



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE «Abbès LAGHROUR» DE KHENCHELA
FACULTE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE



Département de Génie Mécanique

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Génie des Matériaux

Thème

**L'analyse des vibrations libres des
plaques en matériaux
fonctionnellement gradués FGM, par
l'utilisation de la théorie d'ordre élevé
de déformation des cisaillements.**

Présenté par :

- DEJERIDI Moussa
- BEN ABBES Nasser

Membres de jury :

Mr. CHITOUR Mourad
Mr. HIMEUR Nabil
Mr. GUESSAM Ali

M.C.A Université de Khenchela
M.C.A Université de Khenchela
M.A.A Université de Khenchela

Président
Rapporteur
Examinateur

Soutenu le : 17/06/2025

J'ai l'honneur de dédier ce modeste travail en particulièrement

À mon père pour le soutien et l'encouragement

À celle qui m'a transmis la vie, l'amour, le courage, à toi chère

Maman toutes mes joies, mon amour et ma reconnaissance

À mes chers frères et ma chère sœur

Maman toutes mes joies, mon amour et ma reconnaissance

À toutes ma famille

À mon encadreur Dr. HIMEUR Nabil

À tous mes professeurs

À toutes la promotion de Génie Mécanique, Option :

Construction mécanique 2025.

D.MOUSSA

**C'est avec un cœur reconnaissant et une profonde
gratitude que je dédie cet humble ouvrage**

A mes chers parents

Mon roc .inébranlable et ma lumière inextinguible

**Pour les innombrables sacrifices que vous avez consentis ,
ainsi qu'à mon professeur encadrant Dr. HIMEUR Nabil et a tous les
professeur de science et technologie**

**qui nous ont immergés dans leur travail et ont fait preuve de
patience pour nous enseigner et répondre à nos question tous au
long de ce parcours universitaire ,**

Je dédie également cet ouvrage à mes camarades de la promotion 2025

B,NASSER

Remerciement

Toute notre gratitude, grâce et remerciement vont à dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la patience, le courage et la volonté pour élaborer ce travail.

C'est avec une profonde reconnaissance et considération particulière que nous remercions notre promoteur : Mr, le Docteur NABIL HIMEUR pour la sollicitude avec laquelle il a suivi et guide ce travail.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Dr. CHITOUR Mourad**
- Dr. GUESSAM Ali**

Et qui d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré

de présider le jury. Je le remercie très sincèrement. Je voudrais

enfin remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin

à l'achèvement de ce travail.

ملخص

في هذا العمل، تُستخدم نظرية من الدرجة العالية لتشوهات القص لتحليل الاهتزاز الحر للألواح FGM. تُستخدم نظرية الرتبة العالية في هذه الدراسة، وتُستخرج معادلات الحركة باستخدام مبدأ Hamilton. تم الحصول على الحلول التحليلية لترددات الوضع الطبيعي للوحة FGM وتحديداتها من خلال حلول Navier. يتم إجراء مقارنة مع النتائج المطابقة في الأدبيات للتحقق من دقة وفعالية النظرية الحالية. تُقدّم دراسة بعض المعايير مفصلة لإظهار تأثير بعض المعلمات مثل نسبة السماكة، النسبة الهندسية، توزيع المواد، ومؤشر الكسر الحجمي؛ على السلوك الديناميكي للألواح FGM.

Résumé

Dans ce travail, une théorie d'ordre élevé de déformation des cisaillements est utilisée pour analyser la vibration libre des plaques FGM. La théorie d'ordre élevé est utilisée dans cette étude, Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. Les solutions analytiques des fréquences naturelles pour une plaque FGM sont obtenues et déterminées par les solutions de Navier. Une comparaison avec les résultats correspondants à la littérature est faite pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle. Une étude paramétrique détaillée est présentée afin de montrer l'effet de certains paramètres comme le rapport d'épaisseur, le rapport géométrique, la distribution des matériaux, l'indice de fraction volumique ; sur le comportement dynamique des plaques FGM.

ABSTRACT

In this work, a higher-order shear deformation theory is used to analyze the free vibration of FGM plates. The higher-order theory is used in this study. The equations of motion are obtained using Hamilton's principle. The analytical solutions of the natural frequencies for an FGM plate are obtained and determined by the Navier solutions. A comparison with the corresponding results in the literature is made to verify the accuracy and effectiveness of the current theory. A detailed parametric study is presented to show the effect of certain parameters such as the thickness ratio, the geometric ratio, the material distribution, and the volume fraction index on the dynamic behavior of plates FGM.

TABLE DES MATIERES

ملخص.....	I
Résume.....	I
ABSTRACT.....	I
Liste des figures.....	V
Liste des tableaux.....	VII
LISTE DES NOTATIONS ET SYMBOLES.....	VIII
LISTE DES ABREVIATIONS.....	X
Introduction générale.....	3
CHAPITER I :Généralités sur les matériaux composites	
I .1. Introduction.....	5
I .2. Les composants élémentaires de matériaux composites.....	6
I .2.1 Les renforts.....	6
I .2.1.1 Fibre de verre.....	7
I .2.1.2 Fibre de carbone.....	8
I .2.1.3 Fibres d'aramide de rigidités différentes.....	9
I .2.1.4 Les fibres métalliques ou céramiques.....	10
I .2.1.5 Autres renforts (bore et carbure de silicium).....	10
I .2.2 Architecture des renforts.....	10
I .2.2.1 Les unidirectionnels.....	11
a-Multidirectionnelle aléatoire.....	11
I.2.2.2 Les tissus et rubans.....	12
a- Toile ou taffetas.....	12
b- Sergé.....	12
c- Satin.....	13
d- Orientée.....	13
I.2.3.Les matrice.....	14
I.2.3.1. Les matrices organiques.....	16
I.2.3.2 Les matrices minérales.....	16

I.2.3.2.1 Les matrices métalliques.....	16
I.2.3.2.2 Les matrices céramiques.....	17
I.2.3.2.3 Charges et aditifs.....	17
I.2.4.1 Propriétés physiques des composites.....	18
I.2.4.2 Propriétés de masse.....	18
I.2.4.3 Propriétés thermiques.....	18
I.2.4.4 Propriétés hygroscopiques.....	18
I.2.4.5 Propriétés chimiques.....	19
I.2.4.6 Propriétés mécaniques des composites.....	19
a-Déformation élastique.....	20
b-Relation contraintes-déformations.....	20
I .2.4.7.1 Comportement en traction.....	20
I .2.4.7.2 Comportement en compression et cisaillement.....	21
I .2.4.8 Architectures de renforcement.....	21
I.2.5 Mise en œuvre des matériaux composites.....	21
I .2.6 Les matériaux composites structuraux.....	22
I .2.6.1 Les monocouches.....	22
I .2.6.2 Les stratifiés.....	23
I .2.6.3 Les Sandwichs.....	24
I .3 Définition des matériaux FGM.....	26
I .3.1 Idée générale du développement des FGM.....	26
I .3.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	27
I .3.3 Domaines d'application.....	29
I .3.4 Les propriétés matérielles des plaques FGM.....	30
I .3.4.1 Loi de mélange en puissance ou propriété matérielle d'une structure P-FGM (Loi de puissance).....	31
I .3.4.2 Loi de mélange sigmoïde ou propriété matérielle d'une structure S-FGM(Loi sigmoïde).....	32
I .3.4.3 Loi de mélange exponentielle ou propriété matérielle d'une structure E-FGM (Loi exponentielle).....	33
I .3.5 Conclusion.....	35

Chapitre II Les Théories des plaques

II .1.Introduction	378
II .2.Définition des plaques	378
II .2.1 Configuration géométrique	378
II .3 Historique sur le développement des théories des plaques	389
II .4 La théorie classiqu des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	401
II .5.La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre(FSDT).....	434
II .6 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	467
II .7.La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)	501
II .8.La théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D).....	501
II .9.La théorie de déformation des plaques quasi-3D	512
Conclusion:.....	523
.....CHPITER III : L'analyse des vibrations libers des plaques en FGM	54
III.1 Introduction	54
III.2.1 la géométrie de la plaque.....	54
III.2.2 les Equations cinématique et constitutive	55
III.2.3 les hypothèses de la théorie	55
III.2.1 la géométrie de la plaque.....	54
III.2.4 Les équations gouvernantes	57
III.2.5 La solution analytique pour une plaque FGM simplement appuyée.....	61
III.3 Conclusion.....	62
Chapitre IV Résultats numériques et discussions	
IV.1 Introduction	64
IV.2 Résultats numériques et discussions	64
IV.3 Applications numériques et interprétations.....	64
IV.4.1 Études comparatives	65
IV.4.2 Étude paramétrique	67
IV.5 Conclusion	73
Conclusion générale	75
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE	78

Liste des figures

Figure I-1 : Constituants d'un matériau composite [1].....	6
Figure I-2 : Exemple d'un matériau composite [1].....	6
Figure I-3 : Classification des fibres[2]	7
Figure I-4 : Fibres de verre[4].....	8
Figure I-5 : Fibre de carbone [4].....	9
Figure I-6 : Fibre d'aramide[4].....	9
Figure I-7 : Nappe unidirectionnel des renforts[6].....	11
Figure I-8 : Fibres multidirectionnelles [3].....	11
Figure I-9 : Toile ou taffetas[7].....	12
Figure I-10 : Un sergé [8].....	12
Figure I-11 : Tissu sous forme d'un satin[9].....	13
Figure I-12 : Fibres orientées [2].....	13
Figure I-13 : Les différentes familles de matrice [3].....	14
Figure I-14 : Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite	22
Figure I-15 : Matériau composite monocouche[13].....	23
Figure I-16 : Matériau avec deux directions de renfort [2].....	24
Figure I-17 : Matériau composite stratifié[13].....	24
Figure I-18 : Structure composite sandwich[14].....	25
Figure I-19 : Contraintes de cisaillement et de compression dans les sandwich[14].	25
Figure I-20 : Sandwich à âme en nid	25
Figure I-22 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Houari, 2011]	28
Figure I-23 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM.....	29
Figure I-24 : Les principaux domaines d'application des FGM.....	30
Figure I-25 : Géométrie d'une plaque en FGM	30
Figure I-26 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	32
Figure I-27 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	33
Figure I-28 : Variation de module de Young dans une plaque E- FGM.....	34
Figure II-1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM.....	389
Figure II-2 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Kirchhoff).....	412
Figure II-3 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Reissner-Mindlin)	445
Figure II-4 : Distribution du déplacement et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans les deux théories CPT et FSDT [79]	456
Figure II-5 : Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Théorie d'ordre élevé HSDT ou TSDT, [94]).....	467
Figure II-6 : Comparaison entre les différentes théories de plaques (CPT, FSDT, HSDT ou TSDT)	478
Figure III-1 : géométrie d'une plaque FG rectangulaire	544

Figure IV-1 : Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de l'indice de puissance k d'une plaques FG (AL/Al₂O₃) carrée simplement appuyée ($m=n=1$) pour différents rapports d'épaisseur (a/h). 687

Figure IV-2 : Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports d'épaisseur (a/h) d'une plaques FG (AL/Al₂O₃) carrée simplement appuyée ($m=n=1$) pour l'indice de puissance $k= 2$ ou 5 69

Figure IV-3 : Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports géométrique (a/b) d'une plaques FG (AL/Al₂O₃) simplement appuyée ($m=n=1$) avec l'indice de puissance $k= 2$ ou 5 710

Figure IV-4 : Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports géométrique (a/b) d'une plaques FG (AL/Al₂O₃) simplement appuyée ($m=n=1$) pour rapport d'épaisseur ($a/h=5$ ou 12). 732

Liste des tableaux

Tableau I-1 :propriétés des fibres de verre	8
Tableau I-2 :Critères essentiels des matrices TD et TP [7]	15
Tableau I-3 :les composites à matrice métallique [8].....	17
Tableau I-4 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal[17].	28
Tableau II-1 :Diverses fonctions de gauchissements dans la théorie d'ordre élevé.....	49
Tableau IV-1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.....	64
Tableau IV-2 : Comparaison les paramètres de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FG (AL/AL2O3) carré (a/b=1) simplement appuyée.....	66
Tableau IV-3 : Comparaison des paramètres de la fréquence fondamentale $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$ pour les plaques FG carrée (a/b = 1) simplement appuyée, (h/a = 0.1).	67
Tableau IV-4 : Les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaques FG (AL/Al2O3) carrée simplement appuyée (m=n=1) pour différents rapports d'épaisseur (a/ h).	68
Tableau IV-5 : Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports d'épaisseur (a/ h) d'une plaques FG (AL/Al2O3) carrée simplement appuyée (m=n=1).	70
Tableau IV-6 : Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports géométrique (a/ b) d'une plaques FG (AL/Al2O3) simplement appuyée (m=n=1) pour l'indice de puissance k= 2 ou 5, (a/h=10).	71
Tableau IV-7 : Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports géométrique (a/ b) d'une plaques FG (AL/Al2O3) simplement appuyée (m=n=1) pour rapport d'épaisseur (a/h=5 ou 12).	72

LISTE DES NOTATIONS ET SYMBOLES

a	<i>Longueur de la plaque</i>
b	<i>Largeur de la plaque</i>
h	<i>Epaisseur de la plaque</i>
G	<i>Module de cisaillement dans le plan</i>
E	<i>Module d'Young</i>
ν	<i>Coefficient de Poisson</i>
$G(z)$	<i>Module de cisaillement en fonction de « z »</i>
$E(z)$	<i>Module de Young en fonction de « z »</i>
$\nu(z)$	<i>Coefficient de Poisson en fonction de « z »</i>
$P(z)$	<i>Propriété matérielle effective</i>
F	<i>Force appliquées</i>
k, p	<i>Indice matériel, l'indice de puissance</i>
$V(z)$	<i>Fraction volumique</i>
$f(z), \psi(z)$	<i>Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)</i>
k^0	<i>Champ des déformations en flexion</i>
$u, v,$	<i>Les déplacements dans les directions x, y, z.</i>
u_0, v_0, w_0	<i>Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen</i>
u_b, v_b, w_b	<i>Composantes du champ de déplacement de flexion</i>
u_s, v_s, w_s	<i>Composantes du champ de déplacement de cisaillement</i>
σ_x, σ_y	<i>Contraintes normales</i>
τ_{xz}, τ_{yz}	<i>Contraintes de cisaillement</i>

ϵ_x, ϵ_y	Déformation dans la direction x, y
γ_{xy}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta_u; \delta_w; \delta_v$	Champ virtuel de déplacement
M_x^b, M_y^b, M_z^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_z^s	Moment supplémentaire du cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
$\delta N_{\gamma_{xy}}, \delta \gamma_{yz}, \delta N_{\gamma_{xz}}$	Champ de déformation transversal virtuel
$A_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{il}^s$	Termes de rigidité de la matrice
d_{ij}, a_{ij}, d_{ijlm}	Les opérateurs différentiels
i et j	Nombre naturel
(m, n)	i ème mode propre
(I_i, J_i, K_i, J_i^s)	Inerties de masse
$[K]$	Matrice de rigidités
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
E_c	Module d'Young de la céramique
E_m	Module d'Young du métal
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion

LISTE DES ABREVIATIONS

FGM	<i>Matériaux fonctionnellement graduée</i>
CPT	<i>Théorie classique des Plaques</i>
FSDT	<i>Théories de la déformation de cisaillement de premier ordre</i>
TSDT	<i>Théories de la déformation de cisaillement de troisième ordre</i>
HSDT	<i>Théories de la déformation de cisaillement d'ordre élevé</i>
SSDPT	<i>Théories de la déformation de cisaillement sinusoïdale</i>
ESDPT	<i>Théories de la déformation de cisaillement exponentielle</i>
HSDPT	<i>Théories de la déformation de cisaillement hyperbolique</i>
RPT	<i>La théorie raffinée de déformation des plaques</i>
2D	<i>Deux dimensionnelles</i>
3D	<i>Trois dimensionnelles</i>
Quasi-3D	<i>Quasi trois dimensionnelles</i>

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux composites légers ont été, pendant de nombreuses années, utilisés avec succès dans la construction aéronautique et dans d'autres applications d'ingénierie, en raison de leurs excellents rapports résistance/poids et rigidité/poids (rapports très grands). Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées du fait de leur faible dureté.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. Une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM)).

Apparu en 1984 au Japon pour des applications aéronautiques et spatiales à très haute température, ce type de revêtement est plus connu sous le nom de FGM ou MGF (matériaux gradués fonctionnellement). Ce concept est en plein développement et la majorité des publications le concernant est apparue ces dix dernières années.

Les matériaux Fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre. Ces matériaux peuvent être fabriqués en faisant varier la teneur en pourcentage de deux ou plusieurs matériaux constitutifs de telle manière à créer un gradient de propriété à travers l'épaisseur. Ce gradient de propriété réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contraintes rencontrés dans les composites stratifiés.

Les matériaux à gradients fonctionnels (FGM) ont une texture microscopique non-homogène, dans lesquels les propriétés mécaniques varient d'une surface à l'autre de façon régulière et continue. Ils sont généralement fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métaux, façonnable à volonté au gré du concepteur et en fonction de la performance convoitée.

Du fait de l'utilisation accrue des matériaux composites à gradients fonctionnels (FGM) dans la conception des ouvrages de génie civil, de nombreuses études ont été entreprises sur le comportement statique et dynamique des plaques à gradients fonctionnels (FGM). Ces dernières années, plusieurs études ont été menées sur matériaux FGM et appliquées au domaine de l'ingénierie afin d'analyser les comportements statiques et dynamiques des plaques FG. Cette analyse a conduit au développement de diverses théories sur ce type de plaques.

Dans ce contexte, nous présenterons un travail pour étudier le comportement dynamique des plaques fonctionnellement graduées (FGM), une théorie d'ordre élevé de déformation des cisaillements est utilisée pour analyser la vibration libre des plaques FGM. Ce travail s'articule autour de quatre chapitres :

- ✓ Le premier chapitre traite une recherche bibliographique sur les matériaux à gradients évalués FGM et leurs domaines d'application.
- ✓ Au second chapitre, on présente les différentes théories des plaques tel que les diverses théories des plaques développées dans la littérature pour l'amélioration du champ de déplacement à travers l'épaisseur des plaques.
- ✓ Le troisième chapitre, est consacré à la formulation théorique pour l'analyse dynamique des plaques en matériaux à gradient de propriété type FGM.
- ✓ Quand au quatrième chapitre une validation et comparaison des résultats sont discutées.

Enfin le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette nouvelle théorie de cisaillement dans la résolution du comportement dynamique des plaques FGM simplement appuyées ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futures.

CHPITER 1

Généralités sur matériaux

les composites

I. CHAPITER I : Généralités sur les matériaux composites**I.1. Introduction**

Sous l'angle de la structure et des matériaux, ce chapitre se consacre à l'analyse du comportement des composants des matériaux composites. Une présentation détaillée sera faite sur certaines catégories de composites en fonction du type de matrice et de renfort utilisés. Un matériau composite est défini comme l'association de deux matériaux distincts, appelés généralement matrice et renfort, dont les propriétés sont complémentaires, ce qui permet d'obtenir un matériau aux caractéristiques physiques nouvelles et différentes de celles de ses composants d'origine.

Dans la majorité des matériaux composites, les performances mécaniques dépendent principalement des renforts. Ainsi, la proportion de renfort dans la matrice et la qualité de l'interface entre ces deux éléments influencent directement les propriétés mécaniques finales du matériau. Ces composites sont largement utilisés dans le domaine industriel, où ils se composent généralement d'une matrice polymère renforcée par des fibres longues. Parmi les fibres les plus courantes aujourd'hui, on retrouve les fibres de verre, particulièrement employées dans les applications à faible coût.

L'objectif de ces associations est de tirer parti des qualités propres à différentes catégories de matériaux, afin de fabriquer des pièces ou des produits ayant directement la forme souhaitée et des caractéristiques précises (comme la résistance mécanique ou la densité). La logique derrière le recours aux matériaux composites peut être illustrée par l'exemple suivant :

Les métaux possèdent généralement une bonne ténacité (c'est-à-dire qu'ils résistent à la propagation des fissures) et une grande ductilité (ils peuvent se déformer de manière significative avant de se casser), mais leur densité est élevée. À l'inverse, les plastiques sont légers, mais leurs performances mécaniques sont limitées. Quant aux céramiques, elles sont très rigides et résistantes, mais aussi très fragiles.

Il revient donc aux experts du domaine de concevoir des structures en sélectionnant le matériau adéquat, en lui donnant la forme appropriée (forme des armatures), et en le positionnant judicieusement (concept de distribution spatiale).

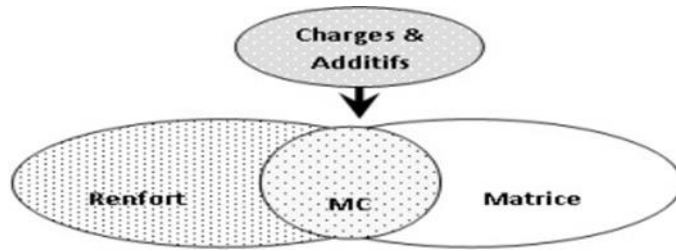


Figure I-1 :Constituants d'un matériau composite [1]

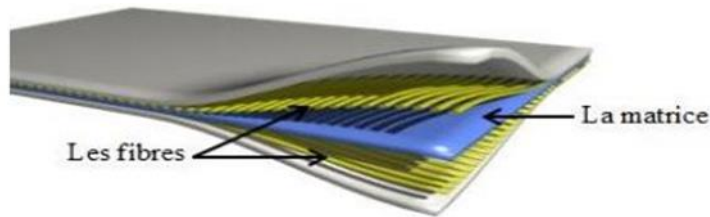


Figure I-2:Exemple d'un matériau composite [1].

I .2. Les composants élémentaires de matériaux composites

Les propriétés mécaniques des composites renforcés de fibres dépendent directement des qualités mécaniques de leurs composants : la matrice, les fibres, ainsi que la zone d'interaction entre la fibre et la matrice.

La solidité d'un composite est principalement assurée par les fibres, qui présentent des performances mécaniques nettement supérieures à celles de la matrice.

La matrice, quant à elle, sert à définir la forme géométrique de la pièce, à maintenir l'unité de l'ensemble des fibres, et à les préserver des agressions extérieures. Cependant, sa fonction essentielle est d'assurer la transmission des charges mécaniques d'une fibre à une autre.

I .2.1 Les renforts

Les fibres ou les renforts, doivent assurer la bonne tenue mécanique des matériaux. Le renfort se présente généralement sous la forme de fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elles doivent supporter. Leurs caractéristiques doivent être les suivantes: caractéristiques mécaniques élevées en termes de rigidité et de résistance, compatibilité physico-chimique élevée avec les matrices.

Les principaux types de renforts se distinguent par leur géométrie (particules, billes, fibres courtes, fibres longues), par leur disposition, notamment pour les 3D (feutres, nappede mat 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissage 3D) ou par leur nature (minérale ou organique).

Une variété de fibres est présentement disponible différents types de fibres de verre, de carbone, d'aramide (Kevlar), de graphite, de bore, de silice, de carbure de silicium et d'aluminium sont disponibles. Elles représentent une gamme de propriétés mécaniques incluant des résistances en traction de 700 à 4200 MPa et des modules d'élasticité de 50 GPa à 400 GPa. Les principales fibres utilisées sont :

- Fibre de Carbone;
- Fibre de Kevlar:
- Fibre de Verre
- Fibre de Bore

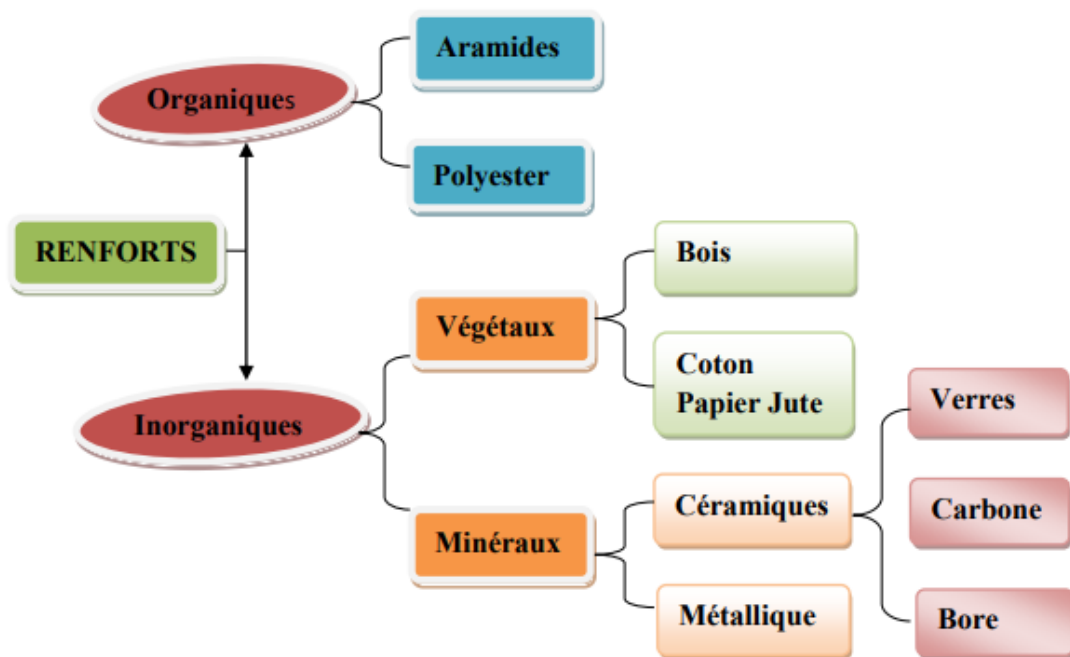


Figure I-3: Classification des fibres [2].

I .2.1.1 Fibre de verre

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres:

- Fibres E: pour les composites de grande diffusions GD et les applications courantes;
- fibres R: pour les composites hautes performances;
- fibres D: pour la fabrication de circuits imprimés(propriétés diélectriques).

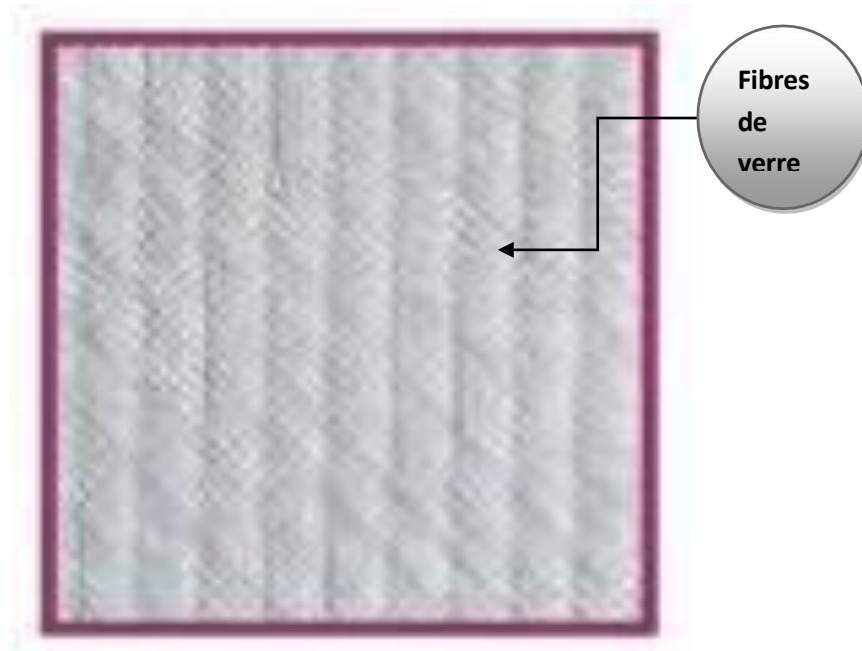


Figure I-4: Fibres de verre[4].

Tableau I-1 :propriétés des fibres de verre

<i>Propriétés en Traction</i>	<i>Verre E</i>	<i>Verre R</i>	<i>Verre D</i>
R_t(MPA)	3400	4400	4900
R_o(MPA)	73000	8600	87000
A_R(%)	4.9	5.2	
Masse Volumique (g/cm³)	2.54	2.55	2.54

I .2.1.2 Fibre de carbone

C'est la fibre la plus utilisées dans les applications hautes performances .Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacetylonitrile). Selon latempérature de combustion, on distingue deux types de fibres :

- Fibres haute résistance(HR): pour une combustion de1000 à 150

- Fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000°C.



Figure I-5: Fibre de carbone [4]

I .2.1.3 Fibres d'aramide de rigidités différentes

Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- Les fibres bas module: utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles;
- Les fibres haute module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

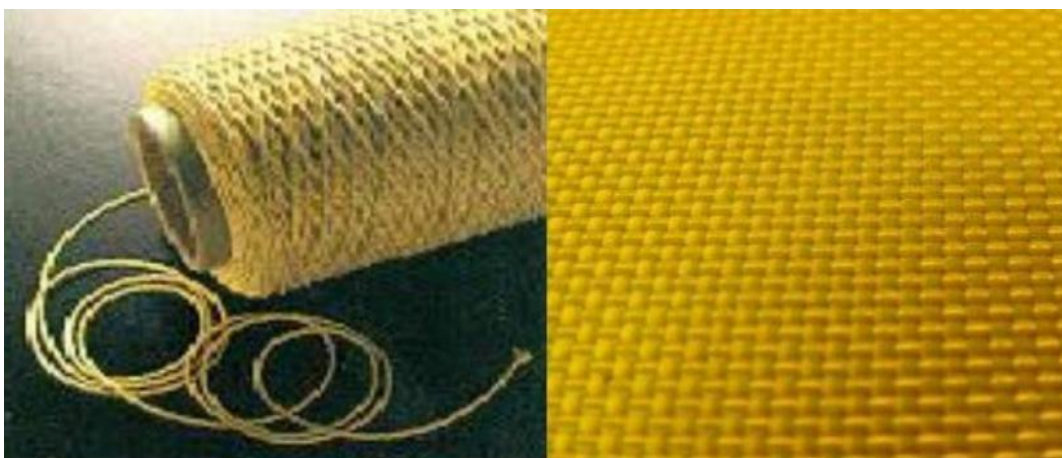


Figure I-6: Fibre d'aramide[4].

I .2.1.4 Les fibres métalliques ou céramiques

Sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication ; Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100°C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15mm de diamètre.

Le diamètre résultant est de 100 à 200 µm pour la fibre .La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC). Les derniers développements concernent la production de trichites, ("whiskers") qui sont des monocristaux filamenteux obtenus [5].

Par décomposition d'un sel métallique en ambiance réductrice. Leur longueur est de quelques millimètres, pour un diamètre d'environ 1µm. Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.

I.2.1.5 Autres renforts (bore et carbure de silicium)

Ces deux types de renforts sont appelés au même principe de fabrication et ont des propriétés et des domaines d'application voisins .Leur utilisation reste toutefois très marginale (navette spatiale).

Ces matériaux sont fabriqués à base de bore, bore-carbure de bore, carbure de silicium, bore carbure de silicium ;On opère par dépôt en phase gazeuse sur un support un substrat porté à 1200°C, qui sert de substrat. Le diamètre du mono filament est plus important que pour les autres fibres (100 à 150 microns).

Les prix et difficultés de mise en œuvre (fragilité, usinage difficile, manipulation dangereuse) freinent le développement de ces types de renforts.

I .2.2 Architecture des renforts

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques des structures en composites, il est nécessaire de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée aux contraintes mécaniques. En fonction des propriétés recherchées, en contre plusieurs architectures de renforcements, il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée. Il existe différentes géométries et textures

de renforts [5]:

I .2.2.1 Les unidirectionnels

Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand.

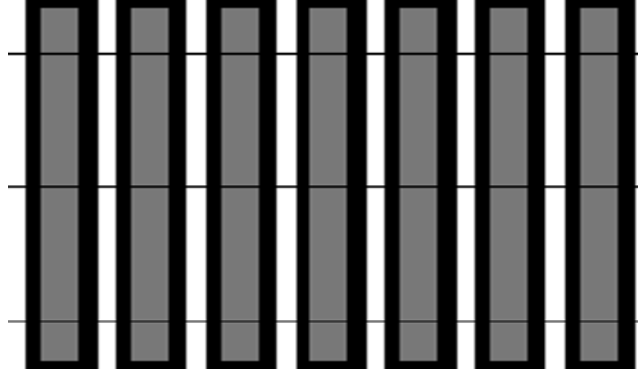


Figure I-7: Nappe unidirectionnel des renforts[6]

Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entre eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise.

a-Multidirectionnelle aléatoire

- fibres coupées et broyées, sans arrangement particulier.
- feutre de fibres agglomérées par un liant : le mat peut être à fibres courtes (longueur inférieure à 50 mm), sans orientations particulière ou à fibres continues.



Figure I-8: Fibres multidirectionnelles [3]

I.2.2.2 Les tissus et rubans

a- Toile ou taffetas

Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.

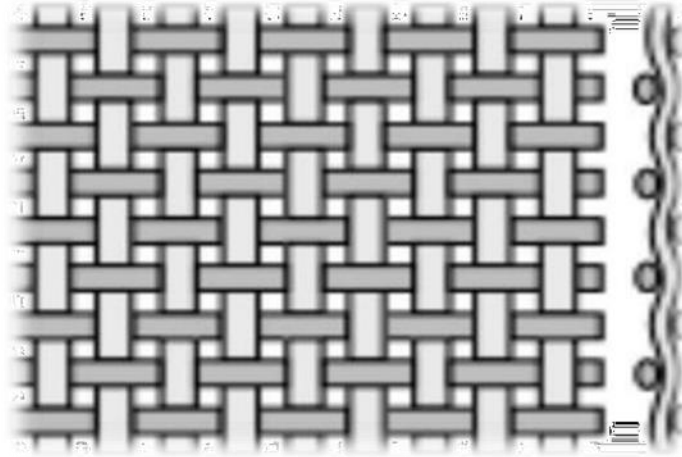


Figure I-9: Toile ou taffetas [7]

b- Sergé

Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au-dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils. Ci-contre, un sergé [8].

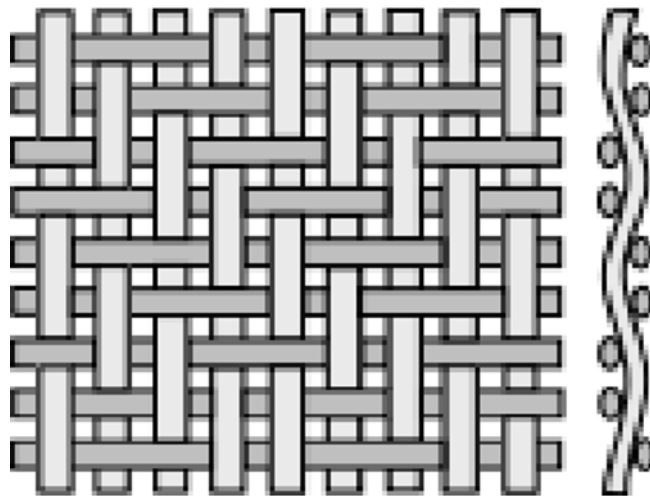


Figure I-10 : Un sergé [8]

c- Satin

Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs (n- 1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique.

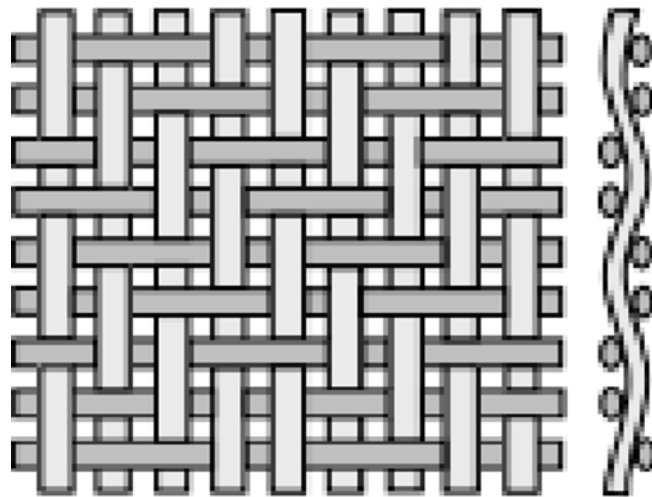


Figure I-11 : Tissu sous forme d'un satin[9]

d- Orientée

Le tissu comporte des fils de chaîne ou de trame (fibres bidirectionnelles) ; suivant le mode de croisement de la trame et de la chaîne, le tissu sera une toile, un sergé ou un satin.



Figure I-12 : Fibres orientées [2]

I.2.3.Les matrice

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2200°C peuvent être atteintes. Les objectifs de l'utilisation de la matrice sont multiples, les plus importants sont:

- Support et protection chimique des fibres ou particules;
- Répartition et transfert de charges;
- Donner la forme désirée au produit final.

La classification des types des matrices couramment rencontrées est donnée sur figure ci-dessous :

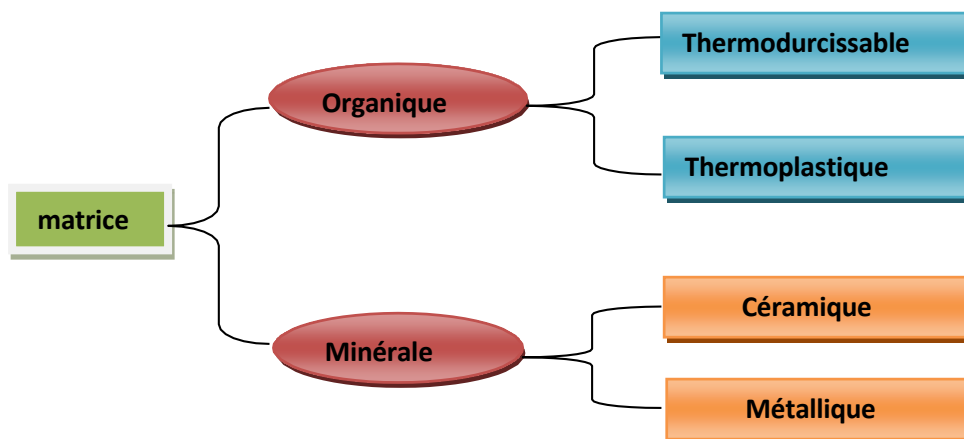


Figure I-13 : Les différentes familles de matrice [3]

Les principales matrices ou résines utilisées sont : les résines époxy, les polyamides, les polyéthers, les polyesters, les vinyliques, les phénoliques et les polyuréthanes. La structure des TP se présente sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent)

Cette opération est réversible.

La structure des TD à la forme d'un réseau tridimensionnel qui se ponte (double liaison de polymérisation) pour durcir en forme de façon définitive, lors d'un échauffement. La transformation est donc irréversible

Tableau I-2 : Critères essentiels des matrices TD et TP [7]

	TP: THERMOPLASTIQUES	TD : THERMODURCISSABLES
<u>Etat de base</u>	solide (prêt à l'emploi: polymérisé)	Liquide visqueux à polymériser
Stockage matière De base	Illimite	Temps réduit (précautions à prendre)
Mouillabilité des Renforts	Difficile	Aisée
Moulage	Chauffage (fusion/ramollissement +refroidissement de fixation)	chauffage continu
Cycle	Court	plus long(polymérisation)
<u>Caractéristiques Spécifiques</u>		
Tenue au choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite sauf nouveaux TP thermostable	Meilleure
Chutes et déchets	Recyclables	Perdus
Conditions de mise en œuvre	Bonne + propreté	Emanations pour méthode humide(allergie possible)

I.2.3.1. Les matrices organiques

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, d'assurer le transfert de charge entre elles, de les protéger des chocs, des frottements et de l'environnement extérieur. En outre, elle

présente l'avantage d'être chimiquement réactive, ce qui permet l'établissement de liaisons fortes avec le renfort. Elle apporte aussi la tenue chimique de la structure et enfin d'assurer la forme de la structure. Cependant, la matrice ne doit pas être trop rigide pour ne pas contrarier le travail des fibres ce qui fait de sa ductilité un paramètre important. La satisfaction simultanée de tous ces critères étant difficile, les matrices sont choisies selon le domaine d'utilisation du matériau composite. Cela a donné différentes matrices utilisées selon la fonction pour laquelle le composite est destiné. Ce qui a donné naissance à un matériau nouveau, modulable et adaptable aux caractéristiques mécaniques exigées. Elle est à base de polymères. Un polymère est un enchaînement de groupes organiques identiques appelés monomères. Un monomère est une suite d'atomes de carbone liés entre eux et avec d'autres éléments (H, N, Si, Cl...) [5]

I.2.3.2 Les matrices minérales

I.2.3.2.1 Les matrices métalliques

Les matériaux composites à matrice métallique dont il est question ici ont été développés à partir des années 1960-1965 en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métalmétal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre.

À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel. Voici quelques composites à matrices métalliques [5]:

Tableau I-3 :les composites à matrice métallique [8].

Symbole	Définition
CMAI	Composite à matrice aluminium
CMM	Composite à matrice métallique
CMMg	Composite à matrice magnésium
CMTi	Composite à matrice titane
PAN	Polyacrylonitrile
PCS	Polycarbosilane
PTCS	Polytitanocarbosilane

I.2.3.2.2 Les matrices céramiques

Dans les années 80, la disponibilité de nombreux nouveaux matériaux céramiques devait relancer les recherches dans ce domaine avec des perspectives de développement industriel plus encourageantes. Des exemples d'applications industrielles ont été développés dans l'automobile, l'initiative de l'industrie japonaise. Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel. Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique[5].

I.2.3.2.3 Charges et aditifs

On désigne sous le nom général de charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, Électriques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement, de réduire le prix de revient du matériau transformé A l'inverse des matières thermoplastiques, les matières thermodurcissables ont toujours contenu des charges de nature et de formes variées ,à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60% en masse .Pour un polymère donné, le choix d'une charge est déterminé en fonction des modifications recherchées pour l'objet fini. Mais, d'une manière générale, les substances

utilisables comme charges des matières plastiques devront d'abord satisfaire à un certain nombre d'exigences à savoir : la compatibilité avec la résine de base, la mouillabilité, l'uniformité de qualité et de granulométrie, la faible action abrasive et le bas prix de revient[9].

I.2.4.1 Propriétés physiques des composites

Chaque type de matériau composite a ses propres caractéristiques physiques selon les caractéristiques de fibres utilisées, le pourcentage de fibres, le type de résine, les configurations de la section transversale et de la surface du matériau de renforcement et de la méthode de fabrication.

I.2.4.2 Propriétés de masse

Les fractions massiques (des fibres, de la matrice et des additifs) peuvent être déterminées à partir d'essais en laboratoire. La taille des particules inorganiques, qui peuvent être sphériques ou allongées, est donnée en termes de tailles moyennes des particules, exprimée normalement comme le diamètre sphérique équivalent, en microns. La taille moyennes des particules varie entre 0,1 et 0,3 μm . Les tailles des particules sont généralement graduées, échelonnées, pour assurer une bonne distribution spatiale des fillers.

On doit reconnaître que les diamètres des fibres de renforcement non métalliques courantes qui s'étendent de 6 à 25 μm , peuvent être du même ordre de grandeur que les diamètres des fillers. Ceci peut avoir un effet sur les propriétés résultantes du composite. De plus, de nombreux fillers ont des formes allongées et peuvent produire une anisotropie structurale dans la phase matricielle. Cependant, la résine est normalement isotropique

I.2.4.3 Propriétés thermiques

La connaissance des coefficients d'expansion thermique (C.E.T) est particulièrement importante. Dans le cas d'un béton renforcé de barres en acier, les CET des deux matériaux ont des valeurs très proches. On a donc suggéré que le béton renforcé d'acier pouvait tolérer des changements en température sans générer des contraintes internes à l'interface entre les barres de renforcement et le béton. Celles-ci pourraient conduire à un endommagement ou à une réduction de la capacité d'adhérence. Mais les barres, dans ce cas-là, ont deux C.E.T, un dans le sens longitudinal et l'autre dans le sens transversal. Pour la plupart des matériaux composites unidirectionnels, couramment utilisés dans la

construction, le C.E.T longitudinal est proche de celui du béton. Cependant, le C.E.T transversal est 2 à 10 fois supérieur à celui du béton. Ceci est dû au fait que le C.E.T longitudinal est dominé par les fibres (qui ont des C.E.T longitudinaux faibles) tandis que le C.E.T transversal est dominé par celui de la matrice, qui est, d'une façon significative, plus grand que celui des fibres.

On doit non seulement reconnaître que le C.E.T des matériaux composites ont des valeurs différentes dans la direction longitudinales et transversales, mais que , les constituants individuels peuvent aussi être anisotropiques et avoir des propriétés longitudinales et transversales différentes.

On sait, par exemple, que les fibres de carbone et d'aramide sont isotropiques transversalement. Elles ont des C.E.T différents dans les directions longitudinales et transversales.

I.2.4.4 Propriétés hygroscopiques

Le coefficient d'expansion hygroscopique (C.E.H), est une propriété physique des matériaux composites. Il décrit les changements dimensionnels qui se développent, quand le matériau absorbe de l'humidité. Ce phénomène n'est pas considéré comme important pour les renforcements métalliques. Comme dans le cas des C.E.T, le C.E.H est différent dans les directions longitudinales et transversales. Les constituants peuvent atteindre des concentrations en humidité différentes à l'équilibre. De plus, la plupart des fibres absorbent beaucoup moins d'humidité que les résines polymériques (sauf dans le cas des fibres organiques, tels que les fibres d'aramides. Souvent, l'absorption de l'humidité dans la fibre est négligeable. Dans le cas des composites unidirectionnels, on suppose souvent que le C.E.H dans la direction longitudinale est nulle. De plus, on suppose que l'expansion hygroscopique dans la direction transversale est reliée au C.E.H de la matrice.

I.2.4.5 Propriétés chimiques

Les propriétés chimiques des matériaux composites sont put être les propriétés les plus difficiles à identifier pour les renforcements. Ceci est dû au fait que la composition chimique des matériaux composites joue un rôle central dans deux domaines. Ceux-ci sont un grand souci pour les ingénieurs en construction: la perte des propriétés mécaniques (spécialement la rigidité) à température élevée et la durabilité.

I.2.4.6 Propriétés mécaniques des composites**a-Déformation élastique**

Contrairement à l'acier, les matériaux composites ne montrent pas une déformation plastique, et leur rupture est fragile. Dans le béton on ne peut généralement pas accepter qu'il ait une déformation plastique.

b-Relation contraintes-déformations

Les propriétés mécaniques des barres de renforcement, peuvent être obtenues à partir des propriétés des constituants, à l'aide de la loi des mélanges, qui considère que chaque constituant contribue selon sa proportion en volume dans le composite. Soit V_f la fraction volumique des fibres. En première approximation, le module d'élasticité du composite est donné par l'expression suivante:

$$E_c = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m \quad \text{avec } V_f + V_m = 1$$

$$E_c = E_f \cdot V_f + E_m (1 - V_f) = (E_f - E_m) V_f + E_m \quad \text{Avec :}$$

E_c : module d'élasticité du composite ; E_f : module d'élasticité des fibres ; E_m : module d'élasticité de la matrice ; V_f : fraction volumique des fibres ; V_m : fraction volumique des matrices.

I .2.4.7.1 Comportement en traction

La variation de la résistance en traction des matériaux composites est beaucoup plus élevée, comparée à celle de l'acier. La variation dépend du type de fibres, de la configuration des fibres, des liants et des dimensions de l'échantillon. Beaucoup d'essais ont été réalisés pour déterminer les résistances en traction des barres de renforcements.

D'une façon générale, ces barres sont caractérisées par:

- Les résistances en traction des barres à base de fibres de carbone ($V_f=47$ à 70%) sont pour la plupart comprises entre 1100 et 2200 MPa, le module élastique de 100 à 150 GPa ;
- Les résistances en traction des barres en fibres de verre ($V_f=50$ à 60%) sont comprises entre 900 et 1100 MPa, le module élastique est autour de 45 GPa ;
- Les résistances en traction des barres en fibres d'aramide ($V_f=43$ à 70%) sont comprises entre 1350 et 1650 MPa et leur module d'élasticité est d'environ 60 GPa.

I .2.4.7.2 Comportement en compression et cisaillement

Les matériaux composites sont généralement utilisés comme des renforcements de traction. Les résistances en compression et en cisaillement sont généralement très faibles. On n'utilise donc généralement pas les matériaux composites comme renforcement en compression et en cisaillement.

I .2.4.8 Architectures de renforcement

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée.

I.2.5 Mise en œuvre des matériaux composites

méthodes de mise en œuvre spécifiques aux matières plastiques renforcées ont contribué à l'évolution des termes utilisés pour désigner ces matériaux depuis leur origine, c'est-à-dire depuis une cinquantaine d'années.

Les Des techniques originales ont été élaborées pour la mise en œuvre de composites à fibres longues. La description de ces méthodes spécifiques occupe évidemment une place importante dans les rubriques 'composites'.

Soit par polycondensation et réticulation(ou polymérisation) pour les matrices thermodurcissables, soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques. Il existe différentes techniques mais la plus utilisée est par

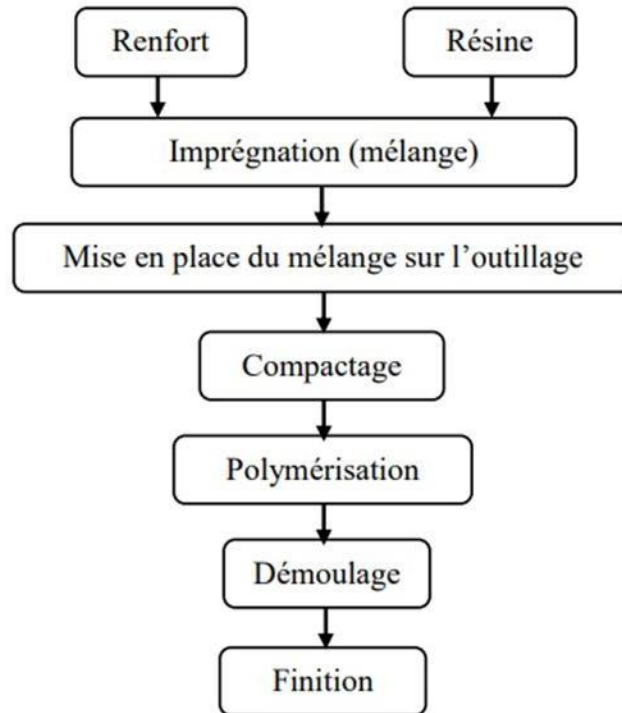


Figure I-14 : Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite

I.2.6 Les matériaux composites structuraux

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches ;
- Les stratifiés ;
- Les sandwichs.

I.2.6.1 Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes.

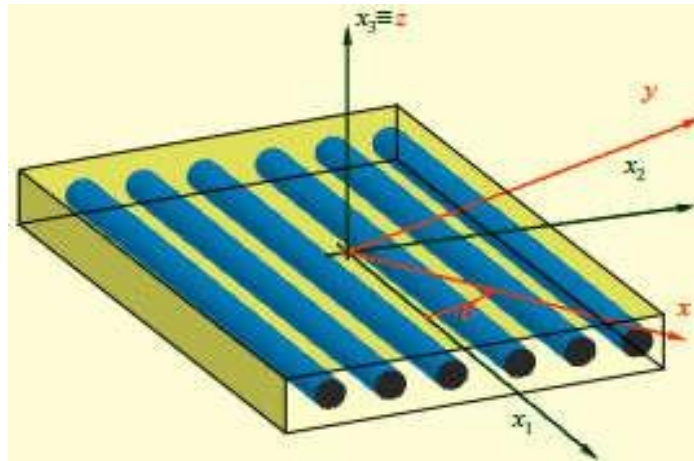


Figure I-15 : Matériau composite monocouche[13]

I.2.6.2 Les stratifiés

Un stratifié est constitué de l’empilement de deux ou plusieurs couches (appelées également plis) entreposées successivement et se comportant comme une seule entité structurale. Chaque couche est désignée par son orientation, qui est l’angle que fait la direction des fibres avec la direction de référence (qui est généralement la direction des fibres unidirectionnelles orientées à 0°),

La séquence d’empilement du stratifié, désigne le nombre et l’orientation des couches successives en parcourant le stratifié d’une face à l’autre. Ainsi, un stratifié est dit unidirectionnel si, l’angle entre deux couches consécutives est nul, c’est-à-dire, toutes les fibres sont alignées selon une seule direction. Par contre, un stratifié est multidirectionnel si les couches successives, sont orientées les unes par rapport aux autres à des angles autres que 0° tel, les multidirectionnels [0/ +45/ -45/ 90/ 90/ +45/ -45/ 0].

Le choix de l’empilement et plus particulièrement des orientations permettra d’avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés de type :

- Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction + θ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
- Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
- Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90°.

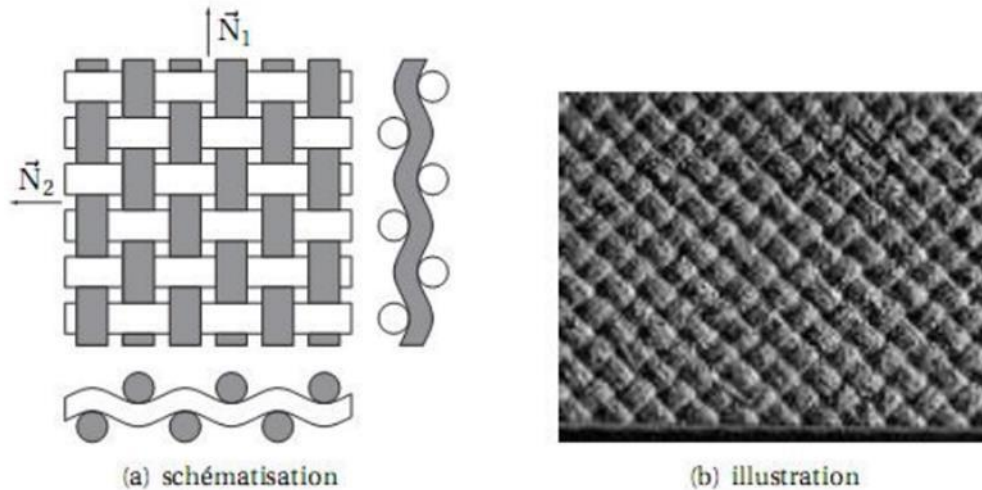


Figure I-16 : Matériau avec deux directions de renfort [2]

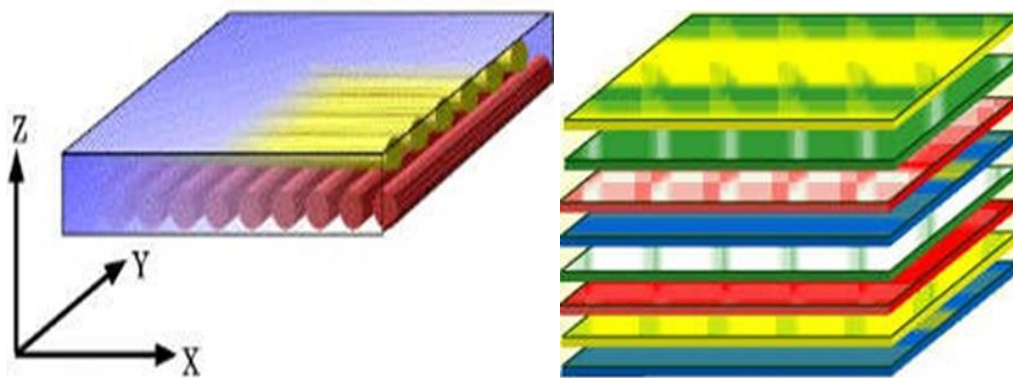


Figure I-17 : Matériau composite stratifié[13]

I.2.6.3 Les Sandwichs

Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux, de faible épaisseur, constituées de matériaux à relativement haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (figure I.16). Ces structures complexes offrent de grandes potentialités aux concepteurs dans des secteurs très divers. On peut songer d'abord à des applications structurales classiques pour lesquelles il faut allier légèreté et rigidité comme dans l'industrie aéronautique, ou plus généralement les transports (TGV). L'usage des sandwichs se répand aussi dans l'industrie du bâtiment car, ils possèdent une excellente caractéristique d'isolation thermique.

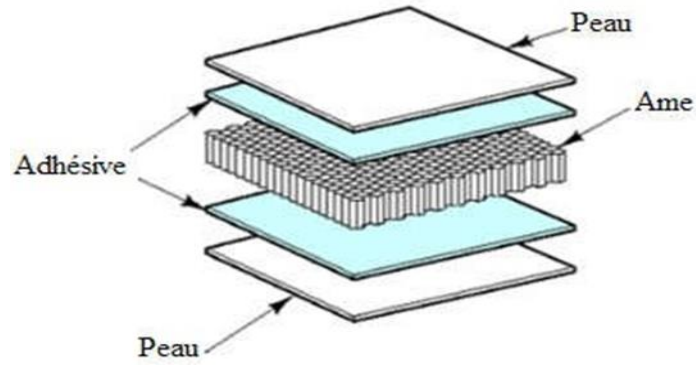


Figure I-18 : Structure composite sandwich[14]

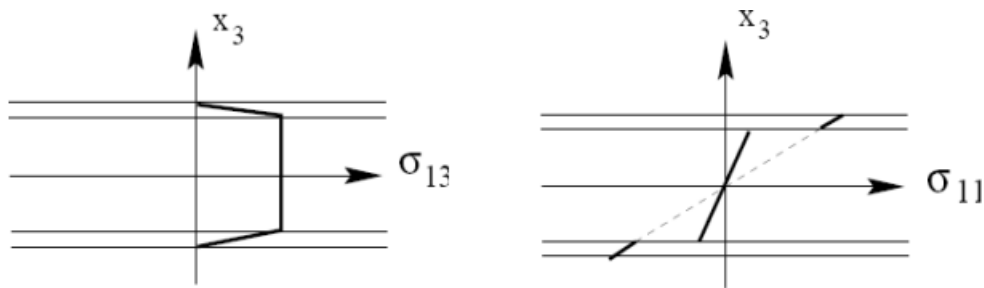


Figure I-19 : Contraintes de cisaillement et de compression dans les sandwich[14].

Les âmes les plus utilisées sont de type nid d’abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d’abeilles est présentée sur la (Figure I .18). Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion.

L’âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.

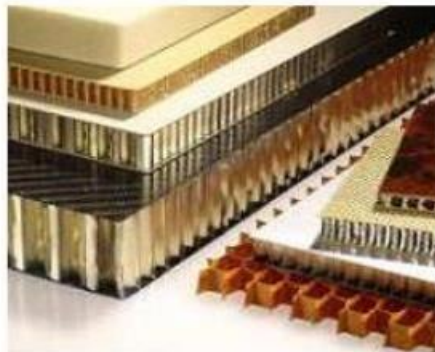


Figure I-20 :Sandwich à âmeennid d’abeille[15]



Figure I 21 : Désignations d’une âmenid d’abeilles[16]

Les matériaux composites ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les défauts principaux les plus courants sont les suivants :

- Sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV ,humidité ,température);
- Coût parfois prohibitifs (temps ,coût ,étude et mise en œuvre);
- Tolérance aux dommages (représente le point faible le plus important) ;
- Problèmes d'assemblage (grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et

I .3 Définition des matériaux FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une forme de composite où les propriétés changent progressivement avec la position. Le gradient peut être adapté pour répondre aux besoins spécifiques grâce à l'utilisation d'éléments composites. Le changement dans la propriété du matériau est provoqué par une composition chimique dépendant de la position, la microstructure ou de l'ordre atomique.

Un type de composite vise à renforcer les propriétés des matériaux en mélangeant une phase dispersée de façon homogène dans la matrice. Un autre type de composite est caractérisée par des caractéristiques différentes de matériaux sur des surfaces séparées ou dans des parties séparées. La plupart des FGM ont une composition graduellement variée entre les différents constituants. Ceci élimine l'inadéquation des propriétés des matériaux ; ainsi les contraintes thermiques (résiduelles) dans des pièces qui peuvent causer de la fatigue peuvent être diminuées de façon significative. Dans le même temps, les propriétés d'un FGM sont conçues pour répondre aux différentes exigences, lorsque ces exigences sont plus difficiles à satisfaire complètement à travers l'approche des matériaux composites ou des méthodes de traitement des matériaux conventionnels.

I .3.1 Idée générale du développement des FGM

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur La technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et L'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer Des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les Programmes aérospatiaux. Les matériaux constituants les parois des engins spatiaux sont

Appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de Température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu Pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus Grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé Pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi Élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc.

I .3.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai.

L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures Spatiales et les réacteurs à fusion.

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des Barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques ,etc....

Généralement, les FGM sont fabriqués à partir des matériaux isotropes tels que les céramiques et les métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.4

Tableau I-4 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [17].

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance thermique ; • Bonne résistance à l'oxydation ; • Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> • Élimination des problèmes de l'interface ; • Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance mécanique ; • Conductivité thermique élevée, • Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure 1.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Bochet al., 1986].

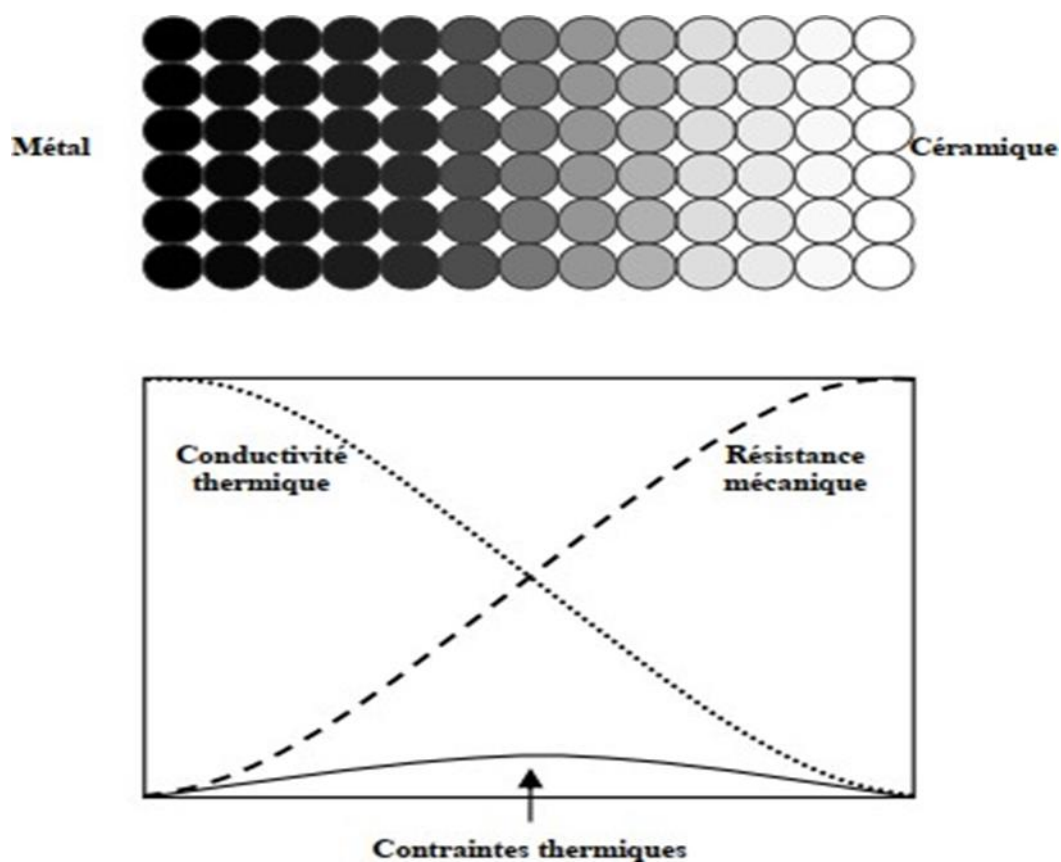


Figure I-21 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Houari, 2011]

La figure I .17 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

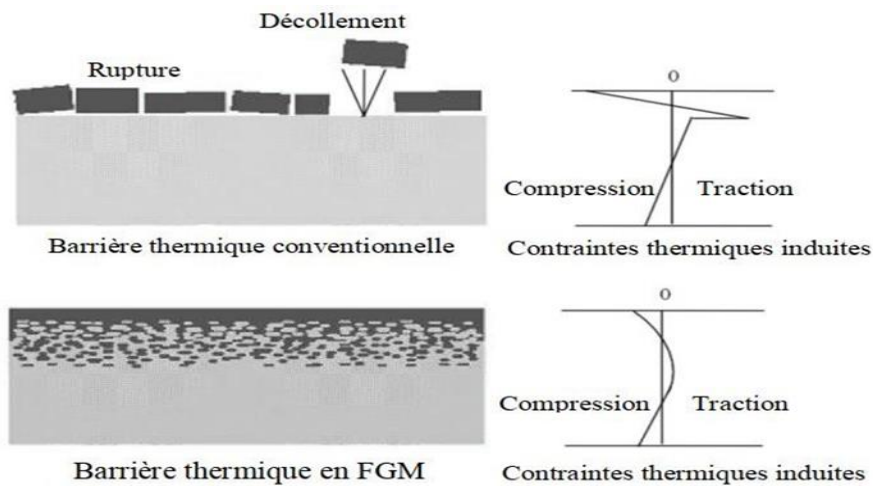


Figure I-22 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM

[Houari, 2011].

I .3.3 Domaines d’application

Des caractéristiques importantes de FGM les rendent privilégiées dans presque tous les domaines de l’activité humaine. Ils ont été initialement conçus pour l’industrie de l’aéronautique ou ils ont offert deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et l’isolation thermique dans un seul matériau.

Les matériaux à gradation fonctionnelle peuvent actuellement produit des matériau légers, solides et durables qui peuvent être appliqués dans un large intervalle de domaines tels que les matériau de construction d’énergie, l’énergie nucléaire.

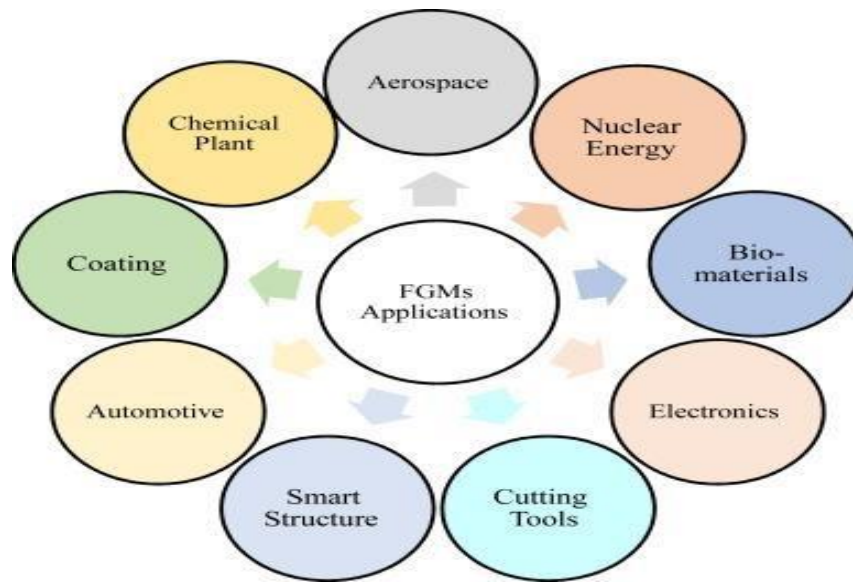


Figure I-23 : Les principaux domaines d’application des FGM.

I .3.4 Les propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux fonctionnels gradués (FGM) peuvent être produits en faisant varier en continu les constituants des matériaux multiphasiques selon un profil prédéfini. Les caractéristiques les plus distinctes d'un FGM sont les microstructures non uniformes avec des macro propriétés à gradation continue. Un FGM typique peut être définie en faisant varier progressivement les propriétés du matériau .On utilise souvent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Considérons une plaque rectangulaire élastique. Comme la montre la Figure I .25, les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, alors que l'axe z est perpendiculaire à la surface médiane de la plaque dans le sens de l'épaisseur.

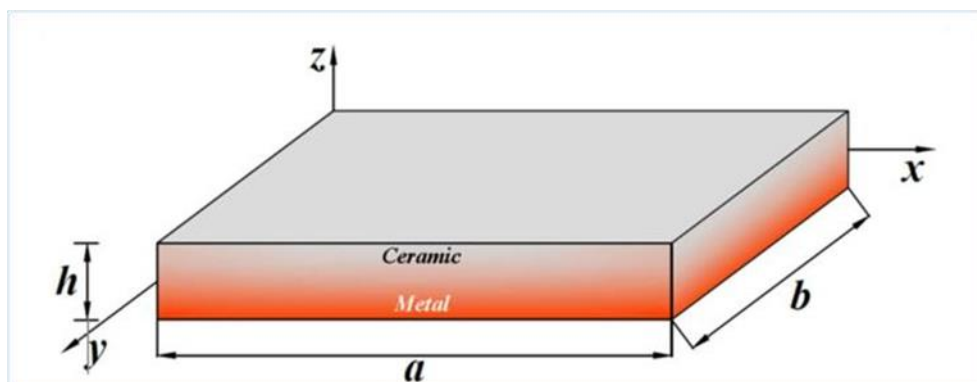


Figure I-24 : Géométrie d’une plaque en FGM

Les propriétés du matériau, le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieure et inférieure sont différents, mais sont prédéfinis en fonction des exigences de performance. Cependant, le module de Young et le coefficient de Poisson des plaques ne varient continuellement que dans le sens de l'épaisseur (axe z), c'est-à-dire $E=E(z)$, $\nu=\nu(z)$. [20] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Ainsi, le coefficient de Poisson des plaques est supposé être constant. Néanmoins, les modules de Young dans le sens de l'épaisseur des plaques de **FGM** varient avec les fonctions de loi de puissance (**P-FGM**), les fonctions exponentielles (**E-FGM**) ou les fonctions sigmoïdes (**S-FGM**) [21].

I .3.4.1 Loi de mélange en puissance ou propriété matérielle d'une structure P-FGM (Loi de puissance)

La fraction volumique de la **FGM** correspond à une fonction de loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est le paramètre matériel et h l'épaisseur de la plaque. Après avoir défini la fraction volumique locale $V(z)$, les propriétés matérielles d'une **P-FGM** peuvent être déterminées par la loi du mélange exprimée par l'équation I.2 [22] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et supérieure ($z = h/2$) de la plaque de **FGM**. La variation du module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque **P-FGM** est représentée dans la Figure I .26, ce qui montre que le module d'Young change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$ et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$ [23].

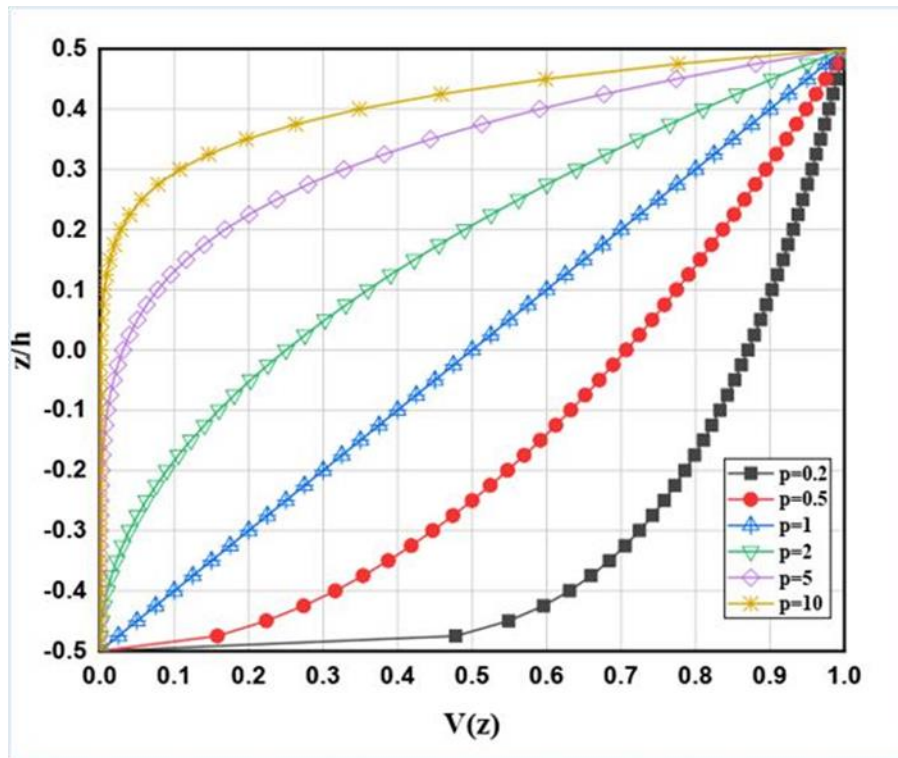


Figure I-25 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.3.4.2 Loi de mélange sigmoïde ou propriété matérielle d'une structure S-FGM (Loi sigmoïde)

Les variations des propriétés des FGM sont couramment exprimées à l'aide de la fonction de loi de puissance P-FGM. Néanmoins, dans les FGM, les concentrations de contraintes dans les FGM apparaissent à l'une des interfaces dans laquelle le matériau est continu mais change rapidement. Afin de surmonter cette difficulté et résoudre ce problème, [23] ont défini la fraction volumique sigmoïde S-FGM composée de deux fonctions de loi de puissance définies par les relations I.3:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour: } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.3.a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour: } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.3.b)$$

En appliquant la loi du mélange, le module de Young de la FGM-S peut être calculé par :

$$E_1(z) = V_1(z)E_c + (1 - V_1(z))E_m \quad \text{Pour: } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E_2(z) = V_2(z)E_c + (1 - V_2(z))E_m \quad \text{Pour: } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La Figure I .27 Présente la variation de la fraction volumique des répartitions sigmoïdes définie par les équations (I.4.aet.b).Ainsi, cette plaque FGM est appelée plaque S-FGM.

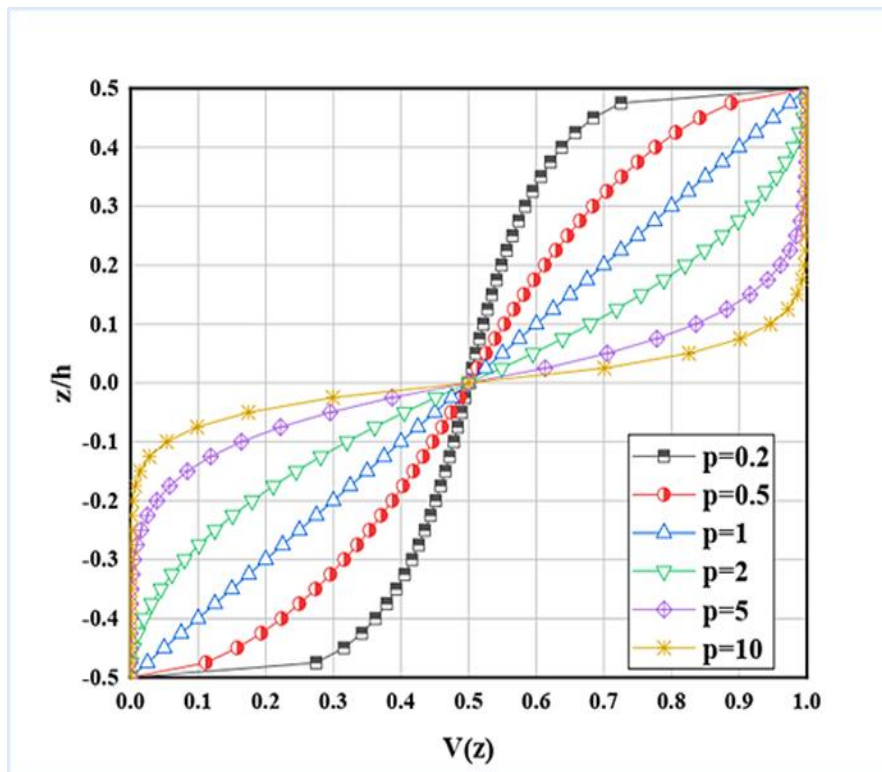


Figure I-26 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I .3.4.3 Loi de mélange exponentielle ou propriété matérielle d'une structure E-FGM (Loi exponentielle)

Cette loi s'emploie en utilisant la fonction exponentielle pour décrire les propriétés Matérielles des FGM donnée par la formule I.5 [20]:

$$(Z) = E_m \exp(\beta(z + h/2)), \quad \text{Avec : } \beta = (1/2) \ln(E_c/E_m)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur des plaques E-FGM est représentée sur la Figure I.28.

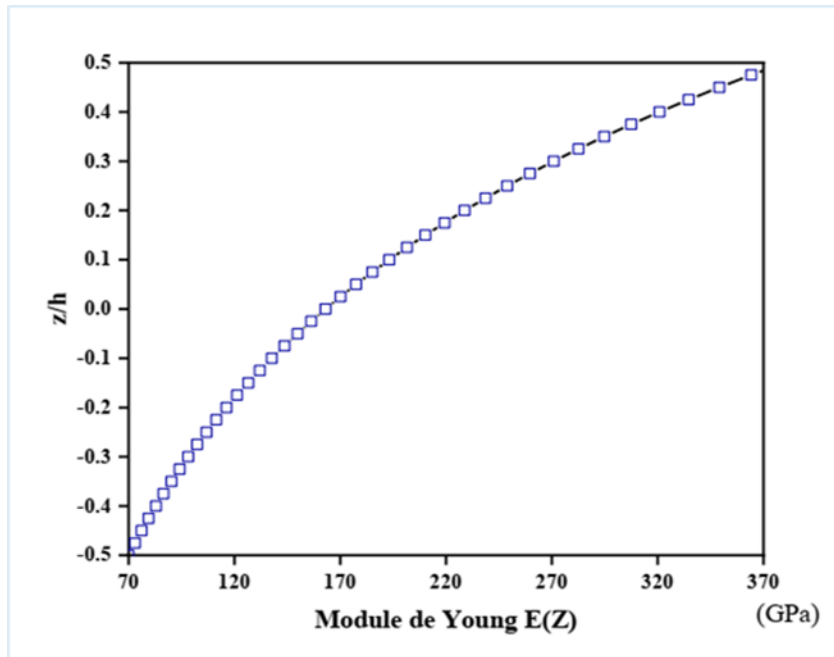


Figure I-27 : Variation de module de Young dans une plaque E- FGM.

Plusieurs théories classiques et d'ordre supérieur des plaques ont été utilisées pour étudier différents comportements des structures en FGM. Des recherches importantes sont disponibles sur les répartitions des propriétés matérielles des plaques FGM selon la loi de puissance, sigmoïde et exponentielle. Nous présentons ci-après une partie de ces travaux : Dans la grande majorité des travaux ,une fonction de puissance est utilisée pour représenter la distribution transversale des matériaux métalliques et céramiques (P-FGM) [19], [20], [21], [22]. Par conséquent, l'effet d'autres variations transversales des propriétés des matériaux sur l'instabilité des plaques rectangulaires épaisses FGM n'a pas été étudié. [23] a étudié cet effet en utilisant la TSDT pour le cas d'une plaque simplement appuyée. Une fonction sigmoïde et une fonction exponentielle sont toutes les deux utilisées pour représenter la variation des propriétés progressives transversales. L'étude paramétrique réalisée montre que la fabrication des plaques FGM avec une variation sigmoïde dans le sens de l'épaisseur augmente considérablement la charge de flambement

Cette amélioration s'avère plus significative dans le cas des plaques épaisses que dans celui des plaques minces. [24] ont présenté une étude de la flexion cylindrique non linéaire d'une plaque simplement appelée E-FGM. La plaque est soumise à une charge de pression uniforme et sa non-linéarité géométrique est introduite dans les équations de contrainte-déplacement basées sur les hypothèses de Von-Karman. Les propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées, à l'exception du coefficient de Poisson

sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur de la plaque conformément à la loi de distribution exponentielle. Dans le travail de [25] un nouveau type de plaques sandwich en S-FGM, à savoir des plaques frontales en P-FGM et un noyau dur symétrique en S-FGM ont été étudiés pour l'analyse thermomécanique de la flexion des plaques sandwich FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du même ordre. Un modèle d'éléments finis basé sur le champ de déplacement selon la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre a été utilisé pour comparer la réponse des vibrations libres des coques sandwich en FGM dont les couches inférieure et supérieure sont en métal et en céramique et dont l'âme est en FGM. Les propriétés des matériaux du noyau en FGM varient selon le modèle de loi de puissance (P-FGM) et le modèle sigmoïde (S-FGM) [26].

I .3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux composites et à gradient de propriétés «FGM », leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Dans le chapitre suivant, on exposera une revue bibliographique sur les différentes théories rencontrées dans la littérature pour l'étude de la déformation de cisaillement des plaques.

Chapitre II Les Théories des plaques

Chapitre II Les Théories des plaques**II .1.Introduction**

La modélisation d'une structure ou d'un élément de structure est un moyen de transcrire son comportement et les lois qui le régissent. Il existe de nombreuses possibilités de modélisation qu'elle soit analytique, numérique.

Dans ces dernières années beaucoup de recherches ont été effectuées pour répondre aux problèmes liés à la modélisation des structures avec une forte anisotropie. Ce chapitre présente une revue bibliographique sur les différents types de modèles ou approches employés et les théories qui s'y rattachent. En général, ces hypothèses permettent la réduction d'un problème en trois dimensions à un problème bidimensionnelle.

II .2.Définition des plaques

Les plaques sont des solides limités par deux surfaces planes parallèles dont la distance entre-elles (appelée épaisseur h) est petite par rapport aux dimensions, elle est généralement employée pour modéliser des structures minces. Les plaques peuvent être rectangulaires, circulaires, polygonales ou de forme quelconque. E

- Le plan moyen (plan médian): plan situé à équidistance entre les faces.
- La fibre neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y) , avec $z = 0$.
- Une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné, elle a pour direction z .

II .2.1 Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire d'une longueur a , largeur b et d'épaisseur h . La plaque est supposée être soumise à une charge mécanique transversale à la surface supérieure la figure II.1. Montre la Géométrie d'une plaque FGM

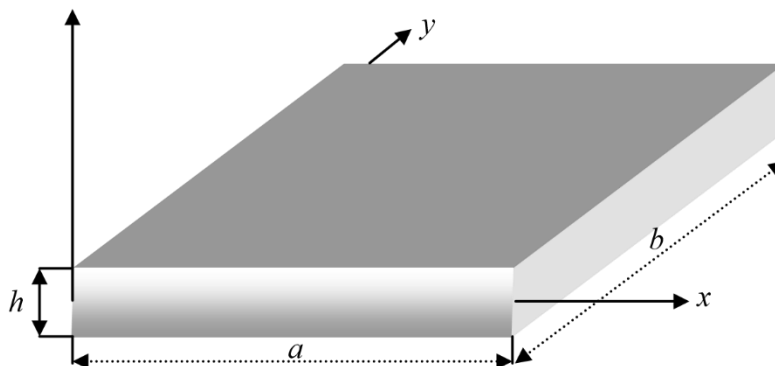


Figure II.1 Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM

II .3 Historique sur le développement des théories des plaques

Le premier à avoir établi l'énoncé mathématiquement des problèmes de plaques a probablement été à effectuer une analyse de vibration libre des problèmes de plaque [26]. Un physicien allemand, a découvert les différents modes de vibrations libres [27]. [28] a tenté de justifier théoriquement les résultats de ces expériences acoustiques. La solution de Bernoulli était basée sur les résultats des travaux précédents qui ont abouti à la théorie de flexion des poutres d'Euler-D.Bernoulli.

Le mathématicien français Germain a développé une équation différentielle des plaques qui n'inclut pas le terme de gauchissement [29]. étant l'un des critiques de son travail ,a corrigé les résultats de Germain (1813) en ajoutant le terme manquant [30] ainsi, il était la première personne à présenter l'équation générale des plaques correctement. [31] .[32] .ont été les premiers à formuler le problème de flexion des plaques sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. En1829, Poisson étendit avec succès l'équation Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous chargement statique. Cependant, dans cette solution la rigidité flexionnelle était prise égale à un terme constant.

La première théorie satisfaisante de la flexion des plaques est associée à [33], quia considéré l'épaisseur de la plaque dans l'équation générale comme une fonction de rigidité. Il a

également introduit une méthode « exacte » qui a transformé l'équation différentielle en expressions algébriques par l'utilisation de séries trigonométriques de Fourier.

En 1850, Kirchhoff a publié une importante thèse sur la théorie des plaques minces [34]. Dans cette thèse a énoncé deux hypothèses de base indépendantes qui sont maintenant largement acceptées dans la théorie des plaques en flexion et sont connues sous le nom d'hypothèses «Kirchhoff's». À l'aide de ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié l'énergie fonctionnelle de la théorie 3D de l'élasticité pour les plaques fléchies.

Le livre de Kirchhoff a été traduit par [35]. Cette traduction contient de nombreux commentaires précieux de Saint-Venant, le plus important étant l'extension de l'équation différentielle de Kirchhoff de plaques minces, qui a considéré, d'une manière mathématiquement correcte l'action combinée de flexion et d'étirement. Saint-Venant a également souligné que la série proposée par Cauchy et Poissons est en général divergente. À la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^e siècle, les constructeurs de navire ont changé leurs méthodes de construction en remplaçant le bois par de l'acier de construction. Ce changement dans les matériaux structurels a été extrêmement fructueux dans le développement de diverses théories de plaque. [36] et son étudiant ont largement contribué à la théorie des plaques minces avec des rigidités flexionnelles et Extensionnelles [37].

A apporté une contribution importante à la théorie et l'application de l'analyse de la flexion des plaques [38] et [39]. Des études approfondies dans le domaine de la théorie de la flexion des plaques et de ses diverses applications ont été réalisées par des scientifiques éminents tels que [40]. [41]. [42]. [43]. [44]. [45].

Le développement de l'industrie aéronautique moderne a donné une forte impulsion vers des enquêtes analytiques plus rigoureuses des problèmes des plaques soumises au flambement et à la vibration. [46] a mis au point une théorie rigoureuse des plaques qui tient compte des déformations causées par les forces de cisaillement transversales. Dans l'ancienne Union soviétique, les travaux de [47] et de [48] étaient principalement consacrés à la solution de problèmes non linéaires de la flexion des plaques. Les équations gouvernantes des plaques rectangulaires minces soumises à des forces de compression directes ont d'abord été dérivées

par [33]. Le problème de flambement d'une plaque simplement appuyée, soumise à des forces de compression directes et constantes agissant dans une ou deux directions, a été résolu en premier lieu par [49] en utilisant la méthode de l'énergie. [50] et [51] ont présenté des solutions à divers problèmes de flambement des plaques rectangulaires minces en compression. Timochenko et [52] et [35] ont étudié le comportement de flambement d'une plaque rectangulaire sous des forces de compression directes non uniformes. Le comportement de flambage des plaques de différentes formes a été analysé par [53]. [54]. [55].

Une équation différentielle du mouvement des plaques minces peut être obtenue en appliquant soit le principe de D'Alambert, soit la formulation de travail basée sur la conservation de l'énergie. La première solution exacte du problème des vibrations libres pour les plaques rectangulaires, dont les deux faces opposées sont simplement appuyées, a été réalisée par [56]. [57] a utilisé le problème de la vibration libre d'une plaque rectangulaire à bords libres pour démontrer sa méthode célèbre pour étendre le principe de Rayleigh pour obtenir des limites supérieures sur les fréquences de vibration. Les monographies de [58]. [59]. [60], etc., contiennent une analyse complète et des considérations de conception de vibrations libres et forcées de plaques de formes diverses.

La tendance récente dans le développement des théories de plaque est caractérisée par une forte dépendance sur les ordinateurs modernes à grande vitesse d'analyse et le développement de méthodes basées sur l'analyse

numérique, ainsi que par l'introduction de théories plus rigoureuses concernant divers effets physiques, types de charges, etc.

Le résumé ci-dessus est un aperçu très bref du contexte historique du développement de la théorie des plaques et de son application et n'inclut pas tous les travaux et recherches menés dans cet axe. Pour un historique plus détaillé et approfondi se référer ouvrages de [61]. [62].

II.4 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Bien qu'en réalité, un tel élément soit un corps tridimensionnel, l'analyse en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle n'est pas essentielle si l'épaisseur est faible par rapport aux dimensions dans le plan. En supposant des variations raisonnablement réalistes dans

l'épaisseur, des déplacements, des déformations et des contraintes, le problème peut être réduit à une analyse bidimensionnelle. Une telle théorie bidimensionnelle, le plus souvent utilisée pour l'analyse pratique, est la théorie classique des plaques (CPT), également appelée théorie des plaques minces [63], [64].

La CPT est basée sur les hypothèses [65] :

- Les lignes droites qui sont perpendiculaires à la surface médiane (c'est-à-dire les normales transversales) avant la déformation restent droites après la déformation .
- Les normales transversales ne subissent pas d'allongement (c'est-à-dire qu'elles sont inextensibles).
- Les normales transversales tournent de manière à rester perpendiculaires au milieu de la surface après la déformation.
- L'effet de l'inertie de rotation est négligeable

Ces hypothèses sont clairement résumées dans la figure II.2. Les deux premières hypothèses impliquent que le déplacement transversal est indépendant de la coordonnée transversale (ou de l'épaisseur) et que la déformation normale transversale ε_{zz} est nulle . La troisième hypothèse donne des contraintes de cisaillement transversales nulles ($\tau_{xz} = \tau_{yx} = 0$) .

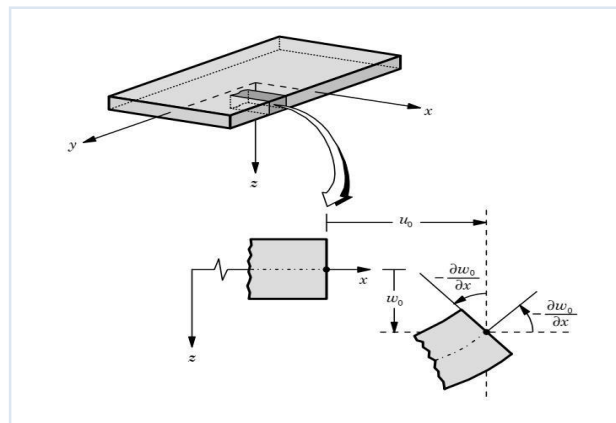


Figure II.2: Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Kirchhoff).

Le champ des déplacements requis par ces hypothèses est le suivant [66].

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Où u_0, v_0, w_0 désignent les déplacements d'un point matériel à $(x, y, 0)$ dans les directions des coordonnées (x, y, z) . Notez que (u_0, v_0) sont associés à la déformation d'extension de la plaque tandis que (w_0) désigne la déformation de flexion.

La CPT est le modèle le plus simple et il ne convient qu'aux plaques/coques FG minces où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeables. [67] ont utilisé la CPT pour étudier la réponse transitoire de plaques FG initialement sollicitées, reposant sur une fondation élastique soumise à des charges latérales impulsives. Les réponses non linéaires de flexion et de post-flambement des plaques FG reposant sur des fondations élastiques sous des charges axiales et transversales ont été étudiées par [67] en utilisant la CPT avec les hypothèses de. [68] et [69] ont utilisé le CPT pour étudier le comportement au flambement des plaques FG sous quatre types de charges thermiques et de compression. [70] ont étudié la vibration non linéaire des plaques FG dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires dérivées du CPT avec les hypothèses de Von Karman ont été résolues pour les plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires en utilisant une méthode des séries. La CPT a été également utilisé pour analyser des plaques circulaires. Par exemple, [68] ont étudié les comportements de flexion non linéaire et de post-flambement thermique des plaques circulaires FG.

sous des charges mécaniques et thermiques. [71] ont également étudié le comportement non linéaire de post- flexion des plaques circulaires FG sous des charges mécaniques et thermiques en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. [72] ont étudié la vibration en régime permanent des plaques circulaires FG dans des environnements thermiques en se basant sur la CPT et une approche semi analytique. [73] ont étudié la vibration non linéaire des coques cylindriques FG sous excitation basées sur la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode à échelle multiple

II.5. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

Les études réalisées en utilisant la théorie classique de Love-Kirchhoff ont montré que cette théorie sous-estime les déformations et surestime les fréquences naturelles et les charges de flambement pour les plaques modérément épaisses. Ces divergences sont dues à la négligence de l'effet des contraintes de cisaillement transversales, puisque (selon la théorie des poutres) il a été supposé que les normales au plan médian restent droites et normales au plan médian déformé [74]. Les principales limites de la théorie classique des plaques, évoquées ci-dessus, sont partiellement éliminées par Reissner en introduisant l'influence du cisaillement transversal et celle de la contrainte transversale σ_z . [75], [76] a fait deux hypothèses. Premièrement, il a supposé une variation linéaire du champ de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque.

Deuxièmement, il a supposé que, lorsque la plaque se fléchit, toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non- déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée (Figure II.3). Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, [77] a proposé un facteur k de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, a modifié la quatrième hypothèse de sorte que l'effet de l'inertie de rotation soit inclus [78].

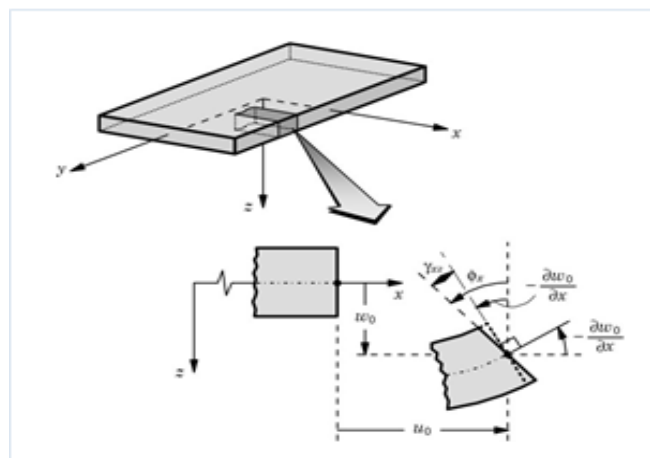


Figure II.3: Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Hypothèses de Reissner-Mindlin)

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) = \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\phi_z(x, y) \quad (\text{II.2.c})$$

Avec : u_0, v_0, w_0 et ϕ_x, ϕ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière Section par le remplacement : $\phi_x = -\partial w_0/\partial x$ et $\phi_y = -\partial w_0/\partial y$. Seule la contrainte σ_{zz} est nulle, par contre les contraintes τ_{xz} et τ_{yx} sont différentes de zéro. D'après l'équation (II.2), la contrainte de cisaillement vaut

:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \phi_x \quad (\text{II.3.a})$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G.\phi_x \quad (\text{II.3.b})$$

Les équations (II.3.a) et (II.3.b) donne des valeurs constantes pour les déformations et les contraintes de cisaillement transversales correspondantes (FigureII.4). Étant donné que la distribution réelle des contraintes dans les plaques d'épaisseur moyenne est parabolique, cette hypothèse est incorrecte. En outre, elle ne satisfait pas la condition des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque

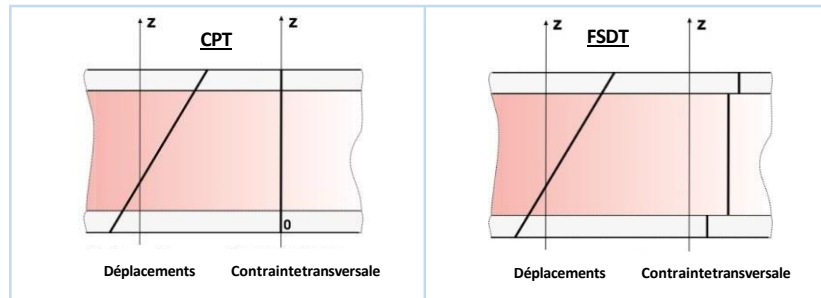


Figure II.4: Distribution du déplacement et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans les deux théories CPT et FSDT [79]

Les équations (II.3.a) et (II.3.b) donne des valeurs constantes pour les déformations et les contraintes de cisaillement transversales correspondantes (Figure II.4). Étant donné que la distribution réelle des contraintes dans les plaques d'épaisseur moyenne est parabolique, cette hypothèse est incorrecte. En outre, elle ne satisfait pas la condition des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Les facteurs de correction (CT ou FC), notés k , sont ajoutés pour corriger le décalage entre la répartition des contraintes de cisaillement transversal réelles (3D) et celles supposées dans la théorie du premier ordre. Ces facteurs sont introduits comme des paramètres dans les relations constitutives entre les forces de cisaillement transversal et les déformations de cisaillement transversal. Pour les matériaux isotropes homogènes, le premier concept de FC a été présenté par [80], [81] et [82]. Il a proposé une valeur de $5/6$ qui est largement utilisée, en employant une méthode de calcul basée sur des considérations d'équilibre statique et d'équivalence énergétique. Puis, [83] a proposé une valeur de $k = \pi^2/12$, en utilisant la méthode d'analyse dynamique pour la première fois (équivalence de fréquence propre associée au mode de vibration en CT ou de vitesse de propagation d'ondes de flexion [84]). Une autre méthode a été présentée par [85] pour calculer les facteurs de correction. Il les évalue par une comparaison entre

l'énergie de cisaillement obtenue via les équations d'équilibre et celle obtenue par la théorie du premier ordre. L'article de Birman et Bert [86] résume les différentes méthodes concernant la détermination de ces facteurs pour les poutres / plaques isotropes et sandwichs.

La FSDT est utilisé par plusieurs chercheurs pour examiner les différents comportements des structures en matériaux composites. Tel que: [87], [88], [89]. Bien que la FSDT offre une description assez précise de la réponse des plaques minces à modérément épaisses, elle n'est pas pratique à utiliser en raison de la difficulté de déterminer la valeur correcte du facteur de correction du cisaillement. Pour éviter l'utilisation du cisaillement facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.6 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Afin d'atténuer les limitations rencontrées dans les deux théories précédentes (i.e., détermination des contraintes de cisaillement transverse et leurs distributions au sens de l'épaisseur de la plaque), des théories raffinées dites "théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur" (HSDT), ont été développées par plusieurs chercheurs [90], [91]. Ces théories sont basées sur une distribution non-linéaire du champ de déplacement (Figure II.5), afin d'obtenir une meilleure représentation des déformations et des contraintes de cisaillement transverse sans recours à l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement transverse. En plus, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite de la plaque lors de la déformation [92],[93]

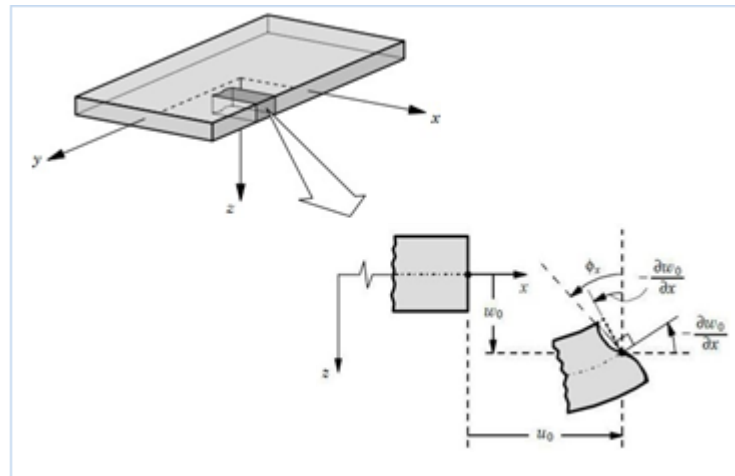


Figure II .5:Géométries des bords d'une plaque avant et après la déformation (Théorie d'ordre élevé HSDT ou TSDT, [94]).

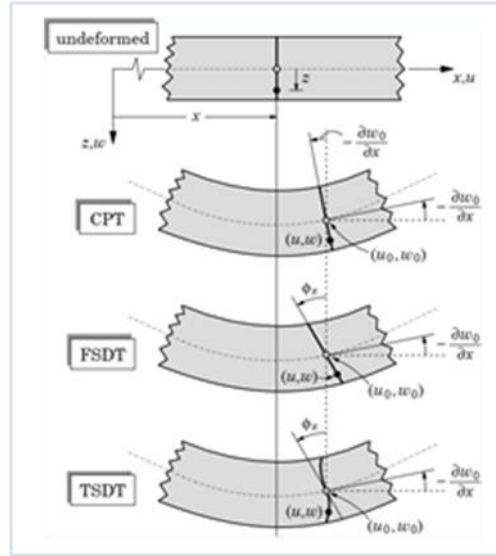


Figure II.6: Comparaison entre les différentes théories de plaques (CPT, FSDT, HSDT ou TSDT)

Le champ des déplacements est généralement :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \quad \text{II.4.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \quad \text{II.4.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad \text{II.4.c}$$

Avec : u_0, v_0, w_0 et φ_x, φ_y Sont les déplacements en membrane et les rotations autour des

axes x et y respectivement : $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x$ et $\varphi_z = \frac{\partial w_0}{\partial z} + \varphi_z$

fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes .En effet ,les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus en prenant $f(z)=0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue pour $f(z)=z$.

La théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre de Reddy (TSDT), [94], est

obtenue par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{(II.4)}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. [95] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{z}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy. [96] propose un nouveau modèle sinusoïdal (NSSDT) qui est similaire au modèle de Touratier. La fonction de cisaillement transverse est comme suit :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{Avec } m \geq 0 \quad (\text{II.6})$$

La version exponentielle de la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par [88] est obtenue avec la fonction :

$$f(z) = z e^{-\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.7})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [97] avec la fonction :

$$f(z) = \left(z \cos h\left(\frac{\pi}{z}\right) - \frac{z}{h} \sin h\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) / \left(\cos h\left(\frac{\pi}{z}\right) - 1 \right) \quad (\text{II.8})$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été développées en intégrant différentes fonctions de cisaillement transverse, sur le tableau II.1 sont exposées différentes fonctions présentes dans la littérature.

Tableau II.1:Diverses fonctions de gauchissements dans la théorie d'ordre élève.

Théories	Fonction
TSDT	
Reissner[72]	$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
HSDT	
Nguyen[98]	$f(z) = h \arctan \frac{rz}{h} - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}$
HSDPT	
Refrafi[99]	$f(z) = \left(0.1212\pi z \left[\pi - (0.135\pi)^{\frac{1}{3}} \cosh \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right] \right)$
ESSDPT	
Belkhodja[100]	$f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 - h^4} \left[e^{\left(\frac{hz}{\pi} \right)} \left(\pi^2 \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) + h^2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) - h^2 \right) \right]$
HSDT-3D	
Himeur [101]	$f(z) = \sin \left(\frac{z}{h} - \frac{4z^3}{3h^2} \right)$

On trouve les mêmes parties : le déplacement dû à l'effet de membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire. Donc, on remplace le « z » pour la théorie précédente par une fonction f(z) qu'on l'appelle «fonction de gauchissement» ou «fonction de forme». Cette dernière représente l'allure de la déformation de la section transversale, c'est ce qu'on appelle «le gauchissement», donc elle doit être impaire pour prendre la forme de « S » aplatie qui est remarquée lors de la déformation de la plaque.

La fonction de gauchissement doit aussi satisfaire les conditions aux limites de la nullité des contraintes tangentielles aux surfaces supérieur et inférieur de la plaque.

II .7.La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002, un modèle raffiné pour les plaques isotropes et qui a été nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory) [102]. Cette théorie propose des caractéristiques très intéressantes telles que la non-nécessité d'un coefficient de correction pour les contraintes de cisaillement et les similitudes avec la théorie classique

II .8.La théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)

Pour étudier le comportement exact des plaques épaisses, le plus laborieux est de trouver une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur surtout les contraintes de cisaillement sans omissions et simplifications dues à l'application de la théorie classique ou celle du premier ordre. Bien que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, reste-il que la déformation normale transverse est négligée ce qui influence directement et de manière importante la précision des résultats. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc primordial, les approches principales pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs de contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations. Les équations différentielles régissant la flexion dans le cas tridimensionnel sont tirées de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_1 = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (\text{II.09.a})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_2 = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (\text{II.09.b})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_3 = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\text{II.09.c})$$

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives offrent des avantages et des potentialités capitales, ces méthodes dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des

données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent un outil informatique puissant pour obtenir des résultats d'une très grande et satisfaisante précision. [103] et [104] ont donné des solutions tridimensionnelles exactes dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, [105], a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles, [106] a étudié des plaques en FGM épaisses se basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle de propriétés matérielles à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel).

II .9.La théorie de déformation des plaques quasi-3D

Afin d'éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle, l'approche quasi-tridimensionnelle est devenue une alternative importante, cette approche consiste en introduisant l'effet de déformation normale transverse ,a fin de définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire. De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche se base sur la jonction d'une fonction non-linéaire à la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque. En procédant de la sorte, le but est de réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En général, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale dans lesquelles est pris en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [107], [108], [109] et récemment évoluée par Demasi [110], et [111]. Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera se référer aux ouvrages de l'auteur [112] et [113]. [114] ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé. [115] ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre(FSDT),contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé.[116],et de cinq-inconnues quasi-3D . En

apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FGM, les plaques sandwichs [117] et des plaques composites stratifiées [118]. [119], ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement graduées en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z), alors la cinématique devient :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II.10.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II.10.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (\text{II.10.c})$$

Où (u₀, v₀) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque et (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et f(z) et g(z) sont des

Fonctions de cisaillement transverse avec : $g(z)=1-f'(z)$

Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les différents modèles de calcul des plaques minces et épaisses. A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations

CHPITER III:
L'analyse des
vibrations libers des
plaques en FGM

CHPITER III : L'analyse des vibrations libres des plaques en FGM

III.1 Introduction

Toute théorie d'un problème de la mécanique des milieux continus, présente comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base du système des équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords de la structure complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode facile à mettre en œuvre, permettant de calculer les distributions des déplacements et des contraintes, ainsi que les fréquences naturelles de la vibration libre des plaques en matériaux à gradient évalué qui sont des approximations de qualité de la solution exacte dans ce cas.

III.2.1 la géométrie de la plaque

Considérons une plaque rectangulaire en FGM ayant les dimensions représentées dans la Figure III.1. On suppose que la plaque a un comportement élastique linéaire. Les propriétés matérielles de la plaque FGM varient selon une distribution de puissance suivant l'épaisseur de la plaque tel que :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \tag{III.1}$$

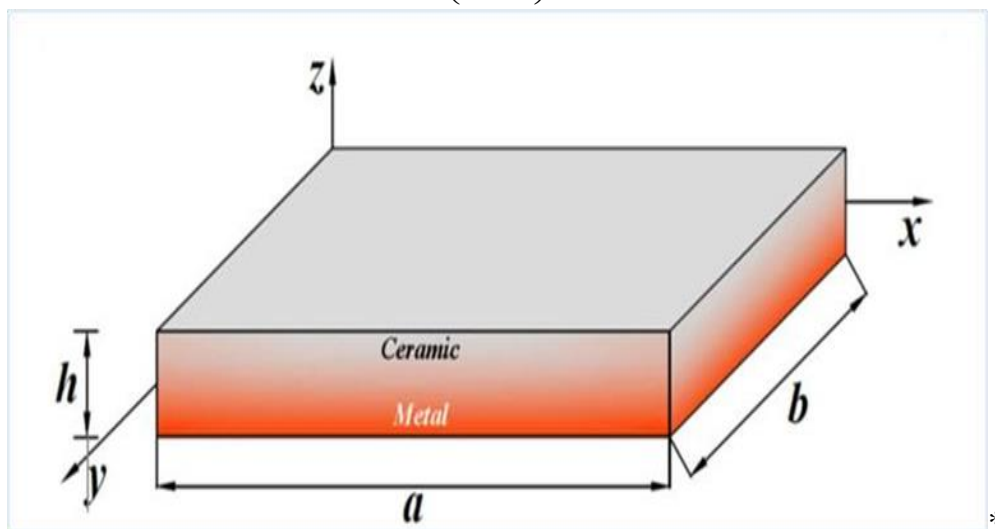


Figure III.1: géométrie d'une plaque FG rectangulaire

P : présente les propriétés matérielles tel que le module de Young E et la masse volumique ρ , les lettres m et c indiquent le métal et la céramique, les deux matériaux qui constituent les deux surfaces de la plaque inférieure et supérieure, respectivement, Ou $-h/2 \leq z \leq h/2$.

P : est l'indice de puissance, ν est le coefficient de poisson supposant constant.

III.2.2 les Equations cinématique et constitutive

En se basant dans cette étude sur la théorie des plaques d'ordre élevé (HSDT) avec la prise en considération que le nombre des inconnus est réduit.

Le champ de déplacement est exprimé par Mahi et al (2015)[129] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z) \theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z) \theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (III.2)$$

Ou :

u, v, w sont les déplacements dans les directions x, y, z .

u_0, v_0, w_0 : sont les déplacements de la surface moyenne de la plaque.

θ_x et θ_y : sont les rotations des normales de la surface neutre par rapport à y et x .

$\Psi(z)$: la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur.

III.2.3 les hypothèses de la théorie

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, les déformations engendrées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal w comprend deux composantes : w_b due à la flexion et w_s due au cisaillement transverse.
- Les rotations peuvent être s'écrire $\theta_x = -\partial w_b(x, y) / \partial x$ et $\theta_y = -\partial w_s(x, y) / \partial y$

Sur la base des hypothèses citées, le champ de déplacement s'écrit comme suit:

$$U(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (III.3.a)$$

$$V(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (III.3.b)$$

$$W(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (III.3.c)$$

Dans cette étude la nouvelle fonction de forme $f(z)$ pour notre plaque en FGM est présentée sous la forme suivante :

$$f(z) = \frac{2.z.\sinh(z/h)^2}{2.\sinh(1/4) + \cosh(1/4)}; \quad (III.4)$$

Cette fonction aide à satisfaire la nullité des efforts de cisaillement transversaux aux deux facettes de la plaque. Les distributions hyperboliques des efforts de cisaillement transversaux suivant l'épaisseur de la plaque sont prises en considération dans cette analyse à l'aide de la fonction de gauchissement proposée.

Le champ de déformation se déduit du champ de déplacement de l'équation (III.3) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yw}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.5.a)$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (III.5.b)$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (III.5.c)$$

Pour un matériau élastique et fonctionnellement gradué, les relations constitutives s'écrivent comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (III.6)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les éléments de contraintes et de déformations, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (III.1), les coefficients de rigidité C_{ij} peuvent être écrits de la manière suivante :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \quad (III.7.a)$$

$$C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2} \quad (III.7.b)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (III.7.c)$$

III.2.4 Les équations gouvernantes

Les équations gouvernantes d'équilibre peuvent être exprimé en Utilisant le principe d'énergie d'Hamilton qui dérive l'équation du mouvement de la plaque FGM :Ould Larbi et al (2013)[121] , Draiche et al (2014)[122] , Tagrara et al (2015)[123]:

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta K) dt \quad (III.8)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δV est la variation de l'énergie potentielle

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est exprimée par :

$$\delta U = \int_v [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}] dV \quad (III.9)$$

Substituant Equation (III.5.b) dans Equation ((III.9) et par intégration à travers l'épaisseur de δU la plaque, Equation ((III.9) peut être réécrit comme suit :

$$\delta U = \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta K_x^b + M_y^b \delta K_y^b + M_{xy}^b \delta K + M_x^s \delta K_x^s + M_y^s \delta K_y^s + M_{xy}^s \delta K_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA \quad (III.10)$$

Ou A : la surface supérieure et les efforts résultants N , M , et S sont définies par

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, (i = x, y, xy) \quad (III.11.a)$$

$$(S_{xz}^x, S_{yz}^x) = \int_{-h/2}^{h/2} g (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (III.11.b)$$

L'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \left[\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s) \right] \right\} \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\delta \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) - \\ &\quad J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \quad (III.12) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ &\quad + J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

$I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2$ sont les inerties massiques, définies respectivement par :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \rho(z) d(z) \quad (III.13)$$

La substitution des équations (III.10.a), (III.12.a), et (III.14.a) dans l'équation. (III.8.a), en intégrant par partie, En rassemblant les coefficients des $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s Les équations d'équilibre résultantes sont :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_a - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (\text{III.14.a})$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_a - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad (\text{III.14.b})$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 N_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_x^b}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_b}{\partial y} - \frac{\partial \ddot{v}_s}{\partial y} - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (\text{III.14.c})$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 N_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_x^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_{yz}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{yx}^s}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_b}{\partial y} - \frac{\partial \ddot{v}_s}{\partial y} - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (\text{III.14.d})$$

Ou $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ est l'opération de laplacien

En substituant l'équation (III.5.a) dans l'équation (III.6) et les résultats dans l'équation (III.11.a) les contraintes sont obtenue en tant que:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K^b \\ K^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \quad (\text{III.15})$$

Dans le quel:

$$\begin{aligned} N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, N_y^b, N_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, N_y^s, N_{xy}^s\}^t \\ \varepsilon &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \quad K^b = \{K_x^b, K_y^b, K_{xy}^b\}^t, \quad K^s = \{K_x^s, K_y^s, K_{xy}^s\}^t \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \\ B^s &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.16.a})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}^t, A^s = \begin{pmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{pmatrix} \quad (\text{III.16.b})$$

Ou Les composantes de rigidité sont définies comme :

$$\left\{ \begin{matrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^S & D_{11}^S & H_{11}^S \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^S & D_{12}^S & H_{12}^S \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^S & D_{66}^S & H_{66}^S \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} (1, z, z^2, f(z), f^2(z)) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{matrix} \right\} dz \quad (\text{III.17.a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^S, D_{22}^S, H_{22}^S) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^S, D_{11}^S, H_{11}^S)$$

$$A_{44}^S = A_{55}^S = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.17.b})$$

En substituant l'équation (III.16) dans l'équation (III.15), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacement (δu_0 , δv_0 , $\hat{\delta} w_b$, $\hat{\delta} w_s$), Les équations d'équilibre prennent la forme suivante:

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 - (B_{12}^S + 2B_{66}^S)d_{122}w_s - B_{11}^Sd_{111}w_s = I_0 \ddot{u} - I_1 d_{11} \ddot{w}_b - J_1 d_{11} \ddot{w}_s \quad (\text{III.18.a})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^S + 2B_{66}^S)d_{122}w_s - B_{22}^Sd_{222}w_s = I_0 \ddot{v} - I_1 d_{22} \ddot{w}_b - J_1 d_{22} \ddot{w}_s \quad (\text{III.18.b})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^Sd_{1111}w_s - 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S)d_{1122}w_s - D_{22}^Sd_{2222}w_s = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 (d_{11} \ddot{u}_0 + d_{22} \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_b + d_{22} \ddot{w}_b) - J_2 (d_{11} \ddot{w}_s + d_{22} \ddot{w}_s) \quad (\text{III.18.c})$$

$$B_{11}^Sd_{111}u_0 + (B_{12}^S + 2B_{66}^S)d_{122}u_0 + (B_{12}^S + 2B_{66}^S)d_{112}v_0 + B_{22}^Sd_{222}v_0 - D_{11}^Sd_{1111}w_b - 2(D_{12}^S + D_{66}^S)d_{1122}w_b - D_{22}^Sd_{2222}w_b - H_{11}^Sd_{1111}w_s - 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S)d_{1122}w_s - H_{22}^Sd_{2222}w_s + A_{44}^Sd_{11}w_s + A_{55}^Sd_{22}w_s = I_0 (\ddot{w}_b - \ddot{w}_s) + J_1 (d_{11} \ddot{u}_0 + d_{22} \ddot{v}_0) - J_2 (d_{11} \ddot{w}_b + d_{22} \ddot{w}_b) - K_2 (d_{11} \ddot{w}_s + d_{22} \ddot{w}_s) \quad (\text{III.18.d})$$

Avec d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs de dérivation données comme suit:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2) \quad (\text{III.19})$$

III.2.5 La solution analytique pour une plaque FGM simplement appuyée

Les solutions analytiques des équations (III.18) sont obtenues pour l'analyse de la vibration libre des plaques en se basant sur les séries de Fourier qui satisfirent les conditions d'appuis (la méthode de Navier).

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (III.20)$$

Ou U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , W_{smn} , sont des paramètres arbitraire a déterminer, ω est la fréquence propre associée par (m,n) mode propre ,et $\alpha = m\pi / a$ et $\beta = n\pi / b$,

En substituant le champ de déplacement (III.20) dans les équations d'équilibre (III.18), les équations de la fréquence sont obtenues comme suit :


$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m & m & m \\ m & m_{22} & m & m \\ m & m & m_{33} & m_{34} \\ m & m & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (III.21)$$

Avec:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}), S_{12} = -\alpha\beta(\alpha A_{11} + A_{66}), S_{13} = \alpha [(\alpha^2 B_{11} + \beta^2 (B_{12} + B_{66}))] \\ S_{14} &= -\alpha [(\alpha^2 B_{11}^s + \beta^2 (B_{12}^s + B_{66}^s))] , S_{22} = -(\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}), S_{23} = \beta [(\beta^2 B_{11} + \alpha^2 (B_{12} + B_{66}))] \\ S_{14} &= -\beta [(\beta^2 B_{22}^s + \alpha^2 (B_{12}^s + B_{66}^s))] \\ S_{44} &= -[D_{11}(\alpha^4 + \beta^4) + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66})] \\ S_{34} &= -[D_{11}^s(\alpha^4 + \beta^4) + 2\alpha^2\beta^2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)] \\ S_{34} &= -[H_{11}^s(\alpha^4 + \beta^4) + 2\alpha^2\beta^2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)] \\ m_{11} &= I_0, m_{13} = \beta I_1, m_{14} = -\beta J_1, m_{22} = m_{11}, m_{23} = -\alpha J_1, m_{33} = -(I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)) \\ m_{34} &= -I_0 + J_2(\alpha^2 + \beta^2), m_{41} = -\beta J_1, m_{42} = -\alpha J_1, m_{44} = -(I_0 + K_2(\alpha^2 + \beta^2)) \end{aligned} \quad (III.22)$$

III.3 Conclusion

L'analyse vibratoire des plaques FGM simplement appuyées est examinée par la théorie raffinée. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans cette théorie est de quatre, alors que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement. La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.



Chapitre IV

Résultats numériques et discussions

Chapitre IV : Résultats numériques et discussions**IV.1 Introduction**

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement vibratoire libre des plaques en matériaux à gradient évalué FGM. Le modèle ainsi choisit est basé sur le modèle hyperbolique de déformation en cisaillement à quatre variables.

IV.2 Résultats numériques et discussions

Des résultats numériques de la présente méthode sont comparés avec ceux de la littérature. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, le rapport géométrique et l'indice de gradient sur la vibration libre des plaques FGM sont tous discutés.

En premier lieu une étude comparative en confrontant les résultats de la présente méthode avec ceux de la littérature. En deuxième lieu, une étude paramétrique sera présentée pour souligner les effets des différents paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, le rapport géométrique et l'indice de gradient, sur la réponse en termes de fréquence naturelle de la plaque FGM. Pour cela, les propriétés matérielles utilisées dans cette étude sont :

Tableau IV.1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.

Propriétés	Métal	Céramique	
	Aluminum (AL)	Alumina (Al ₂ O ₃)	Zirconia (ZrO ₂)
E(GPa)	70	380	200
ρ(Kg/m ³)	2702	3800	5700

IV.3 Applications numériques et interprétations

Cette section présente plusieurs exemples numériques d'analyses de vibrations libres d'une plaque FG simplement appuyée. Le modèle proposé sera d'abord validé par la comparaison avec les données existantes disponibles dans la littérature. Pour cela, deux types de plaques FGM sont supposés : Al/Al₂O₃ et (Al)^{*}/(ZrO₂)^{*}.

Le tableau IV.1 présente les propriétés des plaques FG. Pour plus de commodité, les formes de fréquence naturelle normalisées actuelles sont utilisées. La fréquence fondamentale adimensionnelle est:

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_C}$$

$$\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_C} / h$$

IV.4.1 Études comparatives

Dans cette section, divers exemples numériques sont décrits et discutés pour vérifier la précision de la (RPT) dans la prédiction des comportements de vibration libre des plaques FG à simplement appuyée sur les quatre cotes. À des fins de vérification, les résultats obtenus par la RPT sont comparés aux données existantes dans la littérature.

Premier cas : Paramètres de fréquence fondamentale des plaques FG carrées à simplement appuyée ($a/b = 1$) pour différentes valeurs de rapports d'épaisseur ($h/a = 0,05, 0,1$ et $0,2$) sont présentés dans Tableau IV.2 lorsque $k = 0, 0,5, 1, 4$ et 10 .

Les plaques sont faites d'un mélange d'aluminium (Al) et d'alumine (Al_2O_3). Les résultats obtenus à partir de Benachour et al [124] sont utilisés. La théorie raffinée des plaques (RPT) de même que celle que nous avons utilisée; Il convient de noter que les résultats rapportés par Matsunaga [126] étaient basés sur les deux FSDT et 2D HAPT; tandis que Zhao et al. [127] ont utilisé les FSDT et ont utilisé différentes valeurs de facteurs de correction de cisaillement dans leur travail d'étude. Cependant, les résultats rapportés par Hosseini-Hashemi et al. [125] étaient basés sur la FSDT avec une nouvelle formule pour le cisaillement facteurs de correction. Pour des raisons de commodité dans la comparaison, un nouveau paramètre de fréquence est défini comme : $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_C}$.

À partir du Tableau IV.2, il peut être observé que les résultats présents (RPT) sont en excellent accord aux données existantes dans la littérature et avec ceux obtenus par la RPT, le 2D HAPT et le FSDT qui utilisent de nouveaux facteurs de correction de cisaillement.

Tableau IV.2 : Comparaison les paramètres de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ d'une plaque FG (AL/AL₂O₃) carré (a/b=1) simplement appuyée.

a/h	Theories	L'indice de puissance (k)				
		0	0.5	1	4	10
0.05	Présente	0.1480	0.01261	0.01147	0.01002	0.009508
	Benachour et al [124]	0.01480	0.01254	0.01130	0.00980	0.00940
	Hosseini-Hashemi et al.[125]	0.01480	0.01281	0.01150	0.01013	0.00963
	Zhao et al.[127]	0.01464	0.01241	0.01118	0.00970	0.00931
0.1	Présente	0.05767	0.04939	0.04506	0.03924	0.03690
	Benachour et al [124]	0.05769	0.04900	0.04417	0.03804	0.03653
	Matsunaga [126]	0.05777	0.04917	0.04427	0.03811	0.03642
	Hosseini-Hashemi et al.[125]	0.05769	0.04920	0.04454	0.03825	0.03627
	Zhao et al.[127]	0.05673	0.04818	0.04346	0.03757	0.03591
	Matsunaga [126]	0.06382	0.05429	0.04889	0.04230	0.04047
0.2	Présente	0.2112	0.1819	0.1659	0.1415	0.1318
	Benachour et al [124]	0.2112	0.1806	0.1628	0.1375	0.1300
	Matsunaga [126]	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Hosseini-Hashemi et al.[125]	0.2112	0.1806	0.1650	0.1371	0.1304
	Zhao et al.[127]	0.2055	0.1757	0.1587	0.1356	0.1284
	Matsunaga [126]	0.2334	0.1997	0.1802	0.1543	0.462

Deuxième cas : Paramètres de fréquence fondamentale de la plaque carrée FG simplement appuyée (a/b = 1 et h/a = 0.1) pour différentes valeurs des indices de gradient k = 0, 0.5, 1, 2, 5, 8 et 10 sont présentés dans le Tableau IV.3 pour deux matériaux FG (c'est-à-dire, Al/Al₂O₃ et Al/ ZrO₂). Les paramètres de fréquence fondamentale sont donnés par l'expression: $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$.

Une autre étude comparative entre les fréquences fondamentale adimensionnelle, l'excellent accord entre nos résultats et ceux trouvé dans des théories telles que : Benachour et al [124] utilisant la RPT, ainsi que celle que nous avons utilisée; Les résultats de FSDT [125] pour les plaques carrées Al/ Al₂O₃ et Al/ZrO₂ sont en bonne concordance avec la RPT actuelle par rapport à celles obtenu par FSDT Zhao et al. [127]. Cela peut s'expliquer par le fait que le facteur de correction de cisaillement est considéré comme constant dans la FSDT Zhao et al. [36] ($k^2 = 5/6$) pour toutes les valeurs des indices de gradient, tandis que dans la FSDT [125], une nouvelle formule pour la correction de cisaillement facteurs est supposé en tenant compte des indices de gradient et des rapports d'épaisseur. De plus, il peut être observé que les

fréquences fondamentales obtenues par la présente RPT montrent également un accord satisfaisant avec RPT et 2D HAPT [126] pour les plaques carré de Al/ZrO₂

Tableau IV.3 : Comparaison des paramètres de la fréquence fondamental

$\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$ pour les plaques FG carrée (a/b = 1) simplement appuyée, (h/a = 0.1).

FGMs	Theories	L'indice de puissance (k)						
		0	0.5	1	2	5	8	10
AL/Al ₂ O ₃	présent	5.7696	4.9398	4.5056	4.1382	3.8713	3.7540	3.6917
	Benachour et al [124]	5.7694	4.9000	4.4166	4.0057	3.7660	3.6831	3.6357
	Hosseini-Hashemi etal.[125]	5.7739	4.9207	4.4545	4.0063	3.7873	3.6830	3.6277
	Zhao et al.[127]	5.6763	4.8209	4.3474	3.9474	3.7218	3.6410	3.5923
Al/ZrO ₃	Présent	5.7693	5.4613	5.3588	5.3561	5.4351	5.4234	5.4004
	Benachour et al [124]	5.7694	5.4380	5.3113	5.2923	5.3904	5.3950	3.3783
	Matsunaga [126]	5.7769	-	5.3216	-	-	-	-
	Hosseini-Hashemi etal.[125]	5.7693	5.3176	5.2532	5.3084	5.2940	5.2312	5.1893
	Zhao et al.[127]	5.6763	5.1105	0.04346	4.9677	4.5549	4.4741	4.4323

IV.4.2 Étude paramétrique

Une étude paramétrique de la vibration libre des plaques FGM sera présentée pour souligner les effets des différents paramètres, notamment le rapport d'épaisseur, le rapport géométrique et l'indice de gradient sur la réponse en termes de fréquence naturelle de la plaque FGM.

L'effet de l'indice matérielle k sur les fréquences naturelle fondamentale adimensionnelle ou premier mode (m=1,n=1) des plaques FGM parfaite et imparfaite pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur (a/h=5, 10 et 20) de la plaque en utilisant la présente théorie de cisaillement d'ordre élevé sont illustrées dans les figures IV.1 et IV.2 respectivement. Ainsi que le premier mode de la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle et le mode le plus grande par rapport aux autres modes.

Tableau IV.4: Les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaques FG (AL/Al₂O₃) carrée simplement appuyée (m=n=1) pour différents rapports d'épaisseur (a/ h).

k	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$
0	5.281	5.767	5.920
0.5	4.548	4.939	5.046
1	4.148	4.506	4.587
2	3.784	4.139	4.206
4	3.537	3.924	4.010
5	3.474	3.870	3.967
8	3.35	3.750	3.863
10	3.294	3.690	3.804
15	3.193	3.560	3.680
20	3.112	3.478	3.586

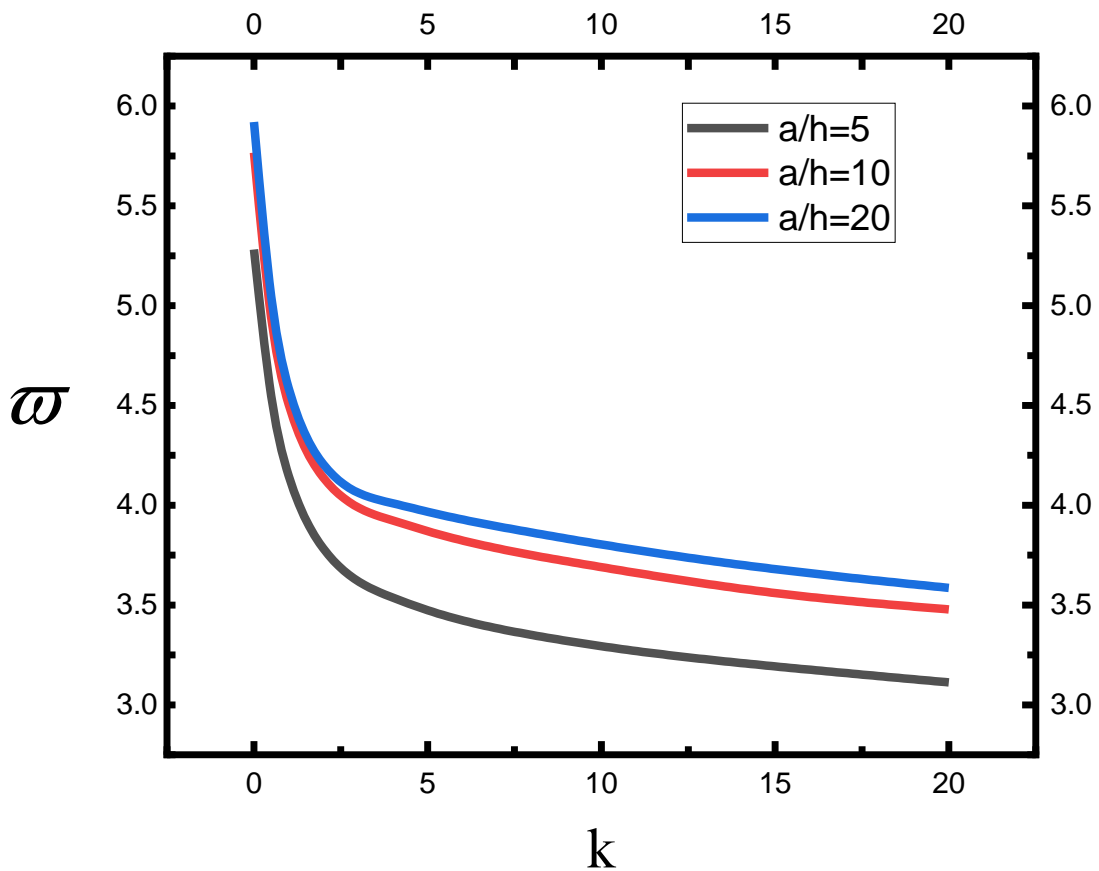


Figure IV.1: Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de l'indice de puissance k d'une plaques FG (AL/Al₂O₃) carrée simplement appuyée (m=n=1) pour différents rapports d'épaisseur (a/ h).

Il est à noter que la fréquence adimensionnelle ou premier mode diminue avec l'augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance k pour les plaques parfaites et imparfaites et cela pour les trois rapports d'épaisseur ($a/h=5, 10$ et 20). Les fréquences sont supérieures pour les plaques entièrement en céramique ($k=0$) tandis que les fréquences sont inférieures pour les plaques en métal ($k=\infty$). Cette diminution des fréquences est expliquée par l'influence de la rigidité du matériau c-à-dire une augmentation de la valeur de l'indice de puissance k conduit à une diminution du module d'élasticité de la plaque. En d'autres termes, la plaque devient flexible lorsque l'indice de loi de puissance k augmente, et diminuant ainsi les valeurs de la fréquence.

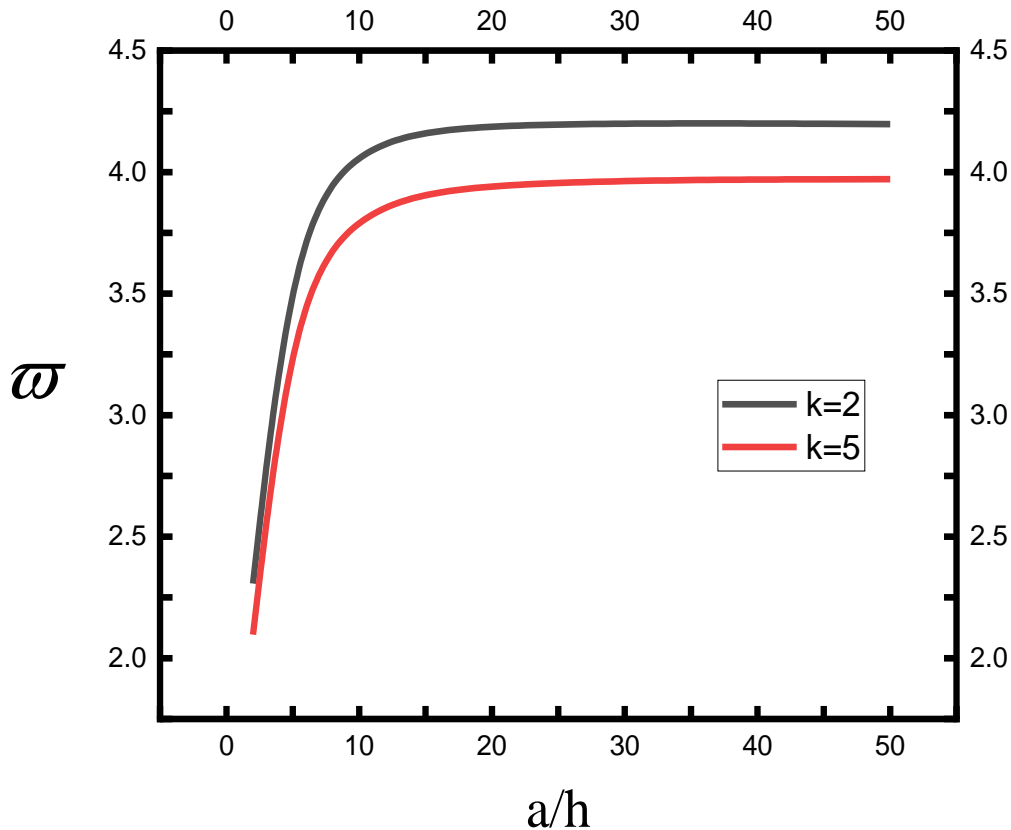


Figure IV.2: Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports d'épaisseur (a/h) d'une plaques FG (AL/ Al_2O_3) carrée simplement appuyée ($m=n=1$) pour l'indice de puissance $k= 2$ ou 5 .

Tableau IV.5: Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports d'épaisseur (a/h) d'une plaques FG (AL/ Al_2O_3) carrée simplement appuyée ($m=n=1$).

a/h	$k=2$	$k=5$
2	2.307	2.097
5	3.748	3.474
10	4.139	3.870
20	4.206	3.967
50	4.197	3.971

Les variations de fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque FG (Al / Al_2O_3) simplement appuyée sont présentés dans la figure IV. 3 en fonction de rapport géométrique pour deux valeurs d'indice de gradient (k), Nous remarquons d'après les résultats que la fréquence fondamentale de la plaque FG diminue lorsque les deux paramètres de l'indice de puissance et du rapport géométrique augmentent.

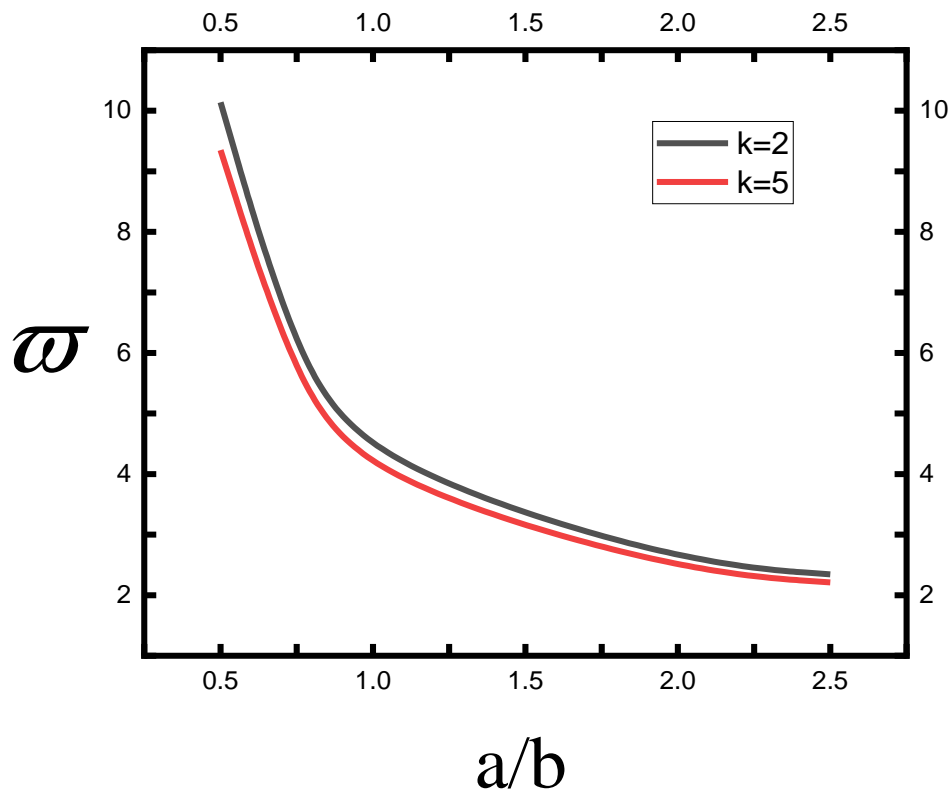


Figure IV.3: Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports géométrique (a/b) d'une plaques FG (AL/ Al_2O_3) simplement appuyée ($m=n=1$) avec l'indice de puissance $k= 2$ ou 5 .

Tableau IV.6: Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports géométrique (a/b) d'une plaques FG (AL/Al₂O₃) simplement appuyée ($m=n=1$) pour l'indice de puissance $k= 2$ ou 5 , ($a/h=10$).

a/b	$k=2$	$k=5$
0.5	10.140	9.350
0.75	5.790	5.385
1	4.130	3.870
2	2.527	2.384
2.5	2.343	2.212

Les variations de fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque FG (Al /Al₂O₃) simplement appuyée sont présentés dans la figure IV. 4 en fonction de rapport géométrique pour deux valeur de rapport d'épaisseur (a/h), Nous remarquons d'après les résultats que la fréquence fondamentale de la plaque FG diminue lorsque les deux paramètres de rapport d'épaisseur diminue et du rapport géométrique augmentent.

Tableau IV.7: Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports géométrique (a/b) d'une plaques FG (AL/Al₂O₃) simplement appuyée ($m=n=1$) pour rapport d'épaisseur ($a/h=5$ ou 12).

a/b	$a/h=5$	$a/h=12$
0.5	7.543	10.48
0.75	5.021	5.873
1	3.784	4.171
2	2.400	2.539
2.5	2.228	2.354

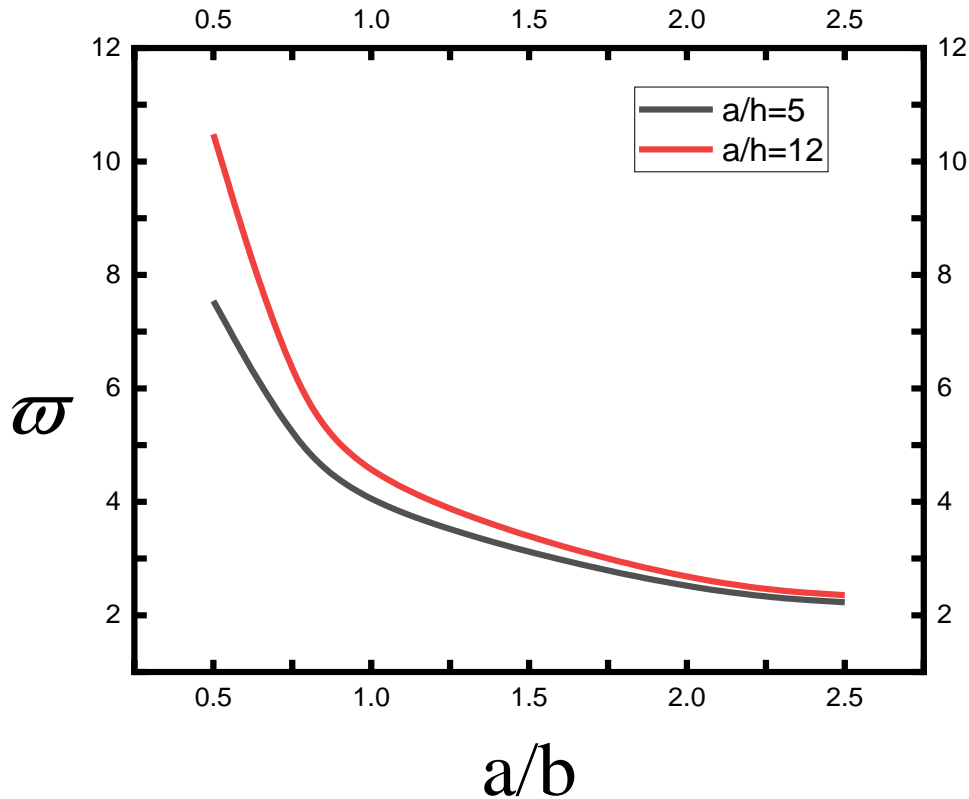


Figure IV.3: Les fréquences fondamentales adimensionnelles en fonction de rapports géométrique (a/b) d'une plaques FG (AL/ Al_2O_3) simplement appuyée ($m=n=1$) pour rapport d'épaisseur ($a/h=5$ ou 12).

L'effet du rapport d'épaisseur (a/h) de la plaque sur la fréquence de vibration est très clair dans les trois figures. Une diminution dans le rapport (a/h) conduit à une diminution dans les fréquences adimensionnelle. On peut également dire que le rapport d'épaisseur (a/h) à un effet considérable sur la fréquence fondamentale adimensionnelle. Cette dépendance est liée à l'effet de cisaillement sur la fréquence de vibration.

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, Nous avons présenté les résultats de l'analyse de la vibration libre des plaques en FGM. en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables La présente théorie à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une inscription parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte

de cisaillement nulle sur les bords libres. Toutes les études comparatives ont démontrées que les résultats obtenus en utilisant la théorie proposée à quatre variables et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est simple et efficace pour analyser la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées.

Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, le rapport géométrique et l'indice de gradient sur la vibration libre des plaques FGM sont tous discutés. A partir de ce travail, on dire que la présente théorie RPT des plaques proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement dynamique des plaques FGM. Cette étude peut être considérée comme première étape pour l'étude des structures FGM présentant des défauts de fabrication à savoir la stabilité dynamique.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail une théorie d'ordre élevé de déformation des cisaillements est utilisée pour analyser la vibration libre des plaques FGM simplement appuyé. La théorie proposée est une théorie raffiné, le nombre des inconnues et les équations du présent modèle est réduit à quatre au lieu de cinq, En décomposant le déplacement en flexion et en cisaillement, et repose sur le principe d'Hamilton. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque.

Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature.

Les principaux résultats obtenus :

- ✓ les résultats présents (RPT) sont en excellent accord aux données existantes dans la littérature et avec ceux obtenus par la RPT, le 2D HAPT et le FSDT qui utilisent de nouveaux facteurs de correction de cisaillement.
- ✓ L'augmentation de l'indice de puissance conduit à la réduction des fréquences naturelles de la plaque.
- ✓ la plaque devient flexible lorsque l'indice de loi de puissance k augmente, et diminuant ainsi les valeurs de la fréquence.
- ✓ la fréquence fondamentale de la plaque FG diminue lorsque les deux paramètres de l'indice de puissance et du rapport géométrique augmentent.
- ✓ la fréquence fondamentale de la plaque FG diminue lorsque les deux paramètres de rapport d'épaisseur diminue et du rapport géométrique augmentent.
- ✓ L'étude a également montré que le rapport d'aspect géométrique (a/b) et le rapport épaisseur/longueur (a/h) jouent un rôle crucial dans la détermination des propriétés dynamiques des plaques FGM. Les résultats ont montré que les plaques FGM la plus minces tendent à présenter une réponse vibratoire plus sensible aux variations de l'indice de gradient, tandis que les plaques plus épaisses présentent un comportement plus rigide et résistant à la déformation.

A partir de ce travail, on dire que la présente théorie RPT des plaques proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement dynamique des plaques FGM. Cette étude peut être considérée comme première étape pour l'étude des structures FGM présentant des défauts de fabrication à savoir la stabilité dynamique.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] : Benatta , M. A. (2011), “Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d’ordre élevé”, thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- [2]:https://fr.wikipedia.org/wiki/Mat%C3%A9riau_composite (2017).
- [3]: Gornet, L. (2008), “Généralités sur les matériaux composites”, ECN « Centrale Nantes » France.
- [4]:Glossaire (2006) Des Matériaux Composites - CARMA - Actualisation octobre 2006.
- [5]: Tounsi, A. (2006), “cours sur « théorie d’élasticité : Application aux matériaux anisotropes » ”, laboratoire des Matériaux et Hydrologie université de Sidi Bel Abbés.
- [6] : BOURADA Fouad (2018) « Etude de la stabilité des plaques composites épaisses en utilisant des théories de déformation d’ordre élevé », thèse de doctorat, Université Belhadj Bouchaib-Ain Témouchent,Algérie.
- [7]: Gornet,L.(2008),“Généralités sur les matériaux composites”,ECN «Centrale Nantes» France
- [8] :HILL, P.S., (2000), Introduction to Fibre Reinforced Polymer Composites for Strengthening, Carbon Fibre Composites for Structural Upgrade and Life
- [9]:Ait Atmane, H. (2011), “Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement”, thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- [10]:C.A.R.M.A., Centre d’Animation Régional en Matériaux Avancés, Glossaire des matériaux composites, Actualisation décembre 2004..
- [11] :Nguyen, TK, Sab, K., Bonnet, G. (2007), “Shear correction factors of functionally graded plates”, Mech. Advanced Mater. Struct.,14 (8),567-575.
- [12] : Okamura, H. (1991), “State of the art of material design projects for severe service applications”, Mater. Sci. Eng :A.,143 (1-2), 3-9. [13]: Koizumi, M. (1992), “Recent Progress of functionally graded materials in Japan”,Ceram. Eng. Sci. Pro., 13 (7-8),333-347.
- [13] :Kokini, K., Takeuchi, Y. (1990), “ Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads”, In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai- Japan., 31-36.
- [15]: :Bouhadra, A. (2015), “ Etude du comportement mécanique des plaques FGM ayant des coefficients de dilatation thermique variables à travers l’épaisseur”, thèse de doctorat, Université Sidi Bel Abbes, Algérie
- [16]Boch, P (1986), “ Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites”, J. Am. Ceram. Soc, 69(8),191-192
- [17]Addou FY, 2021]: ADDOU Farouk Yahia, Analyse statique et dynamique des structures FGM : formulation théorique et application dans le domaine de génie civil, Soutenue 2021, Thèse de doctorat LMD, Université djillali liabes de Sidi bel abbes.
- [18]:Bao G et Wang L, 1995]: Bao, G. et Wang, L. (1995) « Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings », International Journal of Solids and Structures, 32(19)

- [19]:Delale F et Erdogan F, 1983]: Delale, F. et Erdogan, F. (1983) « The crack problem for a nonhomogeneous plane », *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 50(3). doi: 10.1115/1.3167098.
- [20]:[Addou FY, 2021]: ADDOU Farouk Yahia, *Analyse statique et dynamique des structures FGM : formulation théorique et application dans le domaine de génie civil*, Soutenue 2021, Thèse de doctorat LMD, Université djillali liabes de Sidi bel abbes.
- [21]:.Bao G et Wang L, 1995]: Bao, G. et Wang, L. (1995) « Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings », *International Journal of Solids and Structures*, 32(19).
- [22]: [Chung YL et Chi SH, 2001]: Chung, Y.-L. et Chi, S. H. (2001) « The residual stress of functionally graded materials », *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, 13, p. 1-9 .
- [23]: [Boukhelif Z et al, 2019]: Boukhelif, Z. et al. (2019) « A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation », *Steel and Composite Structures*, 31(5). doi:10.12989/scs.2019.31.5.503.
- [24]: [Zaoui FZ et al, 2019]: Zaoui, F. Z., Ouinas, D. and Tounsi, A. (2019) « New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations », *Composites Part B: Engineering*, 159. Doi : 10.1016/ j. compositesb .2018.09.051.
- [25]: Zarga D et al, 2019]: Zarga, D., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Bourada, F. and Mahmoud, S.R. (2019), "Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 32(3), 389-410.
- [26] : Euler, L. 1766, *De motu vibratorio tympanorum*, *Novi Commentari Acad Petropolit*, vol. 10, pp. 243–260.
- [27]: Chladni, E.F. (1802), *Die Akustik*, Leipzig.
- [28]: Bernoulli, J., Jr. (1789) ,*Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies et libers*, *Nova Acta Acad Petropolit*, vol. 5, pp. 197-219.
- [29] : Germain, S. (1826), *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et équation général de ces surfaces*, Paris.
- [30]: Lagrange, J.L., *Ann Chim*, vol. 39, pp. 149–207 (1828).
- [31] : Cauchy, A.L. (1828), *Sur l'équilibre le mouvement d'une plaque solide*, *Exercices Math*, vol. 3, p. 328.
- [32] : Poisson.1829, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastique*, *Mem Acad Sci*, vol. 8, p. 357.
- [33] : Navier, C.L.M.H. (1823), *Bulletin des Sciences de la Societe Philomathique de Paris*.
- [34] : Kirchhoff, G.R. (1850), *Über das gleichewichi und die bewegung einer elastishem scheibe*, *J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51–88.
- [35] : Clebsch, A. (1883), *Theorie de l'Elasticite des Corps Solids*, Avec des Notes Entendues de Saint Venant, Dunod, Paris, pp. 687–706.

- [36] : Krylov, A.N. (1898), On stresses experienced by a ship in a sea way, Trans Inst Naval Architects, vol. 40, London, pp. 197–209.
- [37] : Bubnov, I.G.(1914) ,Theory of Structures of Ships, vol. 2, St . Petersburg.
- [38]: Timoshenko, S.P. (1915), On large deflections of circular plates, Mem Inst Ways Commun, 89.
- [39]: Timoshenko, S.P. (1913), Sur la stabilite des systemes elastiques, Ann des Points et Chaussees, vol. 13, pp. 496–566; vol. 16, pp. 73–132.
- [40]: Hencky H.: Der Spanngszustand in rechteckigen Platten (Diss.), Z. Angew Math und Mech, Vol. 1, 1921
- [41]: Huber M. T, Probleme der Statik technisch wichtiger Orthotroper Platten, Warsawa, 1929
- [42]: Von Karman T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau , Encycl der Math Wiss, Vol. 4, 1910, pp. 348–351.
- [43]: Von Karman T., E. F. Sechler, Donnel, L. H.: The strength of thin plates in compression, Trans ASME, Vol. 54, 1932, pp. 53–57.
- [44]: Nadai A.: Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten, Forsch a. d. Gebiete d Ingenieurwesens, Berlin, Vols 170 and 171, 1915.
- [45]: Föppl A.: Vorlesungen über technische Mechanik, Vols 1 and 2, 14th and 15th edns, Verlag R., Oldenburg, Munich, 1944, 1951.
- [46]: Reissner, E. (1945), The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J Appl Mech Trans ASME, vol. 12, pp. A69–A77.
- [47]: Volmir, A.S. (1956), Flexible Plates and Shells, Gos. Izd-vo Techn.-Teoret. Lit-ry, Moscow, (in Russian).
- [48]: Panov, D.Yu. (1941), On large deflections of circular plates, Prikl Matem Mech, vol. 5, No. 2, pp. 45–56, (in Russian).
- [49] : Bryan, G.N. (1981) ,On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, Proc London Math Soc, 22, 54–67.
- [50]: Cox, H.L. (1933), Buckling of Thin Plates in Compression, Rep. and Memor., No. 1553,1554.
- [51]: Bryan, G.N. (1981) ,On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, Proc London Math Soc, 22, 54–67.
- [52]: Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961), Theory of Elastic Stability, 2nd edn, McGraw-Hill, New York.
- [53]: Karman, Th., Sechler, E.E. and Nadai, L.H. (1952), The strength of thin plates in compression, Trans ASME, 54, 53–57.
- [54]: Levy, S., Bending of Rectangular Plates with Large Deflections, NACA, Rep. No.737, 1942.
- [55] : Marguerre, K. (1937), Die mittragende brieite des gedru“ckten plattenstreifens, Luftfahrtforschung, 14, N3.
- [56]: Voight, W. (1893), Bemerkungen zu dem problem der transversalem schwingungen rechteckiger platten, Nachr. Ges (Go“ttingen), No. 6, pp. 225–230.
- [57]: Ritz, W. (1909), Theorie dertransversalsch winging en, einer quadratischen platte mit frein ra“ndern, Ann Physic, Bd., 28, pp. 737–786.

- [58]: Timoshenko, S.P. and Young, D.H. (1963), *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley and Sons., New York.
- [59]: Den Hartog, J.P. (1958), *Mechanical Vibrations*, 4th edn, McGraw-Hill, New York.
- [60]: Thompson, W.T. *Theory of Vibrations and Applications*, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [61]: Timoshenko, S.P. (1953), *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York.
- [62]: Truesdell, C. (1968), *Essays in the History of Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.
- [63]: Jones, R. M. (1999). *Mechanics of composite materials* (2e éd.). Taylor & Francis
- [64]: Timoshenko S P and Woinowsky-Krieger S, (1959), *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, N- York.
- [65] : Kirchhoff, G.R. (1850), *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, *J. für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51–88.
- [66]: Reddy JN (2004) *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*. CRC Press, New York.
- [67]: Yang J, Shen HS. Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Composite Structures* 2001;54(4): 497–508.
- [68]: Yang J, Shen HS. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *International Journal of NonLinear Mechanics* 2003;38(4):467–82
- [69]: Javaheri, R. and Eslami, M.R. (a). (2002). Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *Z. Angew. Math. Mech*, 82(4), 277–283.
- [70]: Yang J, Shen HS. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *International Journal of NonLinear Mechanics* 2003;38(4):467–82
- [71] : J. Woo, S.A. Meguid, L. S. Ong, Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates, January 2006, *Journal of Sound and Vibration* 289(3):595-611,
- [72]: Ma L S, Wang Taihong, Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings, June 2003, *International Journal of Solids and Structures* 40(13-14):3311- 3330,
- [73]: Allahverdizadeh A, Naei M, Nikkhah Bahrami M. Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates. *J Sound Vib* 2008; 310(4):966e84.
- [74]: Du, C., & Li, Y. (2013). Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Composite Structures*, 102, 164–174. doi:10.1016/j.compstruct.2013.02.028
- [75]: Szilard R. *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. New Jersey: John Wiley & Sons; 2004
- [76]: Reissner E. (1975), on transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- [77]: Reissner, E. (1945), The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J Appl Mech Trans ASME*, vol. 12, pp. A69–A77.
- [78]: Mindlin, R.,(1951), Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. of Appl. Mech.*, 18 31-38.
- [79]: Wang C M, Reddy J N and Lee K H (2000), *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions* (Amsterdam: Elsevier)

- [80]: Carrera, E. and S. Brischetto,(2008), A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 62 (1) 010803-010803.
- [81]: Reissner, E.,(1985), Reflections on the Theory of Elastic Plates, *Applied Mechanics Reviews*, 38 (11) 1453-1464.
- [82]: Reissner, E.,(1972), A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates, *AIAA Journal*, 10 (5) 716-718.
- [83]: Belarbi, M.T., Développement de nouveaux éléments finis basés sur le modèle en déformation. Application linéaire et non linéaire, 2000, Thèse de Doctorat d'état, Université de Constantine.
- [84]: Ayad, R., Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France. 1993.
- [85]: Birman, V. and C.W. Bert,(2002), On the choice of shear correction factor in sandwich structures, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 4 (1) 83-95.
- [86]: M.Memar Ardestani, B.Soltani and Sh.Shams, Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method, *Composite Structures*, Volume 112, June 2014, PP 231-240,
- [87]: Hichem Bellifa, Kouider Halim Benrahou, L. Hadji, Mohammed Sid Ahmed Houari & Abdelouahed Tounsi, Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* volume 38, pages265–275 (2016).
- [88] : Abdelbari, S., Fekrar, A., Heireche, H., Said, H., Tounsi, A., & Adda Bedia, E. A. (2016). An efficient and simple shear deformation theory for free vibration of functionally graded rectangular plates on WinklerPasternak elastic foundations. *Wind & structures*, 22(3), 329-348.
- [89]: Bishop A et al, 1993]: Bishop A., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, (1993) , A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [90]: Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499.
- [91]: Bishop A et al, 1993]: Bishop A., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, (1993) , A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [92]: BERTHELOT Jean-Marie, Matériaux composites, (5^o Éd.),Comportement mécanique et analyse des structures, Date de parution : 10-2012. ISBN 978-2-7430-6450-1.
- [93] : Reddy JN. *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. CRC Press: Boca Raton, FL, 1997.
- [194]: Touratier M. (1991), An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916.

- [95]: Mantari J.L., C. Guedes Soares. (2012), Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos. Struct.* 94, 2561- 2575.
- [96] : Ait Atmane (2010), Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- [97]: Refrafi, S., Bousahla, A.A., Bouhadra, A., Menasria, A., Bourada, F., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou, K.H. and Tounsi, A. (2020), Effects of hydro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations, *Comput. Concrete*, 25(4), 311-325.
- [98]: Belkhodja Y. Ouinas D. Zaoui F, Z. and Fekirini F. (2020), An exponential-trigonometric higherorder shear deformation theory(HSDT) for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates, *Advanced Composites Letters*. 29, 1-19.
- [99]: Nabil Himeur, Belgacem Mamen, Soumia Benguediab, Abdelhakim Bouhadra, Abderrahmane Menasria, Benattou Bouchouicha, Fouad Bourada, Mohamed Benguediab and Abdelouahed Tounsi,(2022), Coupled effect of variable Winkler–Pasternak foundations on bending behavior of FG plates exposed to several types of loading, *Steel Compos. Struct.*, Vol. 44, No. 3 (2022) 339-355
- [100]: Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137–146.
- [101]: Reddy JN. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley: New York, 1984.
- [102]: Karama M., Afaq K.S., Mistou S. (2003), Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- [103]: Huang Z.Y, Lu C.F, Chen W.Q , (2008), Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations, *Compos. Struct.* 85 (95), 104.
- [104]: Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A. (2009), Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct*; 18(8):085015.
- [105]: Malekzadeh P. (2009), Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct*; 89(3):367–73.
- [106]: Zenkour AM. (2006), Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2006; 77(4):197–214.
- [107]: Carrera E, (2001), Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells, *Appl. Mech. Revs.* 54, 301-329.
- [108]: Carrera E, (2003), Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking, *Arch. Comp. Meth. Eng.* 10, 215-296.
- [109]: Carrera E, A. (2005), Ciuffreda. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Compos. Struct.* 69, 271-293.

- [110]: Demasi L. (2009a), Mixed plate theories based on the Generalized Unified
- [111]: Demasi L. (2009e), Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part II: Layerwise theories. *Compos. Struct.* 87, 12-22.
- [112]: Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. (2011a), Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Comp. Part B: Eng* 42, 123-133.
- [113]: Carrera E, Brischetto S, Nali P. (2011b), *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*, Wiley, New York, USA.
- [114]: Talha M, B.N. Singh. (2010). Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Modell.* 34 3991-4011.
- [115]: Thai, H. T., & Kim, S. E. (2013). A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Composite Structures*, 99, 172–180.
- [116]: Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), ,A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis .
- [117]: Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- [118]: Zenkour AM. (2013), A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model*; 37(20–21):9041–51.
- [119]: Zenkour AM. (2015), Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory. *Compos Struct*; 122:260–70.
- [120] : Mantari JL, Granados EV, Hinostroza MA, Guedes Soares C. (2014), Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Compos Struct*; 118:455–71.
- [121] :Larbi , L . O .,kaci , A ., Houari , M. S. A., & Tounsi, A . (2013) An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams# . *Mechines Based Design of Structures and Machines* 41(4)421-433
- [122] :Draiche , K ., Tounsi , A.,& Khalfi , Y . (2014) . A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass . *Steel and Composite Structures* , 17 (1) ,69-81 .
- [123]: Tagrara , S . H . ,Bouiadjra , A ., Bouiiadjra , M. B ., & Tounsi , A. (2015) bending , buckling and vibrartion responses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite structures 19(5),1259-1259
- [124] Benachour ,A ., Taher ,H . D ., Ait Atman , H ., Tounsi , A., & A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient . *Composites Part B : Engineering* , 42(6) , 1386-1394
- [125] Hosseini-Hashemi Sh, Rokni Damavandi Taher H, Akhavan H, Omidi M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear de formation plate theory. *Appl Math Modell* 2010;34(5):1276–91.

[126] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos Struct* 2008;82:499–512.

[127] Zhao X, Lee YY, Liew KM. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J Sound Vib* 2009;319:918–39.