la famille de toutes les fonctions $\chi:(0,+\infty)\to(0,1)$ satisfaisant la propriété suivante :

$$\limsup_{t\to s^+}\chi(t)<1,\ \forall s\geq 0. \tag{H}$$

☛ on note aussi

$$\Lambda=\left\{\theta:(0,+\infty)\to(1,+\infty),\quad \theta \text{ strictement croissante}\right\}.$$

Définition 2.1.1. Soit (X,σ) un espace b-métrique avec une constante $s\geq 1$. Une application T de X dans lui même est dite θ-contraction généralisée de type Kannan s'il existe $\theta\in\Lambda$ et $\chi\in\mathbb{L}$ tels que

$$\sigma\left(Tx,Ty\right)>0\Rightarrow\theta\left(\sigma\left(Tx,Ty\right)\right)\leq\left[\theta\left(Q_T^{\sigma}\left(x,y\right)\right)\right]^{\chi(\sigma(x,y))} \tag{2.1}$$

pour tout $x,y\in X$, où $Q_T^{\sigma}\left(x,y\right)=\alpha\sigma(x,Tx)+\beta\sigma(y,Ty)$ avec $\alpha,\beta>0$, $\alpha+\beta<1$ et $\beta<\frac{1}{s}$.

Théorème 2.1.1. *Soit (X,σ) un espace b-métrique b-complet avec une constante $s\geq 1$ et $T:X\to X$ une θ-contraction généralisée de type Kannan. Alors T admet un point fixe unique.*

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire dans X. Soit $\{x_n\}$ la suite de Picard dont le terme initial est x_0, i.e., $x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.
S'il existe $n_0\in\mathbb{N}$, tel que $x_{n_0}=x_{n_0+1}$, alors x_{n_0} est un point fixe de T. D'où la preuve.
Si $x_n\neq x_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, i.e., $T^nx_0\neq T^{n+1}x_0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui entraîne

$$\sigma_n:=\sigma\left(x_n,x_{n+1}\right)=\sigma\left(T^nx_0,T^{n+1}x_0\right)=\sigma\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)>0.$$

Alors, en appliquant (2.1) avec $x=x_{n-1}=T^{n-1}x_0$ et $y=x_n=T^nx_0$, on trouve

$$\theta(\sigma(Tx_{n-1},Tx_n))\leq\theta(Q_T^{\sigma}(x_{n-1},x_n)^{\chi(\sigma(x_{n-1},x_n))}$$

Ou encore

$$\theta(\sigma_n)=\theta(\sigma(Tx_{n-1},Tx_n))\leq\theta(\alpha\sigma_{n-1}+\beta\sigma_n)^{\chi(\sigma_{n-1})} \tag{2.2}$$

Comme $\theta\in\Lambda$ et $\chi\in\mathbb{L}$, on obtient

$$\sigma_n<\alpha\sigma_{n-1}+\beta\sigma_n.$$

Ce qui entraîne

$$\sigma_n<\frac{\alpha}{1-\beta}.\sigma_{n-1}.$$

En vertu de $\alpha+\beta<1$, on obtient :

$$\sigma_n<\sigma_{n-1}. \tag{2.3}$$

Par conséquent $\{\sigma_n\}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs, donc elle converge vers un nombre réel $r \geq 0$, i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = r \geq 0. \tag{2.4}$$

Montrons à présent que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$.

On suppose le contraire, (i.e., $r > 0$). D'après (2.4), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\sigma_n > \frac{r}{2}, \quad \forall n > n_0.$$

D'autre part, en substituant (2.3) dans (2.2) et $\theta \in \Lambda$, on obtient

$$\begin{aligned}\theta(\sigma_n) &< \theta\big(\alpha.\sigma_n + \beta.\sigma_{n-1}\big)^{\chi(\sigma_{n-1})}\\ &< \theta\big((\alpha+\beta)\sigma_{n-1}\big)^{\chi(\sigma_{n-1})}\\ &< \theta\big(\sigma_{n-1}\big)^{\chi(\sigma_{n-1})}.\end{aligned}$$

Comme la condition (H) entraîne qu'il existe un $k \in]0,1[$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\chi(\sigma_n) \leq k$ pour tout $n \geq n_1$, donc itérativement, on obteint pour $\forall n > n_1$:

$$\begin{aligned}\theta(\sigma_n) \quad &< \left[\theta\left(\sigma_{n_1}\right)\right]^{\prod\limits_{i=n_1}^{n-1}\chi(\sigma_i)}\\ &< \left[\theta\left(\sigma_{n_1}\right)\right]^{k^{n-n_1}}.\end{aligned}$$

En posant $n_2 = max(n_0, n_1)$, on parvient à avoir pour $\forall n > n_2$:

$$\theta\big(\frac{r}{2}\big) < \theta(\sigma_n) < \left[\theta\left(\sigma_{n_1}\right)\right]^{k^{n-n_1}}. \tag{2.5}$$

on pose

$$A_n := \left[\theta\left(\sigma_{n_1}\right)\right]^{k^{n-n_1}}.$$

En passant à la limite $n \to +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} A_n = 1$. Comme $\theta\left(\frac{r}{2}\right) > 1$, ceci entraîne qu'il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que

$$A_n < \theta\left(\frac{r}{2}\right), \quad \forall n > n_3.$$

En notant $n_4 = \max(n_2, n_3)$, il s'ensuit que

$$\theta\left(\frac{r}{2}\right) < A_n < \theta\left(\frac{r}{2}\right), \quad \forall n > n_4.$$

D'où la contradiction. Il vient alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0. \tag{2.6}$$

On va montrer maintenant que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Supposant le contraire ; il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{q(n)\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres naturels tels que

$$p(n) > q(n) > n, \quad \sigma\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right) \geq \varepsilon, \quad \sigma\left(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}\right) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

En utilisant (2.6) et les hypothèses de notre théorème, il existe $n_5 \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n > n_5$

$$\begin{aligned} \sigma\left(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}\right) &< \frac{\varepsilon}{sP_s}, \\ \sigma\left(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}\right) &< \frac{\varepsilon}{sP_s}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

où

$$P_s := 1 + s + (\alpha + \beta) s.$$

Pour appliquer notre contraction, on a besoin de vérifier que

$$\sigma\left(Tx_{p(n)}, Tx_{q(n)}\right) = \sigma\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right) > 0, \quad \forall n > n_5. \tag{2.9}$$

On suppose le contraire ; il existe $m > n_5$ tel que

$$\sigma\left(x_{p(m)+1}, x_{q(m)+1}\right) = 0. \tag{2.10}$$

En utilisant (σ_3), il vient via (2.7), (2.8) et (2.10), que

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \sigma\left(x_{p(m)}, x_{q(m)}\right) \\ &\leq s\sigma\left(x_{p(m)}, x_{p(m)+1}\right) + s^2\sigma\left(x_{p(m)+1}, x_{q(m)+1}\right) + s^2\sigma\left(x_{q(m)+1}, x_{q(m)}\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{P_s} + \frac{s\varepsilon}{P_s} \\ &= \frac{(s+1)\varepsilon}{P_s} \end{aligned}$$

pour $m > n_5$.

Ce qui implique que $\alpha + \beta < 0$, d'où la contradiction. Maintenant que (2.9) est valable, on applique (2.1) pour $x = x_{p(n)}$ et $y = x_{q(n)}$ et on a :

$$\theta\left(\sigma\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)\right) \leq \left[\theta\left(Q_T^{\sigma}\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right)\right]^{\chi\left(\sigma\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right)}, \quad \forall n > n_5. \tag{2.11}$$

En utilisant encore l'inégalité :

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \sigma\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right) \\ &\leq s\sigma\left(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}\right) + s^2\sigma\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right) + s^2\left(x_{q(n)+1}, x_{q(n)}\right). \end{aligned}$$

on obtient

$$\sigma\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right) > \frac{\varepsilon\left(\alpha + \beta\right)}{sP_s}, \quad \forall n > n_5. \tag{2.12}$$

En substituant dans (2.11), on a $\forall n > n_5$

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{\varepsilon\left(\alpha+\beta\right)}{sP_s}\right) &< \theta\left(\sigma\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)\right) \\ &\leq \left[\theta\left(Q_T^{\sigma}\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)\right)\right]^{\chi\left(\sigma\left(x_{p(n)}, x_{q(n)}\right)\right)} \\ &< \theta\left(Q_T^{\sigma}\left(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}\right)\right) \\ &< \theta\left(\frac{\varepsilon\left(\alpha+\beta\right)}{sP_s}\right). \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme (X,σ) est complet, $\{x_n\}$ converge vers z in X, *i.e.,* il existe $z \in X$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma(x_n, z) = 0. \tag{2.13}$$

On va démontrer à présent que z est le point fixe de T , (i.e) $Tz = z$. On suppose le contraire $Tz \neq z$, (i.e) $\sigma(Tz,z) > 0$. On a alors via (2.6), il existe $n_6 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sigma(x_n, z) < \frac{\sigma(z, Tz)}{2s}, \quad \forall n > n_6, \tag{2.14}$$

D'autre part, on a

$$\sigma(z, Tz) \leq s\sigma(z, Tx_n) + s\sigma(Tx_n, Tz). \tag{2.15}$$

Par conséquent, de (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(Tx_n, Tz) &\geq \frac{1}{s}(\sigma(z, Tz) - s\sigma(z, Tx_n)) \\ &> \frac{\sigma(Tz, z)}{2s} > 0, \quad \forall n > n_6. \end{aligned} \tag{2.16}$$

En appliquant maintenant la contraction (2.1), il vient que

$$\sigma(Tx_n, Tz) < \alpha\sigma(x_n, Tx_n) + \beta\sigma(z, Tz), \quad \forall n > n_6.$$

En substituant dans (2.15), on trouve

$$\sigma(z, Tz) < s\sigma(z, Tx_n) + \alpha s\sigma(x_n, Tx_n) + \beta s\sigma(z, Tz), \quad \forall n > n_6.$$

En passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient

$$\sigma(z, Tz) \leq \beta s\sigma(z, Tz) < \sigma(z, Tz),$$

qui est une contradiction (car $\beta < \frac{1}{s}$). D'où $Tz = z$.

Pour conclure ; montrons que z et un point fixe unique. on suppose le contraire ; i.e. ; $z, u \in X \;\; tq \;\; Tu = u \neq Tz = z$. Comme on a $\sigma(Tu, Tz) > 0$, la contraction (2.1), entraîne

$$0 < \sigma(u, z) < \alpha\sigma(Tu, u) + \beta\sigma(Tz, z) = 0.$$

D'où la contradiction. Ainsi z et un point fixe unique. ■

☛ On note $\mathscr{L}$ la famille de toutes les fonctions $\chi : (0, +\infty) \to (0, 1)$ satisfaisant la propriété suivante : pour chaque $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \chi(t_n) = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = 0 \tag{H'}$$

Proposition 2.1.1. *Si on change l'hypothèse (H) par (H'), le Théorème 2.1.1 reste toujours valable.*

Démonstration. En suivant la même démarche que dans le théorème ci-dessus, on a

$$\theta\left(\frac{r}{2}\right) < \theta(\sigma_n) < \left[\theta\left(\sigma_{n_0}\right)\right]^{\prod\limits_{i=n_0}^{n-1}\chi(\sigma_i)}, \quad \forall n > n_0$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = r > 0.$$

D'une manière analogue, on pose

$$B_n = \left[\theta\left(\sigma_{n_0}\right)\right]^{\prod\limits_{i=n_0}^{n-1}\chi(\sigma_i)}, \quad \forall n > n_0. \tag{2.17}$$

Comme $\sigma_n \nrightarrow 0$, la propriété (H) entraîne que $\chi(\sigma_n) \nrightarrow 1$. Le produit infini $\prod\limits_{i=n_0}^{+\infty} \chi(\sigma_i)$ est donc divergent et il diverge vers 0. En passant à la limite $n \to +\infty$ dans (2.17), on a

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = 1.$$

Le reste de la preuve est identiquement le même. ■

Remarque 2.1.1. Les résultats ci-dessus sont démontrés avec seulement la croissance de la fonction θ ; ce qui représente une originalité par rapport aux travaux existant dans la littérature.

Corollaire 2.1.1. *Soit (X,σ) un espace b-métrique b-complet avec une constante $s \geq 1$ et T une application de X dans X. On suppose qu'il existe une constante $\mu \in \left]0, \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{s}\right)\right[$, $\theta \in \Lambda$ et $\chi \in \mathbb{L}$ tels que pour tout $x, y \in X$, on ait*

$$\theta(\sigma(Tx, Ty)) \leq [\theta(\mu(\sigma(x, Tx) + \sigma(y, Ty)))]^{\chi(\sigma(x,y))}.$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Démonstration. Il suffit de poser dans le Théorème 2.1.1, $\mu = \alpha = \beta$. ■

Corollaire 2.1.2. *Soit (X,σ) un espace b-métrique b-complet avec une constante $s \geq 1$ et T une application de X dans X. On suppose qu'il existe une constante $\gamma \in \left]0, \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{s}\right)\right[$ telle que pour tout $x, y \in X$, on ait*

$$\sigma(Tx, Ty) \leq \gamma\left(\sigma(x, Tx) + \sigma(y, Ty)\right).$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Démonstration. Il suffit de poser dans le Corollaire précédent, $\theta(t) = e^t$, $\chi(t) = k \in]0,1[$ et $\gamma = k\mu$. ■

Remarque 2.1.2. Pour $s = 1$, Le Corollaire précédent entraîne immédiatement le théorème de Kannan (voir chapitre 1).

Remarque 2.1.3. Le Corollaire précédent est une amélioration du théorème de Samet (voir chapitre 1) car on a, pour $s \geq 1$,

$$\frac{1}{s(s+1)} \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{s}\right).$$

2.2 Application à une équation fonctionnelle

Dans cette section, on donne une application de nos résultats obtenus consistant à résoudre un problème d'optimisation mathématique. D'une manière plus précise, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une certaine équation fonctionnelle émanant de la programmation dynamique. Nous considérons donc le problème de trouver une fonctionnelle u telle que

$$u(x) = \sup_{y\in D}\left\{f(x,y) + G\left(x,y,u\left(\varphi(x,y)\right)\right)\right\}, \qquad x \in W, \tag{2.18}$$

où $f : W \times D \to \mathbb{R}$ et $G : W \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont bornées $\varphi : W \times D \to W$, avec W et D sont des espaces de Banach. W est dit espace d'état et D l'espace de décision.

Soit $X = B(W)$ l'espace des fonctions bornées à valeurs réelles sur W. Si on considère

$$\sigma(h,k) = \sup_{x\in W}|h(x) - k(x)|^p, \quad p \geq 1 \quad \text{pour tout } h,k \in X,$$

alors (X,σ) est un b-métrique b-complet avec une constante $s = 2^{p-1} \geq 1$.

Dans le but d'établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation fonctionnelle (2.18), on considère l'application $T : X \to X$ définie par

$$(Tu)(x) = \sup_{y\in D}\left\{f(x,y) + G\left(x,y,u\left(\varphi(x,y)\right)\right)\right\}, \quad \text{pour tout } u \in X, \quad x \in W. \tag{2.19}$$

Alors, le problème d'existence et d'unicité de la solution de (2.18) relève du problème d'existence et d'unicité du point fixe de (2.19). Il faut noter que T est bien définie puisque f et G sont bornées.

Notons

$$M(h,k) = \sigma(h,Th) + \sigma(k,Tk)$$

et $\tau : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ satisfaisant : pour toute $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,+\infty)$,

$$\lim_{t\to s^+}\inf \tau(t) > 0, \quad \text{pour tout } s \geq 0. \tag{2.20}$$

Théorème 2.2.1. *Soit $T : X \to X$ l'application définie par* (2.19). *On suppose qu'il existe $\gamma \in \left]0, \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^{p-1}}\right)\right[$ tel que*

$$\left|G\left(x,y,h\left(\varphi(x,y)\right)\right) - G\left(x,y,k\left(\varphi(x,y)\right)\right)\right| \leq \left[\eta_p(h,k)\,M(h,k)\right]^{\frac{1}{p}}$$

pour tout $x \in W, y \in D$ et $h,k \in X$ avec $\sigma(Th,Tk) > 0$ et

$$\eta_p(h,k) = \frac{\gamma e^{-\tau(\sigma(h,k))}}{2^{p-1}}, \quad p \geq 1.$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Démonstration. Soit λ un nombre réel strictement positif et $h, k \in X$. Alors il existe $y_1, y_2 \in D$ tels que

$$(Th)(x) < f(x, y_1) + G(x, y_1, h(\varphi(x, y_1))) + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2^{1-\frac{1}{p}}},$$

$$(Tk)(x) < f(x, y_2) + G(x, y_2, k(\varphi(x, y_2))) + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2^{1-\frac{1}{p}}},$$

On a aussi

$$(Th)(x) \geq f(x, y_2) + G(x, y_2, h(\varphi(x, y_2)))$$

et

$$(Tk)(x) \geq f(x, y_1) + G(x, y_1, k(\varphi(x, y_1))).$$

Ce qui implique

$$|(Th)(x) - (Tk)(x)| < \left|G(x, y, h(\varphi(x, y))) - G(x, y, k(\varphi(x, y)))\right| + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2^{1-\frac{1}{p}}}.$$

Par les hypothèses du Théorème 2.2.1, on a

$$|(Th)(x) - (Tk)(x)| < \left[\eta_p(h, k) M(h, k)\right]^{\frac{1}{p}} + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2^{1-\frac{1}{p}}}.$$

Alors, en utilisant $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \quad a, b > 0$, on obtient

$$|(Th)(x) - (Tk)(x)|^p < \gamma e^{-\tau(\sigma(h,k))} M(h, k) + \lambda.$$

Puisque $\lambda > 0$ est arbitraire, ceci implique

$$\sigma(Th, Tk) = \sup_{x \in W} |(Th)(x) - (Tk)(x)|^p \leq \gamma e^{-\tau(\sigma(h,k))} M(h, k).$$

On obtient alors

$$\theta(\sigma(Th, Tk)) \leq [\theta(\gamma(\sigma(h, Th) + \sigma(k, Tk)))]^{\chi(\sigma(h,k))}$$

avec $\theta(t) = e^t$, $\chi(t) = e^{-\tau(t)}$, $\forall t \in (0, +\infty)$ et $\gamma = \alpha = \beta$.

La preuve découle immédiatement du Corollaire 2.1.1.

■

Chapitre 3

Sur une équation fonctionnelle issue de la programmation dynamique

Résumé

Dans ce chapitre on étudie les propriétés (existence, unicité, approximations itératives) d'une équation fonctionnelle provenant de la programmation dynamique dans l'espace des fonction continues et bornées (cf. [L :13]).

3.1 Introduction et notations

Dans ce travail ; on définit $(X;\|.\|)$ et $(Y,\|.\|')$ Comme deux espaces de Banach. et $S\subseteq X$ et $D\subseteq Y$ deux ensembles de X et Y , opt est sup ou inf , On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres positives , $\mathbb{N}=\{0\}\cup\mathbb{N}$, $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$, $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^-=[-\infty,0[$
on définit :

$$B(S)=\{f:f:S\longrightarrow\mathbb{R}\quad \text{bornée}\},$$
$$BC(S)=\{f:f:S\in B(S)\quad \text{continue}\}.$$

C'est claire que $(B(S),\|.\|_1)$ et $(BC(S),\|.\|_1)$ sont des espaces de Banach menu par la norme .

$$\|f\|_1=\sup_{x\in S}\big|f(x)\big|.$$

Lemme 3.1.1. *Si $u:S\times D\longrightarrow\mathbb{R}$ et $M:S\longrightarrow\mathbb{R}$ sont tels que $|u(x,y)|\leq M(x)$ pour tout $(x,y)\in S\times D$, On a*

$$\max\{opt_{y\in D}|u(x,y)|,|opt_{y\in D}u(x,y)|\}\leq M(x),\quad \forall x\in S.$$

Lemme 3.1.2. *Soit E un ensemble , et p et q : $E\longrightarrow\mathbb{R}$ fonctions .*
Si $opt_{y\in E}p(y)$ et $opt_{y\in E}q(y)$ sont bornées ,On a

$$\big|opt_{y\in E}p(y)-opt_{y\in E}q(y)\big|\leq\sup_{y\in E}\big|p(y)-q(y)\big| \tag{3.1}$$

On va étudier dans la suite l'existence , l'unicité et l'approximation itérative de solution pour l'équation fonctionnelle (1) ci-dessous dans un espace de Banach $BC(S)$ et $B(S)$; On utilise le théorème de point fixe avec l'itération de son algorithme.

3.2 Propriétés des solutions d'une équation fonctionnelle provenant de la programmation dynamique

Théorème 3.2.1. *Soit S un compact ,$\gamma\in]0,1[$ et $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,1]$ avec $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ Soit $u,v,p,q:S\times D\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a,b:S\times D\longrightarrow S$ vérifient les conditions suivantes :*

(C1) u et v sont bornées dans $S\times D$;

(C2) $\sup_{x,y\in S\times D}\max\{\big|p(x,y)-q(x,y)\big|\}\leq\gamma$;

(C3) $\forall x_0\in S$ fixe et chaque $g\in\{u,v,p,q,a,b\}$,

$$\lim_{x\to x_0}g(x,y)=g(x_0,y).$$

uniformément pour $y\in D$
Donc l'équation fonctionnelle

$$f(x)=\alpha\sup_{y\in D}\{u(x,y)+p(x,y)f\big(a(x,y)\big)\}+(1-\alpha)\inf_{y\in D}\{v(x,y)+q(x,y)f\big(b(x,y)\big)\},\quad x\in S \tag{3.2}$$

admet une solution unique $w\in BC(S)$ telle que

(C4) $\forall w_0 \in BC(S)$ *la suite* $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$w_{n+1}(x) = \alpha_n \sup_{y\in D}\{u(x,y) + p(x,y)w_n\big(a(x,y)\big)\} + (1-\alpha_n)\inf_{y\in D}\{v(x,y) + q(x,y)w_n\big(b(x,y)\big)\},\ (x,n) \in S\times\mathbb{N} \tag{3.3}$$

converge vers w *et l'erreur d'estimation est*

$$\| w_{n+1} - w\|_1 \leq \gamma\| w_n - w\|_1 + 2M_0|\alpha_n - \alpha|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

avec $M_0 = \| w\|_1 + \sup_{y\in D}\max\{|u(x,y)|,|v(x,y)|\}$

Démonstration. Soit $H : BC(S) \longrightarrow BC(S)$ définie par

$$Hh(x) = \alpha Ah(x) + (1-\alpha)Bh(x), \quad (x,h) \in S\times BC(S) \tag{3.5}$$

où

$$Ah(x) = \sup_{y\in D}\{u(x,y) + p(x,y)h\big(a(x,y)\big)\} \quad (x,h) \in S\times BC(S), \tag{3.6}$$

$$Bh(x) = \inf_{y\in D}\{v(x,y) + q(x,y)h\big(b(x,y)\big)\} \quad (x,y) \in S\times BC(S) \tag{3.7}$$

première étape , nous montrons que H est bien définie dans $BC(S)$
Soit $h \in BC(S)$, $x_0 \in S$, et $\varepsilon > 0$.
de $(C1),(C3)$ et de la compacité de S il existe des constantes $M > 0, \delta > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que

$$\sup_{x,y\in S\times D}\max\{|h(x)|,|h\big(a(x,y)\big)|,|h\big(b(x,y)\big)|\} \leq M \tag{3.8}$$

$$\max\{|u(x,y) - u(x_0,y)|,|v(x,y) - v(x_0,y)|\} \leq \frac{\varepsilon}{6}(x,h) \in S\times D \quad \text{avec} \quad \|x - x_0\| < \delta \tag{3.9}$$

$$\max\{|p(x,y) - p(x_0,y)|,|q(x,y) - q(x_0,y)|\} \leq \frac{\varepsilon}{6M}(x,h) \in S\times D \quad \text{avec} \quad \|x - x_0\| < \delta \tag{3.10}$$

$$|h(x_1) - h(x_2) < \frac{\varepsilon}{6}, \quad x_1,x_2 \in S \quad \text{avec} \quad \|x_1 - x_2\| < \delta_1 \tag{3.11}$$

$$\max\{\|a(x,y) - a(x_0,y)\|,\|b(x,y) - b(x_0,y)\| < \delta_1,(x,h) \in S\times D \quad \text{avec} \quad \|x - x_0\| < \delta \tag{3.12}$$

Moyennant $(C2)$, le lemmes et les inégalités précédentes, nous déduisons que

$$
\begin{aligned}
|Hh(x)-Hh(x_0)| &= \Big|\alpha A(h(x))+(1-\alpha)B(h(x))-\alpha A(h(x_0))-(1-\alpha)B(h(x_0))\Big|\\
&= \Big|\alpha\big(A(h(x))-A(h(x_0))\big)+(1-\alpha)\big(B(h(x))-B(h(x_0))\big)\Big|\\
&\leq \alpha\Big|A(h(x))-A(h(x_0))\Big|+(1-\alpha)\Big|B(h(x))-B(h(x_0))\Big|\\
&\leq \alpha\Big|\sup_{y\in D}\big\{u(x,y)+p(x,y)h(a(x,y))\big\}-\sup_{y\in D}\big\{u(x_0,y)+p(x_0,y)h(a(x_0,y))\big\}\Big|\\
&+(1-\alpha)\Big|\inf_{y\in D}\big\{v(x,y)+q(x,y)h(b(x,y))\big\}-\inf_{y\in D}\big\{v(x_0,y)+q(x_0,y)h(b(x_0,y))\big\}\Big|\\
&\leq \alpha\sup_{y\in D}\{\Big|u(x,y)-u(x_0,y)+p(x,y)h(a(x,y))+p(x_0,y)h(a(x,y))\\
&-p(x_0,y)h(a(x,y))-p(x_0,y)h(a(x_0,y))\}\Big|+(1-\alpha)\sup_{y\in D}\{\Big|v(x,y)-v(x_0,y)\\
&+q(x,y)h(b(x,y))+q(x_0,y)h(b(x,y))-q(x_0,y)h(b(x,y))-q(x_0,y)h(b(x_0,y))\Big|\}\\
&\leq \alpha\sup_{y\in D}\{|u(x,y)-u(x_0,y)|+|p(x,y)+p(x_0,y)||h(a(x,y))|\\
&+|p(x_0,y)||h(a(x,y))-h(a(x_0,y))|\}+(1-\alpha)\sup_{y\in D}\{|v(x,y)-v(x_0,y)|\\
&+|q(x,y)+q(x_0,y)||h(b(x,y))|+|q(x_0,y)||h(b(x,y))-h(b(x_0,y))|\}\\
&\leq \alpha\sup_{y\in D}\{|u(x,y)-u(x_0,y)|\}+\sup_{y\in D}\{|p(x,y)+p(x_0,y)|\}\sup_{y\in D}\{h(a(x,y))\}\\
&+\sup_{y\in D}\{|p(x_0,y)|\}\sup_{y\in D}\{h(a(x,y))-h(a(x_0,y))\}+(1-\alpha)\sup_{y\in D}\{|v(x,y)-v(x_0,y)|\}\\
&+\sup_{y\in D}\{|q(x,y)+q(x_0,y)|\}\sup_{y\in D}\{h(b(x,y))\}+\sup_{y\in D}\{|q(x_0,y)|\}\sup_{y\in D}\{h(b(x,y))-h(b(x_0,y))\}\\
&\leq \alpha\frac{\varepsilon}{6}+(1-\alpha)\frac{\varepsilon}{6}+\alpha\frac{\varepsilon}{M6}.M++(1-\alpha)\frac{\varepsilon}{M6}.M\alpha\frac{\varepsilon}{6}\gamma+(1-\alpha)\frac{\varepsilon}{6}.\gamma\\
&\leq \frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{1}{2}\varepsilon\\
&<\varepsilon \quad \text{avec} \quad \|x-x_0\|<\delta
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
|Hh(x)| &= \big|\alpha A(h(x)) + (1-\alpha)B(h(x))\big| \\
&\leq \alpha\big|A(h(x))\big| + (1-\alpha)\big|B(h(x))\big| \\
&\leq \alpha\Big|\sup_{y\in D}\big\{u(x,y)+p(x,y)h(a(x,y))\big\} + (1-\alpha)\Big|\inf_{y\in D}\big\{v(x,y)+q(x,y)h(b(x,y))\big\}\Big| \\
&\leq \alpha\sup_{y\in D}\{|u(x,y)|+|p(x,y)||h(a(x,y))|\} + (1-\alpha)\sup_{y\in D}\{|v(x,y)|+|q(x,y)||h(b(x,y))|\} \\
&\leq \alpha\sup_{y\in D}\{\max\{|u(x,y)|,|v(x,y)|\}+\max\{|p(x,y)|,|q(x,y)|\}.\max\{|h(a(x,y))|,|h(b(x,y))|\}\} \\
&+ (1-\alpha)\sup_{y\in D}\{\max\{|u(x,y)|,|v(x,y)|\}+\max\{|p(x,y)|,|q(x,y)|\}.\max\{|h(a(x,y))|,|h(b(x,y))|\}\} \\
&\leq \sup_{y\in D}\{\max\{|u(x,y)|,|v(x,y)|\}+\max\{|p(x,y)|,|q(x,y)|\}.\max\{|h(a(x,y))|,|h(b(x,y))|\}\} \\
&< M_0+\gamma.M, \quad x\in S
\end{aligned}$$

ce qui donne que H est borné et continu dans S. Autrement dit, H fonction de $BC(S) \longrightarrow BC(S)$.

Deuxièmement, nous montrons que H est une contraction de $BC(S)$.
Soit $\varepsilon > 0, x \in S$ et $g,h \in BC(S)$, il existe alors $y, y_0, z, z_0 \in D$tel que

$$\begin{aligned}
A\big(h(x)\big)-\varepsilon &< u(x,y)+p(x,y)h\big(a(x,y)\big), \\
A\big(g(x)\big)-\varepsilon &< u(x,z)+p(x,z)g\big(a(x,z)\big), \\
A\big(h(x)\big) &\geq u(x,z)+p(x,z)h\big(a(x,z)\big), \\
A\big(g(x)\big) &\geq u(x,y)+p(x,y)g\big(a(x,y)\big)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B\big(h(x)\big)+\varepsilon &> v(x,y_0)+q(x,y_0)h\big(b(x,y_0)\big), \\
B\big(g(x)\big)+\varepsilon &> v(x,z_0)+q(x,z_0)g\big(b(x,z_0)\big), \\
B\big(h(x)\big) &\leq v(x,z_0)+q(x,z_0)h\big(b(x,z_0)\big), \\
B\big(g(x)\big) &\leq v(x,y_0)+q(x,y_0)g\big(b(x,y_0)\big)
\end{aligned}$$

En vertu de $(C2)$, on obtient que

$$\begin{aligned}
A\big(h(x)\big)-\varepsilon-A\big(g(x)\big) &\leq u(x,y)+p(x,y)h\big(a(x,y)\big)-u(x,z)+p(x,z)g\big(a(x,z)\big)+\varepsilon \\
&\leq p(x,y)\big(h(a(x,y))-g(a(x,z))\big)+\varepsilon \\
&\leq |p(x,y)|.|h\big(a(x,y)\big)-g\big(a(x,z)\big)|+\varepsilon \\
&\leq \gamma\sup_{y\in D}\big\{|h\big(a(x,y)\big)-g\big(a(x,z)\big)|\big\}+\varepsilon \\
&\leq \gamma.\|h-g\|_1+\varepsilon
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A\big(h(x)\big)-A\big(g(x)\big)+\varepsilon &\geq u(x,z)+p(x,z)h\big(a(x,z)\big)-u(x,z)+p(x,z)g\big(a(x,z)\big)-\varepsilon \\ &\geq -p(x,z).big(g(a(x,z))-h(a(x,z))\big)-\varepsilon \\ &\geq -|p(x,z)|.|g\big(a(x,z)\big)-h\big(a(x,z)\big)|-\varepsilon \\ &\geq -\gamma \sup_{y\in D}\{|h\big(a(x,z)\big)-g\big(a(x,z)\big)|\}-\varepsilon \\ &\geq -\gamma.\|h-g\|_1-\varepsilon \end{aligned}$$

Donc

$$\big|A\big(h(x)\big)-A\big(g(x)\big)\big| \leq \gamma.\|h-g\|_1+\varepsilon \tag{3.13}$$

De même manière on utilise C_2, on trouve

$$\big|B\big(h(x)\big)-B\big(g(x)\big)\big| \leq \gamma.\|h-g\|_1+\varepsilon \tag{3.14}$$

Par définition de H, on trouve

$$\begin{aligned} \big|H\big(h(x)\big)-H\big(g(x)\big)\big| &= \big|\alpha\left[A\big(h(x)\big)-A\big(g(x)\big)\right]+(1-\alpha)\left[B\big(h(x)\big)-b\big(g(x)\big)\right]\big| \\ &\leq \alpha\big|A\big(h(x)\big)-A\big(g(x)\big)\big|+(1-\alpha)\big|B\big(h(x)\big)-b\big(g(x)\big)\big| \\ &\leq \alpha\big(\gamma.\|h-g\|_1+\varepsilon\big)+(1-\alpha)\big(\gamma.\|h-g\|_1+\varepsilon\big)| \\ &\leq \gamma.\|h-g\|_1+\varepsilon \\ \sup_{y\in D}\big|H\big(h(x)\big)-H\big(g(x)\big)\big| &\leq \gamma.\|h-g\|_1+\varepsilon \\ \big\|H\big(h(x)\big)-H\big(g(x)\big)\big\|_1 &\leq \gamma.\|h-g\|_1+\varepsilon, \quad h,g\in BC(S). \end{aligned}$$

passent à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient

$$\big\|H\big(h(x)\big)-H\big(g(x)\big)\big\|_1 \leq \gamma.\|h-g\|_1, \quad h,g\in BC(S). \tag{3.15}$$

ce qui signifie que H est une contraction en $BC(S)$.
Ainsi, le théorème de point fixe de Banach donne que H admet un point fixe unique $w\in BC(S)$, implique que l'équation fonctionnelle a une solution unique dans $BC(S)$.
Troisièmement, nous montrons $(C4)$;on note

$$w(x)=\alpha\sup_{y\in D}\{u(x,y)+p(x,y)w\big(a(x,y)\big)\}+(1-\alpha)\inf_{y\in D}\{v(x,y)+q(x,y)w\big(b(x,y)\big)\}, \quad x\in S \tag{3.16}$$

Nous concluons que

$$
\begin{aligned}
|w_{n+1}(x)-w(x)| \le \alpha_n & \left|\sup_{y\in D}\{u(x,y)+p(x,y)w_n\big(a(x,y)\big)\}-\sup_{y\in D}\{u(x,y)+p(x,y)w\big(a(x,y)\big)\}\right| \\
& +|\alpha_n-\alpha|\left|\sup_{y\in D}\{u(x,y)+p(x,y)w\big(a(x,y)\big)\}\right| \\
& +(1-\alpha_n)\left|\inf_{y\in D}\{v(x,y)+q(x,y)w_n\big(b(x,y)\big)\}-\inf_{y\in D}\{v(x,y)+q(x,y)w\big(b(x,y)\big)\}\right| \\
& +|\alpha_n-\alpha|\left|\inf_{y\in D}\{v(x,y)+q(x,y)w\big(b(x,y)\big)\}\right| \\
& \le \gamma\|w_n(x)-w(x)\|_1+2M_0|\alpha_n-\alpha|, \quad (x,n)\in S\times\mathbb{N}
\end{aligned}
$$

$$\sup_{y\in D}|w_{n+1}(x)-w(x)| \le \gamma\|w_n(x)-w(x)\|_1+2M_0|\alpha_n-\alpha|$$

Donc

$$\|w_{n+1}(x)-w(x)\|_1 \le \gamma\|w_n(x)-w(x)\|_1+2M_0|\alpha_n-\alpha|, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.17}$$

et $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ et du lemme , on trouve que la suite $w_{n\,n\in\mathbb{N}}$ converge vers w. ∎

Corollaire 3.2.1. *Soit $\gamma\in]0,1[$ et $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,1]$ avec $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ Soit $u,v,p,q:S\times D\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a,b:S\times D\longrightarrow S$ vérifient les conditions suivantes : $(C1)$ et$(C2)$ Donc l'équation fonctionnelle admet une solution unique $w\in BC(S)$ et $\forall w_0\in BC(S)$ la suite $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par converge vers w et vérifient $(C4)$.*

Les exemples ci-dessous sont des applications de théorèmes

Exemple 3.2.1. Considérons l'équation fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}\sup_{y\in\mathbb{R}^+}\left\{\frac{\sin(x+y^2)}{7y^2+y+1}+\frac{x\ln x}{6x^2+y^3}f\left(\frac{50x+y^6}{x^2+y^6}\right)\right\} \\
&\quad +\frac{3}{4}\inf_{y\in\mathbb{R}^+}\left\{\frac{\sqrt{x}\cos(x-y)}{2\sqrt{x}+y^4}-\frac{x^3}{3x^3+2y^5}f\left(1+\frac{10x}{x^2+2y}\right)\right\}, \\
&\quad x\in[1,50].
\end{aligned}
$$

Soit $X=Y=\mathbb{R}$, $S=[1,50], D=\mathbb{R}^+$, $\gamma=\frac{1}{3}$, $\alpha=\frac{1}{4}$, $\alpha_n=\frac{1}{4}+\frac{n}{(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$, et Soit

$u,v,p,q : S\times D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a,b : S\times D \longrightarrow S$ défini par

$$\begin{aligned}
u(x,y) &:= \frac{\sin(x+y^2)}{7y^2+y+1}, & v(x,y) &:= \frac{\sqrt{x}\cos(x-y)}{2\sqrt{x}+y^4}\\
p(x,y) &:= \frac{x\ln x}{6x^2+y^3} & q(x,y) &:= -\frac{x^3}{3x^3+2y^5}\\
a(x,y) &:= \frac{50x+y^6}{x^2+y^6} & b(x,y) &:= 1+\frac{10x}{x^2+2y},\\
& x\in S\times D.
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que les conditions du théorème 3.2.1 sont remplies. Il découle de théorème 3.2.1 que l'équation fonctionnelle possède une solution unique dans$BC(S)$.
en plus , la suite $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\begin{aligned}
w_{n+1}(x) = \frac{n^2+6n+1}{4(n+1)^2}&\sup_{y\in S}\left\{\frac{\sin(x+y^2)}{7y^2+y+1}+\frac{x\ln x}{6x^2+y^3}w_n\left(\frac{50x+y^6}{x^2+y^6}\right)\right\}\\
&+\frac{3n^2+2n+3}{4(n+1)^2}\inf_{y\in S}\left\{\frac{\sqrt{x}\cos(x-y)}{2\sqrt{x}+y^4}-\frac{x^3}{3x^3+2y^5}w_n\left(1+\frac{10x}{x^2+2y}\right)\right\},\\
&(x,n,w_0)\in S\times\mathbb{N}\times BC(S),
\end{aligned}$$

converge vers w et vérifie 3.3

Conclusion et perspectives

Ce mémoire a été consacré à l'étude d'une certaine classe d'équations fonctionnelles émanant de la programmation dynamique. Une approche indirecte a été menée dans au premier chapitre via les θ-contractions. Dans le second chapitre on a présenté une étude directe et détaillée d'un problème d'optimisation mathématique concernant l'existence, l'unicité et les approximations itératives des solutions d'une équation fonctionnelle dans l'espace des fonctions continues et bornées.

Comme perspectives, on se propose à l'avenir :

1. de donner des applications aux équations fonctionnelles via une classe plus large de θ-contractions.
2. d'étendre les résultat obtenu au second chapitre pour classe plus large d'espaces fonctionnels.

Bibliographie

[C :93] S. Czerwik, *Contractio mappings in b-metric spaces*, Acta mathematica et informatica universitatis ostraviensis, Vol 1, n=1.5-11, 1993.

[K :69] R. Kannan, *Some results on fixed points II*, Amer. Math. Monthly. 76, (1969) 405-408.

[L :16] X. Liu, S. Chang, Y. Xiao, L. Zhao, *Existence of fixed points for θ-type contraction and θ-type Suzuki contraction in complete metric spaces*, Fixed point theory and applications, 2016 :8.

[L :13] Z. Liu, h. Dong S. Kang, S Lee, *Properties of solutions for a functional equation arising in dynamic programming*, J. Optim. teo. appl, 157, 696-715., 2013.

[S :15] B. Samet, *The class of (α,ψ)-type contraction in b-metric spaces and fixed point theorems*, Fixed point theory and applications, 2015 :92.