

---

**Université ABBES LAGHROUR Khenchela**



جامعة عباس لغرور خنشلة  
Faculté de Sciences et Technologie  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
Département de Génie Mécanique  
قسم الهندسة الميكانيكية



# Mémoire

de fin d'études Pour l'obtention du diplôme  
**MASTER (LMD)**

**Spécialité : Génie Mécanique**

**Option : Construction Mécanique**

Thème

---

Analyse et optimisation des structures  
en treillis à n éléments

---

Réalisé par :

- Mahfoud zineddine
- Saadaoui youcef

Dirigé par : M. GROUN Brahim

Membres de jury

- |                          |            |
|--------------------------|------------|
| -Pr. CHIHAOUI Walid      | Président  |
| -M.C.A. MEDDOUR Belgacem | Examineur  |
| - M.A.A. GROUN Brahim    | Rapporteur |

---

**Année universitaire : 2021-2022**

---



# Remerciement

*EN TOUT PREMIER LIEU, ON REMERCIE LE BON DIEU TOUT MISÉRICORDIEUX DE M'AVOIR ACCOMPAGNÉE ET ACCORDÉE LA PATIENCE ET LE COURAGE POUR VOIR ENFIN, LE BUT DE CE TRAVAIL.*

*ON TIENT À REMERCIER TOUS CEUX QUI ONT CONTRIBUÉ DE PRÈS OU DE LOIN À METTRE EN LUMIÈRE CETTE RECHERCHE, EN PRODIGUANT DES CONSEILS, EN ENCOURAGEANT LES MOMENTS SENSIBLES DE NOTRE PARCOURS UNIVERSITAIRE.*

*À NOTRE ENCADRANT **MR, GROUN BRAHIM***

*POUR NOUS AVOIR SUIVIS DANS NOTRE TRAVAIL SOUS CE BRIEF, POUR CES PRÉCIEUX CONSEILS, POUR SA DISPONIBILITÉ ET L'EFFICACITÉ DE SON ENCADREMENT, POUR LESQUELS VOUS TROUVÉREZ ICI NOTRE GRATITUDE ET NOTRE RESPECT.*

*NOUS REMERCIONS ÉGALEMENT **TOUS LES PROFESSEURS DU DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE** À TOUS CEUX QUI M'ONT AIDÉ À SURMONTER TOUS LES OBSTACLES AU COURS DE CE TRAVAIL.*

*ON REMERCIE CHALEUREUSEMENT **TOUS LES MEMBRES DU JURY** D'AVOIR ACCEPTÉ DE NOTER CE MODESTE TRAVAIL. ON LES REMERCIE ÉGALEMENT D'AVOIR PRIS LE TEMPS DE LIRE ET D'ENRICHIR CET ARTICLE DE LEURS COMMENTAIRES.*

*S'IL VOUS PLAÎT PARDONNEZ-MOI TOUS CEUX QUE J'AI OUBLIÉ DE MENTIONNER, ON ESPÈRE QU'ILS COMPRENENT ENFIN, UN GRAND MERCI À TOUS CEUX QUI ONT CONTRIBUÉ À CET HUMBLE TRAVAIL D'UNE MANIÈRE OU D'UNE AUTRE*

*Merci du fond du cœur*



# Dédicace

*Je dédie ce travail de master à :*

***Mon père Lakhder***

*La femme la plus affectueuse et la plus douce au monde, l'ange  
le plus tendre qui a été toujours pour moi une source d'amour et  
d'espoir ; **ma très chère mère Fedda***

*A mes frères : Lotfi et Anis , mes sœurs : Takwa et Zineb*

***A mes oncles***

***A mes tentes***

***A Toute ma famille***

***A tous mes amis***

***Youcef, Moumen, Bilal, Zohir, Abd  
elhak***

***Zineddine Mahfoud***

# Dédicace

*Je dédie ce travail de master à :  
Les personnes les plus affectueuses et les plus douce au  
monde, l'ange le plus tendre qui a été toujours pour moi une  
source d'amour et d'espoir ;*

*Mes parents*

*Et à mes sœurs et mon freres*

*A mes oncles*

*A mes tentes*

*A tous mes amies zineddine et omar,*

*A Toute **ma** famille.*

*Saadaoui Youcef*

# Sommaire

*Remerciements*

*Dédicace*

*Sommaire*

*Liste des Figures*

*Liste des Tableaux*

*Introduction générale .....1*

## **Chapitre 01 : Rappel sur les Treillis**

1. Introduction.....	2
1.1. DEFINITION.....	2
2. type de treillis.....	3
2.1. Ferme de pont :.....	3
2.2. Ferme de Toit : .....	4
2.3. Grues :.....	6
3. Méthode des sections pour les treillis plans :.....	7
3.1. Méthode des nœuds :.....	8
3.2. Méthode des sections de Ritter :.....	8
3.3. Épure de Cremona (plan des forces) :.....	9
4.1. Construction : .....	10
4.2. Assemblage :.....	11
4.3. Chargement :.....	12

## **Chapitre 02 : calcul de treillis**

I. calcul de treillis .....	13
1. Inspection des treillis :.....	13
2. Systèmes isostatiques et hyperstatiques :.....	13
2.A. Système isostatique :.....	13
2.B. Système hyperstatique : .....	14
2.C. Système instable :.....	14
3. Calcul du degré d'hyperstaticité d'un treillis :.....	15
4. Résolution des treillis isostatiques .....	15
II. Calculs statique des treillis par la RDM : .....	19
1. Théorèmes énergétiques de la RDM : .....	19
2. Théorème de Maxwell – Betty :.....	19

2.1. Illustration du théorème de Maxwell-Betty :	20
3. Théorème de Castigliano :	20
4. Théorème de Ménabréa :	20
5. Exemple	21

### **Chapitre 03 : Calcul des structures par éléments finis**

III. Élément fini de barre pour le calcul des treillis :	26
1. introduction à l'élément de barre :	26
2.Équilibre de l'élément barre :	26
3.Etude de deux barres :	28
3.1 Assemblage des matrices de rigidité élémentaires :	28
3.2 Mise en œuvre pratique :	30
3.3 Élément barre pour le calcul des treillis plans :	31

### **Chapitre 04 : Application**

IV.1 Introduction	34
IV.2 Présentation de la méthode et validation du programme	34
IV.2.1 Analyse du problème	35
IV.2.2 Calcul de la matrice raideur	37
IV.2.3 Résolution	39
IV.2.4 Post-traitement	42
IV.3 Validation du programme	43
IV.3.1 Introduction des données	43
IV.3.1.1 Tableau de connectivité	44
IV.3.1.2 Tableau de coordonnées des nœuds	44
IV.3.2 Organigramme du programme	44
IV.3.3 Résultats	46
IV.3.4 Comparaison des résultats en déplacements et en réactions aux appuis	47
IV.4 Analyse et optimisation d'une structure en treillis	47
IV.4.1 Tableau de connectivité	48
IV.4.2 Tableau de coordonnées	49
IV.4.3 Résultat de l'analyse	50
IV.4.4 Interprétation des résultats	52
IV.4.5 Tableau de connectivité	54

<i>IV.4.6 Tableau de coordonnées</i> .....	54
<i>IV.4.7 Résultat de l'analyse</i> .....	55
<i>IV.4.8 Interprétation et comparaison des résultats</i> .....	57
<b>Conclusion</b> .....	<b>58</b>
<b>Références Bibliographiques</b> .....	<b>59</b>

## Liste des figures

### Chapitre 01 : Rappel sur les Treillis

<i>Figure I.1</i> : Structure polygone et triangle .....	2
<i>Figure I.2</i> : Exemple d'un treillis .....	3
<i>Figure I.3</i> : ferme de pont .....	4
<i>Figure I.4</i> : ferme de toit.....	4
<i>Figure I.5</i> : grues.....	6
<i>Figure I.6</i> : treillis simple. ....	6
<i>Figure I.7</i> : treillis composé. ....	7
<i>Figure I.8</i> : treillis de barres chevauchant .....	7
<i>Figure I.9</i> : treillis de barres chevauchant. ....	7
<i>Figure I.10</i> : méthode des nœuds.....	8
<i>Figure I.11</i> : méthode des sections de Ritter.....	9
<i>Figure I.12</i> : Épure de Cremona (plan des forces). ....	10
<i>Figure I.13</i> : construit d'un treillis.....	11
<i>Figure I.14</i> : Assemblage des treillis. ....	11
<i>Figure I.15</i> : charge sur les treillis.....	12

### Chapitre 02 : Calcul des treillis

<i>Figure II.1</i> : système isostatique .....	14
<i>Figure II.2</i> : système hyperstatique .....	14
<i>Figure II.3</i> : système instable.....	15
<i>Figure II.4</i> : Méthode des sections.....	16
<i>Figure II.5</i> : Méthode générale.....	16
<i>Figure II.6</i> : Méthode générale.....	17
<i>Figure II.7</i> : Méthode générale.....	17

### Chapitre 03 : Calcul des structures par éléments finis

<i>Figure III.1</i> :Exemple de calcul par éléments finis d'un élément barre. ....	26
<i>Figure III.2</i> :Élément barre à 2 nœuds.....	26
<i>Figure III.3</i> :Deux barres en traction.....	29
<i>Figure III.4</i> :Élément barre dans une base globale. ....	31

## **Chapitre 04 : Application**

<b>Figure IV.1 : treillis à trois barres .....</b>	<b>35</b>
<b>Figure IV.2 : Treillis à 3 barres déplacements nodaux.....</b>	<b>35</b>
<b>Figure IV.3 : Efforts nodaux connus et inconnus.....</b>	<b>36</b>
<b>Figure IV.4 : Structure initiale et structure déformée.....</b>	<b>46</b>
<b>Figure IV.5 : Structure initiale et structure déformée Structure non optimisée .....</b>	<b>57</b>

## Liste des tableaux

<b>Tableau IV.1</b> .....	44
<b>Tableau IV.2</b> .....	44
<b>Tableau IV.3</b> .....	49
<b>Tableau IV.4</b> .....	50

# *Introduction générale*

### *Introduction générale*

Un treillis, ou système triangulé, est un assemblage de barres verticales, horizontales et diagonales formant des triangles, de sorte que chaque barre subisse un effort acceptable, et que la déformation de l'ensemble soit modérée.

Cette structure est devenue courante en construction à partir de la révolution industrielle, pour des ponts, fuselages d'avion, etc. En effet, un tel assemblage présente une résistance, rigidité et légèreté, et permet d'utiliser des éléments normalisés (barres) ; par ailleurs, le treillis peut éventuellement être pré assemblé.

Lorsqu'un treillis est soumis à un effort, certaines parties de l'assemblage sont mises en compression et d'autres parties en tension. Par exemple, dans le cas d'un pont en treillis, les poutres supérieures sont comprimées, les poutres inférieures sont tendues, et les pièces en diagonale évitent le vrillage des poutres principales.

Les axes des barres concourent en nœuds; ce sont les points d'assemblage des barres. D'un point de vue mécanique, les nœuds sont modélisés par des articulations parfaites. Initialement, pour simplifier les calculs, les charges n'étaient appliquées qu'aux seuls nœuds; l'utilisation de la méthode des éléments finis permet de s'affranchir de cette simplification.

Les calculs de treillis ou structures sont une application de la mécanique statique. Pour mener les calculs, on considère les hypothèses suivantes :

- le poids des barres est négligé ;
- les liaisons sont toutes des rotules (ou des pivots dans le cas d'un treillis plan), les barres peuvent librement tourner les unes par rapport aux autres ; en effet, même si les poutres sont fixes entre elles, si l'on applique un effort transversal à une extrémité d'une barre, le moment de la force à l'autre extrémité et la concentration de contrainte à l'angle feront que l'articulation bougera, ce qui mènera à la rupture ;
- les charges extérieures sont appliquées aux nœuds.

Ces hypothèses sont indispensables pour les calculs à la main. L'utilisation de logiciels permet de s'affranchir de ces hypothèses, notamment en prenant en compte la déformation des barres. La résistance de chacune des barres relève de la résistance des matériaux. Par contre, ces hypothèses restent la base des calculs de stabilité.

Notre travail consiste à calculer et analyser de telles structure tout en se basant sur les lois de la statique pour développer une application de calcul qui nous facilite la tâche afin de faire un calcul rapide qui nous permet à partir des résultats d'intervenir afin d'optimiser et améliorer une structure en treillis.

Ce modeste travail est composé de quatre chapitres dont le premier chapitre est consacré à un rappel sur les treillis, le deuxième chapitre révèle la méthode de calcul des structures en treillis à partir des lois de la statique pour les systèmes isostatiques. Le chapitre troisième expose le calcul des treillis par la méthode des éléments finis et enfin le quatrième chapitre consiste à traiter ce genre de structures en appliquant la méthode des éléments finis.

\*

# *Chapitre I*



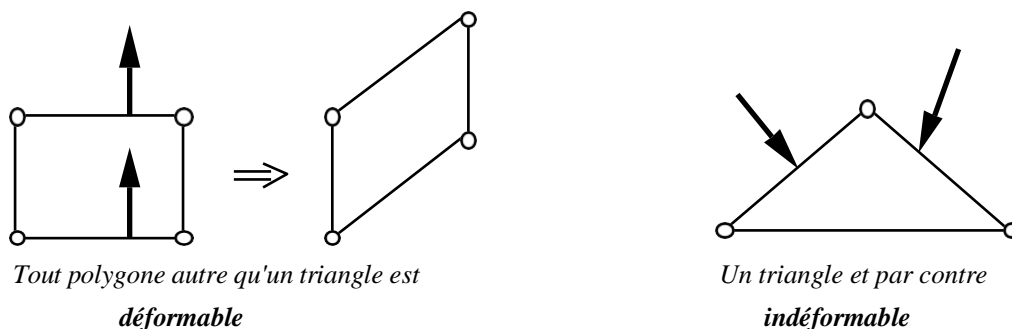
*Treillis*

## 1. INTRODUCTION

### 1.1. DEFINITION

Les treillis sont très largement utilisés en construction. Qu'il s'agisse de structures faites d'acier, de bois ou autre, les treillis se retrouvent dans les fermes de toiture, de grues, de ponts roulants, de pylônes, etc. On fait appel à ce mode de réalisation dans le but essentiel d'alléger l'ensemble d'une construction tout en assurant une plus grande stabilité.

Les treillis sont des structures dont les pièces sont assemblées de façon à former des triangles. Le triangle a été pris comme base de ces constructions parce qu'il est la seule figure géométrique indéformable.



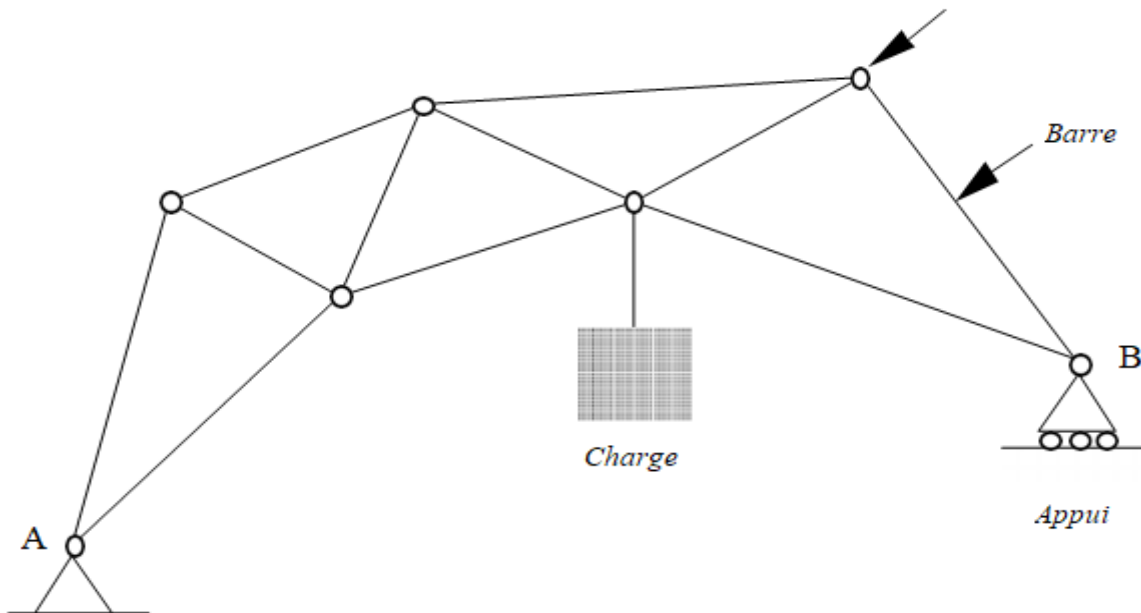
*Figure 1.1 : structure polygone et triangle*

Les treillis peuvent être sollicitées par des forces **externes** comme les charges à supporter, le poids propre de la structure, le poids de la neige, le trafic, les réactions d'appuis, ... tandis que les pièces de ces structures sont soumises à des forces **internes** de la part des pièces voisines. Ces efforts internes et externes doivent être déterminées pour pouvoir **choisir** les matériaux requis dans la réalisation des constructions. Des pièces trop grosses ne sont pas économiques par contre des pièces trop petites ne sont pas sécuritaires.

*Définitions:*

Barres ou membrures: Les pièces d'une structure triangulée sont des barres. Elles sont faites d'acier, de bois ou autre. On associe généralement les barres ou membrures des treillis à des barres articulées.

Nœuds: Le point de rencontre de deux ou plusieurs barres s'appelle un nœud. Les nœuds peuvent être fait de joint solide (assemblage par rivetage, soudage,...) ou des articulations (assemblage par rotule, axe, ...)<sup>[1]</sup>



*Figure I.2 : exemple d'un treillis*

## 2. TYPE DE TREILLIS

Les treillis peuvent être classés en plusieurs catégories comme par exemple :

### 2.1. Ferme de pont :

Dans ce type on trouve les treillis suivants :

\* **Treillis Pratt** : dans ce treillis, les diagonales sont en traction sous l'action des charges gravitaires. Il est donc utilisé pour des actions descendantes prédominantes.

\* **Treillis Howe** : les diagonales sont tendues sous l'action des charges ascendantes. Cette solution est utilisée pour des situations où le soulèvement est prédominant (bâtiments ouverts par exemple).

\* **Treillis Warren** : dans ce type de treillis, les diagonales sont soit tendues, soit comprimées. Cette forme est également utilisable comme treillis horizontal de poutres de roulement.

\* **Treillis en K**<sup>[2]</sup>.

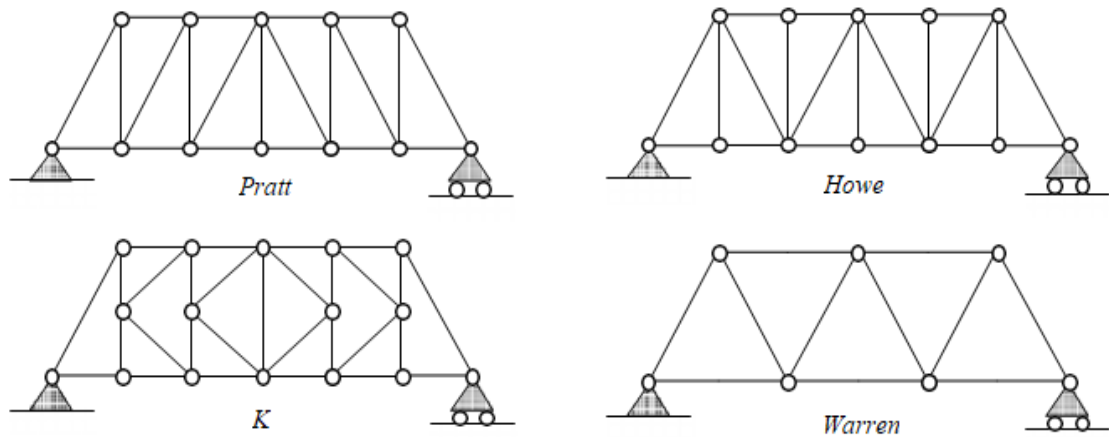


Figure 1.3 : ferme de pont

## 2.2. Ferme de Toit :

Les fermes de toit sont utilisées depuis plus de 50 ans dans l'industrie de la construction de bâtiments et offrent de nombreux avantages.

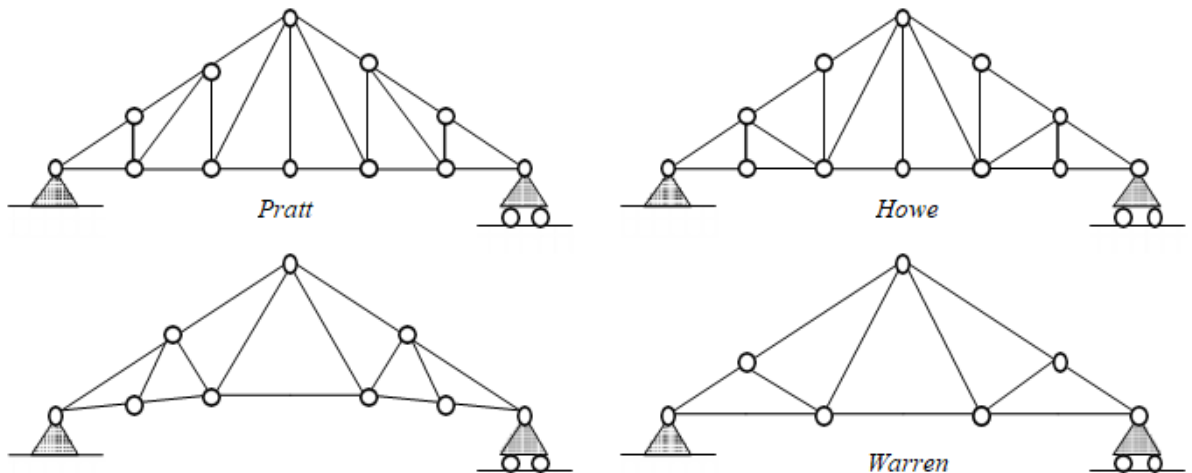


Figure 1.4: ferme de toit

Voici aussi quelques-uns des types de fermes de toit les plus populaires :

### Ferme de toit standard :

Les fermes de toit standard sont fiables et polyvalentes. Elles offrent une portée pouvant aller jusqu'à 72 pieds (22 mètres) et leur conception triangulaire simple les rendent faciles à intégrer à plusieurs types de projets de construction.

### Ferme de toit de grange :

Les fermes de toit de grange sont tout indiquées pour ériger plus facilement des bâtiments agricoles ou résidentiels au profil semblable à celui d'une grange.

## **Ferme de toit habitable :**

Comme leur nom l'indique, les fermes de toit habitables permettent de créer un espace habitable dans les combles. La membrure inférieure de ce type de ferme est utilisée comme solive de plancher et les entretoises de soutien constituent les murs de la pièce à aménager.

## **Ferme de toit ciseaux :**

Les fermes de toit en ciseaux sont souvent habituellement utilisées pour créer un effet de plafond cathédrale dans un bâtiment. Elles n'ont pas à être installées sur des poutres ou des murs porteurs.

## **Ferme de toit plate :**

Les fermes de toit plates sont fréquemment utilisées pour construire des toitures plates, mais servent aussi parfois dans la construction de planchers. Elles peuvent être dotées d'une faible pente permettant de compenser la déflexion et assurant un drainage positif.

## **Ferme de toit cathédrale :**

Les fermes de toit cathédrale sont idéales pour créer un effet de hauteur dans un bâtiment résidentiel ou commercial. Leur principale différence avec les fermes de toit ciseaux est la présence d'une poutre horizontale.

## **Ferme de toit deux hauteurs :**

Lorsque les fermes de toit possèdent des dimensions verticales trop importantes pour être fabriquées et/ou livrées, elles peuvent être conçues en deux parties. Appelées fermes de toit deux hauteurs, ces éléments de charpente doivent toutefois être assemblés sur le chantier, mais offrent un rendement comparable aux fermes de toit standard livrées en un seul morceau.

## **Ferme de toit monopente :**

Les fermes de toit monopente possèdent un profil semblable à un triangle rectangle (triangle à angle droit). En réalité, elles représentent une moitié de ferme standard. Ce type de ferme de toit est souvent utilisé dans la construction de hangars, de garages ou pour ajouter une extension à une toiture existante<sup>[3]</sup>.

## 2.3. Grues :

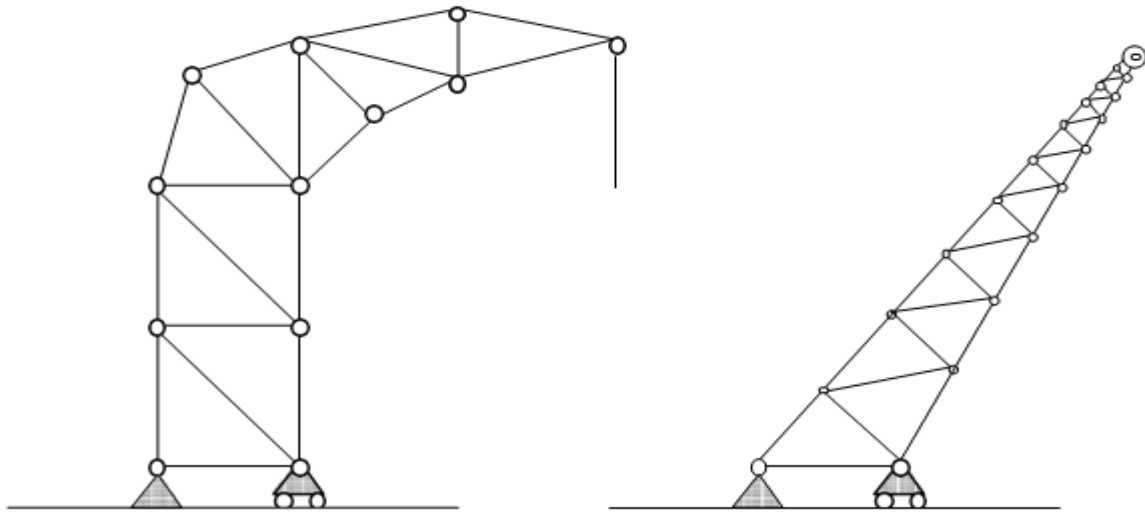


Figure I.5 : grues

Il existe trois grandes catégories de treillis plans : le treillis simple, le treillis composé et le treillis formé de barres qui se chevauchent.

- **Le treillis simple est formé uniquement de mailles triangulaires :**

Si le nombre de réactions d'appui ne dépasse pas trois, ce type de treillis est le plus souvent isostatique. Il existe toutefois des exceptions comme le montre la figure ci-contre : il s'agit d'un treillis simple qui se referme sur lui-même et dont le degré d'hyperstaticité interne est égal à 3

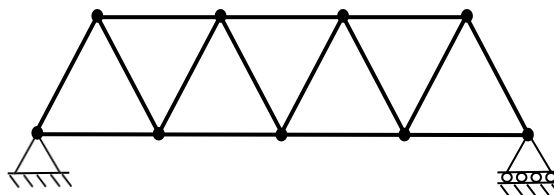


Figure I.6 : treillis simple

- **Le treillis composé résulte de l'assemblage de treillis simples :**

Un tel treillis peut être isostatique (c'est le cas du treillis ci-contre) ou hyperstatique.

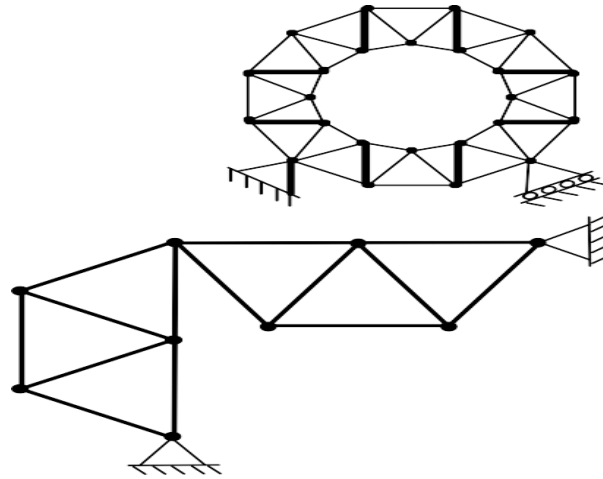


Figure I.7: treillis composé

- Le treillis formé de barres qui se chevauchent sans être reliées physiquement :

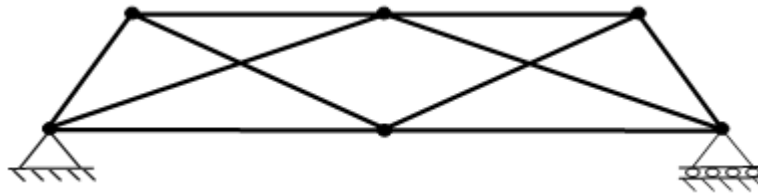


Figure I.8 : treillis de barres chevauchant

Un tel treillis peut être isostatique ou hyperstatique : dans le cas ci-dessus il est hyperstatique de degré 1.

Le treillis ci-dessous, par contre, est isostatique. Il est toutefois qualifié de complexe car il ne peut être analysé ni par la méthode de Cremona ni par la méthode des sections. Seule une méthode matricielle lui est applicable<sup>[4]</sup>.

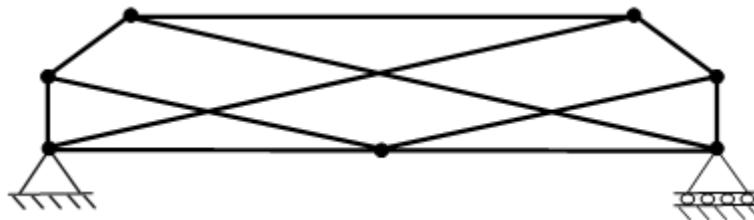


Figure I.9 : treillis de barres chevauchant

### 3. Méthode des sections pour les treillis plans :

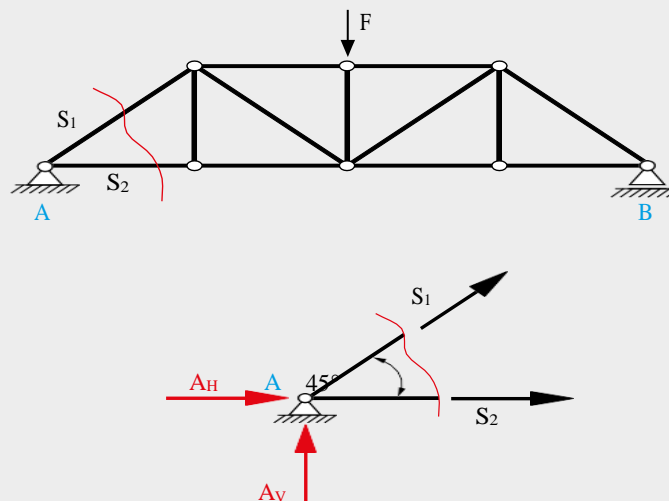
Les treillis plans sont des structures porteuses composées exclusivement de barres droites. Les barres sont reliées entre elles par ce que l'on appelle des nœuds. Pour déterminer les réactions d'appui ainsi que les forces et moments qui sont transmis dans les nœuds, on commence par émettre des hypothèses idéalisantes :

- Les barres sont reliées de manière centrée et articulée au niveau des nœuds.
- Les forces externes s'exercent uniquement au niveau des nœuds.

Ces conditions pour l'obtention d'un treillis idéal permettent de s'assurer que toutes les barres sont sollicitées uniquement en traction et en compression. Différentes méthodes des sections sont utilisées pour calculer les réactions d'appui et les efforts dans la barre.

## 3.1. Méthode des nœuds :

Avec la méthode des nœuds, on coupe tous les nœuds les uns après les autres. À chaque nœud, on établit les conditions d'équilibre. Pour pouvoir appliquer la méthode des nœuds, il faut que le nombre de forces inconnues qui s'exercent au niveau du nœud soit de deux maximum. Grâce à cette méthode, aucune des efforts dans la barre n'est oublié en cas de treillis complexes.



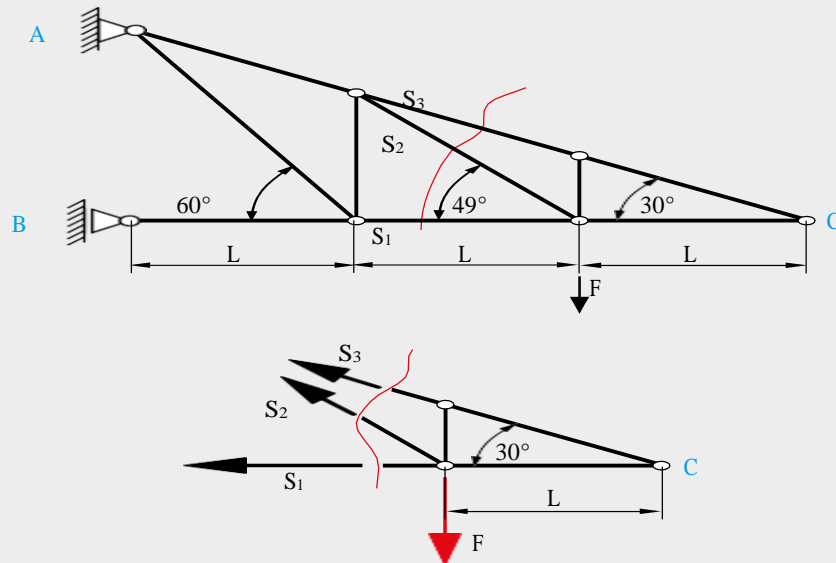
S efforts dans la barre, A+B réactions d'appui, F forces, indice V forces verticales, indice H forces horizontales

Figure I.10 : méthode des nœuds

## 3.2. Méthode des sections de Ritter :

La méthode des sections de Ritter est utilisée lorsque l'on souhaite déterminer uniquement certains efforts individuels dans la barre dans un treillis. Pour pouvoir appliquer la méthode des sections de Ritter, il faut que les réactions d'appui et les forces externes soient connues. La coupe passe par trois barres, dont deux sont reliées dans un nœud. Pour la condition d'équilibre des moments, il est judicieux de choisir comme point de référence le point d'intersection entre les deux efforts dans la barre. Cela permet de n'avoir plus qu'un effort dans la barre inconnu dans l'équation. L'avantage de cette méthode est de permettre un

calcul des différents efforts dans la barre, sans avoir à considérer tous les nœuds.



S efforts dans la barre, A+B réactions d'appui, C nœuds, F force,  
L longueur de barre,  $S_2$  effort dans la barre recherché

*Figure I.11 : méthode des sections de Ritter*

### 3.3. Épure de Cremona (plan des forces) :

L'épure de Cremona est une méthode graphique de détermination des efforts dans la barre dans un treillis. Pour pouvoir appliquer l'épure de Cremona, il faut que les réactions d'appui et les forces externes soient connues, ou qu'elles aient été déterminées au préalable à l'aide de la méthode des nœuds. On dessine alors de manière systématique un plan des forces pour chaque nœud ayant une force connue et deux forces inconnues, et l'on inscrit la direction des forces dans tout le plan des forces du treillis. On se sert du triangle des forces pour mesurer les efforts dans la barre inconnus. Grâce à cette méthode, aucun des efforts dans la barre n'est oublié en cas de treillis complexes, et toutes les directions des forces sont reportées correctement<sup>[5]</sup>.

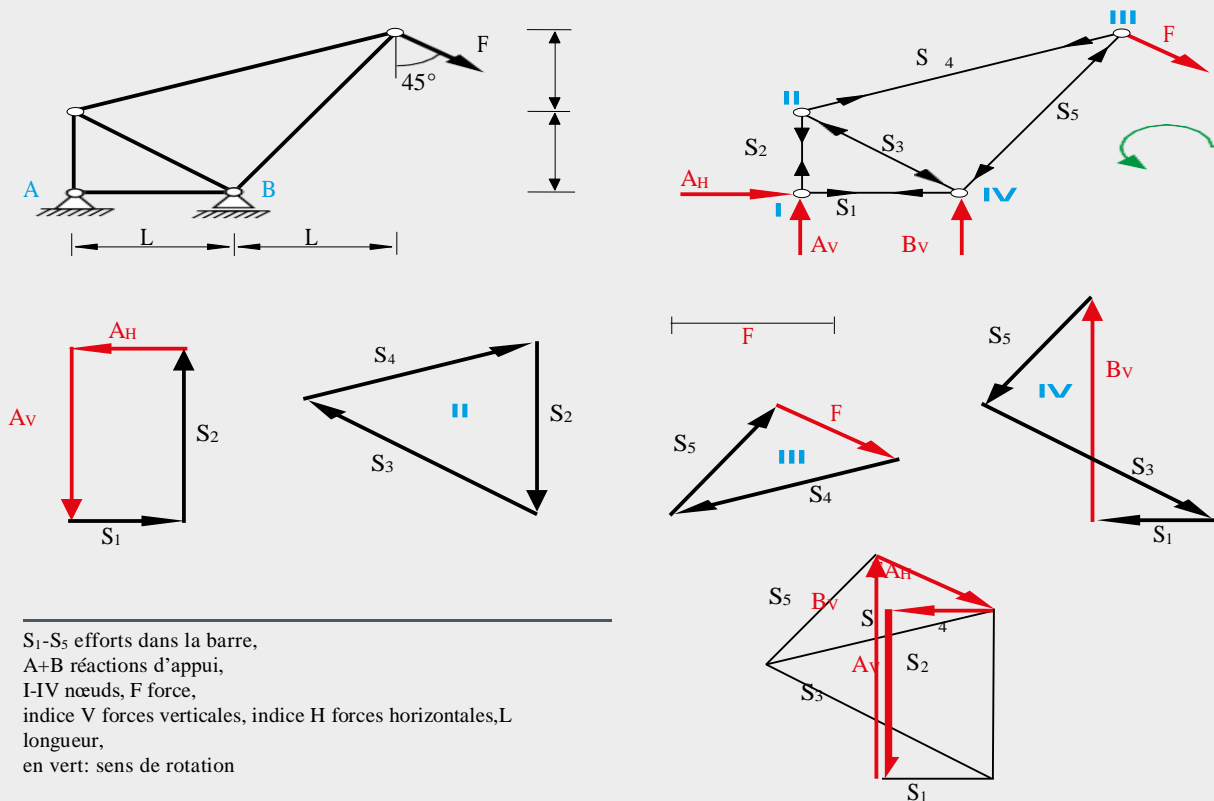


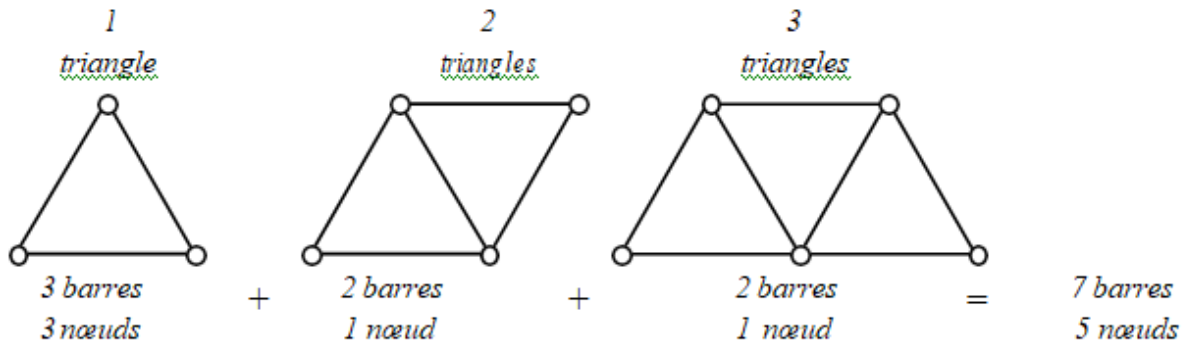
Figure I.12 : méthode Epure de Cremona

## 4.1. Construction :

Les treillis étant généralement des barres articulées, doivent être construits selon des règles strictes afin d'en assurer leur rigidité.

*Méthode:*

- On construit un premier triangle avec trois barres articulées; ce qui donne trois barres et trois nœuds.
- On ajoute à ce premier triangle un autre triangle en insérant deux barres; ce qui donne maintenant cinq barres et 4 nœuds.
- On ajoute triangle par triangle (en ajoutant deux barres et 1 nœud) jusqu'à l'obtention de la structure complète.



**Figure I.13 : construit d'un treillis**

Donc si l'on ajoute 1 triangle, on ajoute par le fait même 2 barres et 1 nœud. En généralisant on peut dire que: si on ajoute x triangles, on ajoute de ce fait x nœuds et 2x barres.

Posons:  $m =$  nombre de barres du treillis  
 $n =$  nombre de nœuds du treillis

Donc :  $n = 3 \text{ nœuds du premier triangle} + x \text{ nœuds ajoutés}$  (4.1)

$m = 3 + 2x$  (4.2)

Afin d'éliminer les x, on peut prendre l'équation 4.2 et soustraire 2 fois l'équation 4.1.

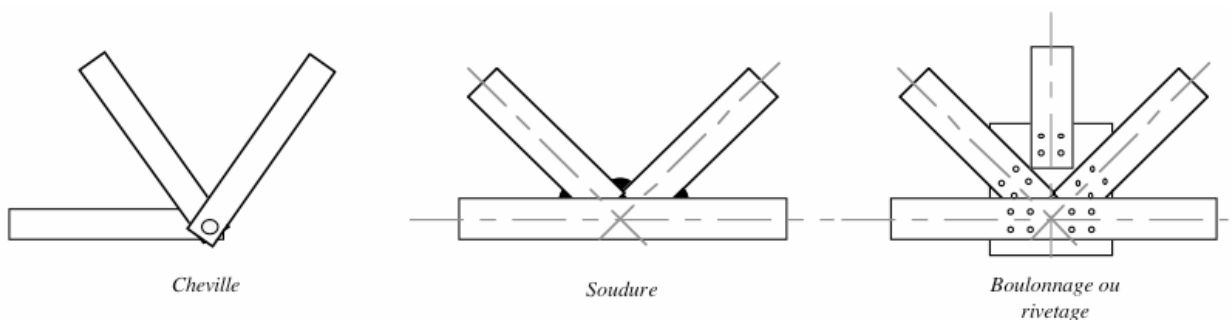
$$\begin{array}{r}
 m = 3 + 2x \\
 -(2n = 6 + 2x) \\
 \hline
 (m - 2n) = -3
 \end{array}$$

d'où  $m = 2n - 3$  (4.3)

Donc pour un treillis comportant par exemple 6 nœuds, celui-ci possèdera  $(6 \times 2 - 3)$  barres; c'est-à-dire 9 barres. Il ne faut pas oublier qu'il faut toujours respecter l'ordre de construction.

## 4.2. Assemblage :

On construit les treillis en assemblant les barres aux nœuds par différents moyens. L'assemblage se fait par boulonnage, rivetage, chevillage, soudage, ... Si l'assemblage se fait par soudure ou rivetage, on considère que le nœud est articulé si les axes des barres sont concourantes et si les barres sont longues par rapport à leur grosseur.



**Figure I.14 : Assemblage des treillis**

## 4.3. Chargement :

Le chargement que doit supporter un treillis doit être appliqué aux nœuds; ce qui a pour effet de provoquer des contraintes en traction et en compression dans les barres. Le fait d'ajouter une charge sur une barre entre ses articulations amènerait un effort en flexion qui pourrait provoquer la destruction du treillis. Introduction Générale

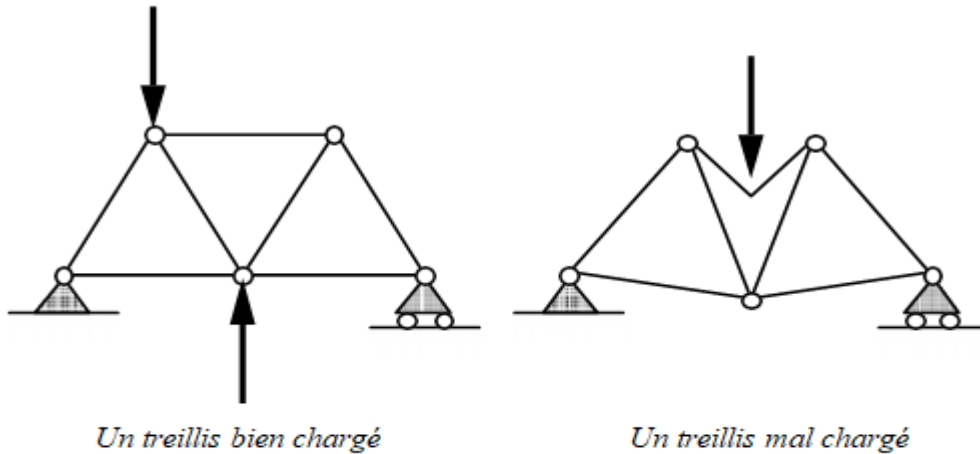


Figure I.15 : charge sur les treillis



# ***Chapitre II***

## I. Calcul des Treillis :

Les calculs de treillis ou structures sont une application de la mécanique statique. Pour mener les calculs, on considère les hypothèses suivantes :

Les calculs de treillis ou structures sont une application de la mécanique statique. Pour mener les calculs, on considère les hypothèses suivantes :

- le poids des barres est négligé ;
- les liaisons sont toutes des rotules (ou des pivots dans le cas d'un treillis plan), les barres peuvent librement tourner les unes par rapport aux autres ; en effet, même si les poutres sont fixes entre elles, si l'on applique un effort transversal à une extrémité d'une barre, le moment de la force à l'autre extrémité et la concentration de contrainte à l'angle feront que l'articulation bougera, ce qui mènera à la rupture ;
- les charges extérieures sont appliquées aux nœuds.

Ces hypothèses sont indispensables pour les calculs à la main. L'utilisation de logiciels permet de s'affranchir de ces hypothèses, notamment en prenant en compte la déformation des barres. La résistance de chacune des barres relève de la résistance des matériaux. Par contre, ces hypothèses restent la base des calculs de stabilité<sup>[6]</sup>.

### 1. Inspection des treillis :

Avant d'entreprendre le calcul des contraintes dans les barres d'un treillis, il faut d'abord vérifier si ce treillis respecte la relation vue précédemment, à savoir:

$$m = 2n - 3$$

$m < 2n - 3$  le treillis est mou (système instable).

$m > 2n - 3$  le treillis est hyperstatique, c'est-à-dire qu'il contient plus de barres que nécessaire et nous n'étudierons pas ce cas ici.

$m = 2n - 3$  est respectée, il faut alors vérifier si l'ordre de construction a été respecté. Le fait de déplacer une barre détruit la rigidité d'un treillis.

### 2. Systèmes isostatiques et hyperstatiques :

#### A. Système isostatique :

Si le nombre d'éléments inconnus des réactions d'appuis est **égal** au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit isostatique. On a un système possédant autant d'inconnues que d'équations donc on peut résoudre ce type de système.

Trois équations:

Équilibre de translation:

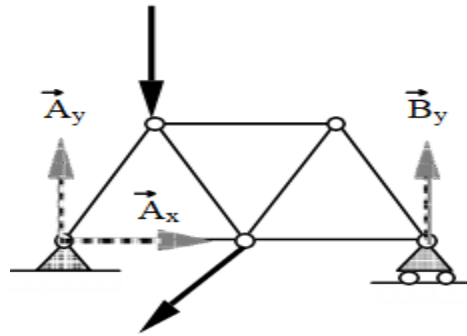
$$\sum F_x = 0 \quad \text{①}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{②}$$

Équilibre de rotation:

$$\sum M = 0 \quad \text{③}$$

Trois inconnues:  $A_x$ ,  $A_y$  et  $B_y$



*Système isostatique*  
3 équations  
3 inconnues

*Figure II.1 : système isostatique*

**B. Système hyperstatique :**

Si le nombre d'éléments inconnus des réactions d'appuis est **supérieur** au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit hyperstatique. On a un système possédant plus d'inconnues que d'équations donc on ne peut résoudre ce type de système par les méthode que l'on connaît.

Trois équations:

Équilibre de translation:

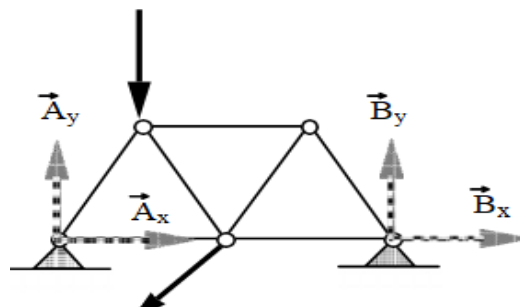
$$\sum F_x = 0 \quad \text{①}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{②}$$

Équilibre de rotation:

$$\sum M = 0 \quad \text{③}$$

Quatre inconnues:  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$  et  $B_y$



*Système hyperstatique*  
3 équations  
4 inconnues

*Figure II.2 : système hyperstatique*

**C. Système instable :**

Si le nombre d'éléments inconnues des réactions d'appuis est **inférieur** au nombre d'équations d'équilibre dont on dispose, le système est dit instable. C'est par exemple le

cas d'un système reposant sur deux appuis simple comme l'exemple ci-contre: la structure peut se déplacer latéralement<sup>[7]</sup>.

Trois équations:

Équilibre de translation:

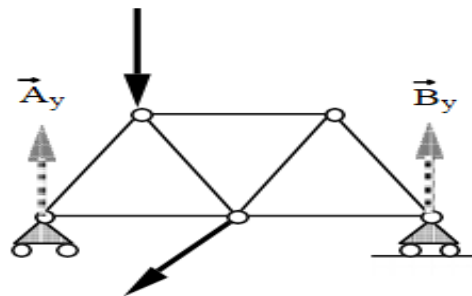
$$\sum F_x = 0 \quad \text{①}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{②}$$

Équilibre de rotation:

$$\sum M = 0 \quad \text{③}$$

Deux inconnues:  $A_y$  et  $B_y$



*Système instable*  
3 équations  
2 inconnues

Figure II.3 : système instable

### 3. Calcul du degré d'hyperstaticité d'un treillis :

La procédure décrite dans le chapitre 3 est applicable aux treillis. Il est cependant possible de la simplifier pour l'adapter à ceux-ci. Soit  $b$  le nombre total de barres,  $r$  le nombre de réactions d'appui et  $n$  le nombre total de nœuds.

Par nœud rotulé, on peut établir 2 équations (équilibre vertical et équilibre horizontal), ce qui procure un total de  $2n$  équations. Par ailleurs, les inconnues sont les  $b$  efforts normaux relatifs à chaque barre ainsi que les  $r$  réactions d'appui.

Le degré d'hyperstaticité vaut donc :

$$I_{s,treillis} = (b + r) - (2n)$$

### 4. Résolution des treillis isostatiques:

Il existe plusieurs méthodes de résolution des treillis isostatiques, parmi lesquelles :

- la méthode des sections (ou méthode de Ritter (Allemagne, 1779-1859)), dont le principe consiste à isoler des morceaux de structure judicieusement choisis et à écrire leurs équations d'équilibre.
- la méthode graphique de Cremona.
- la méthode générale exprimant l'équilibre de tous les nœuds selon une formulation analytique.

➤ **La méthode des sections :**

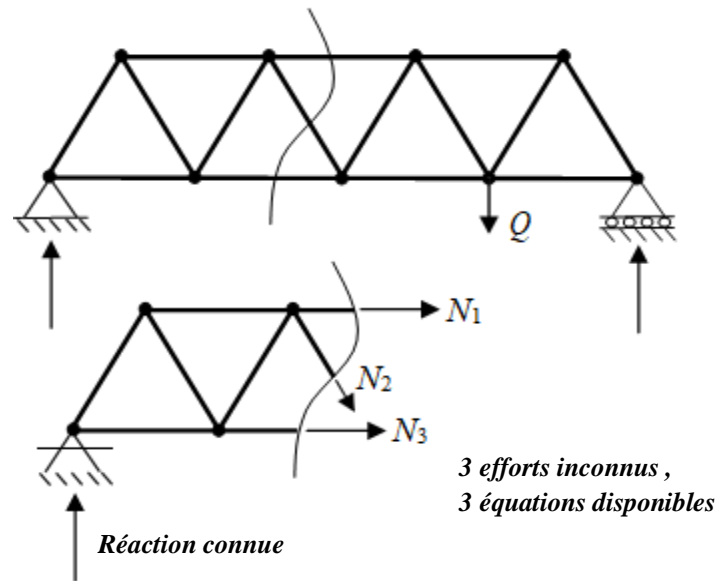


Figure II.4 : Méthode des sections.

La méthode des sections consiste à effectuer une découpe imaginaire qui sépare la structure en deux parties distinctes, de telle façon que l'une des deux parties au moins soit caractérisée par un maximum de trois efforts inconnus. En d'autres termes, la section ne peut pas couper plus de trois barres. Il suffit alors d'écrire les équations d'équilibre de l'une des deux parties pour déterminer les efforts inconnus. Si la partie de structure dont on effectue l'équilibre contient des appuis, il faudra au préalable avoir calculé les réactions correspondantes.

On peut ensuite répéter cette démarche autant de fois que nécessaire en effectuant d'autres sections.

➤ **La méthode graphique de Cremona :**

Il s'agit ici de tracer le polygone des forces pour chaque nœud, l'un après l'autre. Cette méthode n'est pas applicable en un nœud si plus de deux efforts y sont inconnus. Pour plus d'informations sur la méthode de Cremona.

➤ **La méthode générale exprimant l'équilibre de tous les nœuds :**

Cette méthode n'est pas vraiment intéressante lors d'un calcul manuel car elle nécessite la résolution d'un système dont le nombre d'équations devient vite important (2 équations par nœud). De plus, lors d'un calcul par ordinateur, nettement plus systématique et applicable également aux treillis hyperstatiques. Cette méthode est donc d'un intérêt limité.

Soit un nœud d'indice  $i$  reliant plusieurs barres :

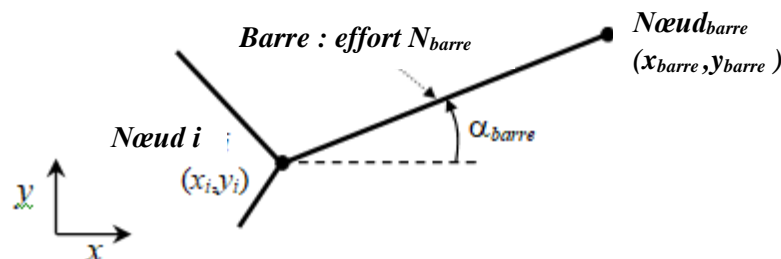
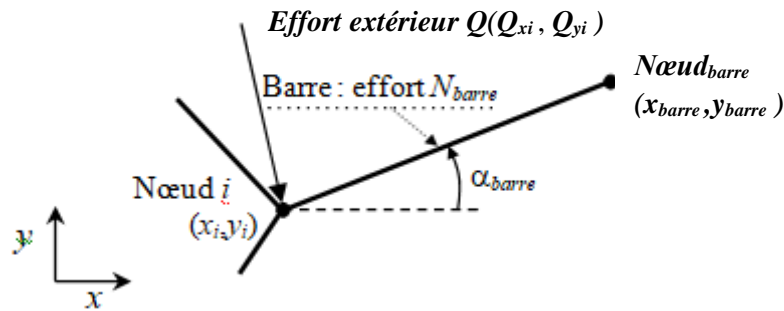


Figure II.5 : Méthode générale

Pour que ce nœud soit à l'équilibre, il faut que :

- la somme des composantes **horizontales**  $N_{ix}$  des efforts  $N_i$  exercés sur ce nœud soit nulle.
- la somme des composantes **verticales**  $N_{iy}$  des efforts  $N_i$  exercés sur ce nœud soit nulle.

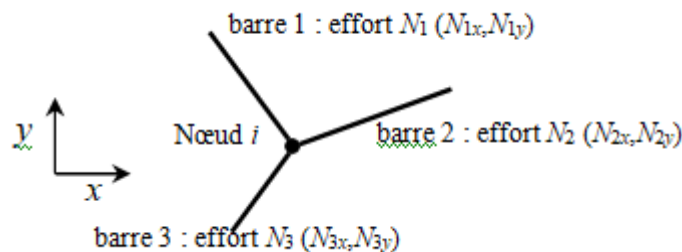
Si  $\alpha_{barre}$  est l'angle que fait une barre concourante au nœud  $i$  avec l'horizontale, les deux conditions précédentes s'expriment sous la forme suivante :



**Figure II.6 : Méthode générale**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{\text{Barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{barre} \cos \alpha_{barre} = 0 \\ \sum_{\substack{\text{Barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{barre} \sin \alpha_{barre} = 0 \end{array} \right.$$

Si on exprime chaque angle  $\alpha$  en fonction des coordonnées  $(x_i, y_i)$  du nœud  $i$  et  $(x_{barre}, y_{barre})$  de l'autre nœud de la barre correspondante et que l'on rajoute les composantes connues  $(Q_{xi}, Q_{yi})$  d'un effort extérieur éventuel exercé au nœud  $i$ , les équations ci-dessus deviennent :



**Figure II.7: Méthode générale**

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{x,i} + \sum_{\substack{\text{Barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{x_{\text{barre}} - x_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \\ \\ Q_{y,i} + \sum_{\substack{\text{Barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{y_{\text{barre}} - y_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \end{array} \right.$$

Si on écrit ces 2 équations pour chaque nœud, on obtient un système dont la dimension est égale au double du nombre total de nœuds du treillis. Remarquons que si le nœud correspond à un appui, les équations ci-dessus doivent être complétées par les composantes ( $R_{xi}$ ,  $R_{yi}$ ) de la réaction correspondante :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{x,i} + Q_{x,i} + \sum_{\substack{\text{Barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{x_{\text{barre}} - x_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \\ \\ R_{y,i} + Q_{y,i} + \sum_{\substack{\text{Barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{y_{\text{barre}} - y_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \end{array} \right.$$

## II. Calculs statique des treillis par la RDM :

L'objectif dans ce titre est de vous initier au calcul analytique de la réponse statique d'un treillis bidimensionnel. Ces calculs permettent d'obtenir très rapidement l'état de contrainte (effort normal) dans les éléments d'une structure simple. La connaissance de l'effort normal dans les éléments du treillis permet de vérifier que la structure reste dans le domaine élastique, et qu'il n'y a pas d'instabilité (étude du flambement). Utile pour le pré dimensionnement, savoir effectuer ces calculs analytiques permet d'assimiler l'utilisation des outils d'analyse qui sont utilisés lors des calculs numériques.

Pour les treillis plus complexes (géométrie, forte hyperstaticité, ou cas de chargement multiples) ou pour les études dynamiques, la méthode des éléments finis présentée dans le chapitre suivant, permettra d'effectuer les calculs numériques.

### 1. Théorèmes énergétiques de la RDM :

Nous énonçons les trois principaux théorèmes énergétiques couramment utilisés pour les calculs statiques. La démonstration de ces théorèmes est basée sur l'existence de l'énergie de déformation élastique. Vous trouverez ces démonstrations dans tous les ouvrages de résistance des matériaux. Nous nous attacherons d'avantage à leur utilisation dans le cadre du calcul pratique des structures.

Les trois théorèmes peuvent se déduire de l'écriture du principe des travaux virtuel en statique Soit en utilisant l'énergie de déformation élastique :

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$$

$$\delta W_{ext} = \delta E_d$$

*L'énergie élastique emmagasinée est égale à l'énergie fournie pour déformer la structure depuis son état initial jusqu'à son état final, c'est le travail des forces extérieures appliquées à la structure.*

### 2. Théorème de Maxwell – Betty :

Le travail d'un système de force  $F_1$  dans le déplacement produit par un système de force  $F_2$  est égal au travail du système de force  $F_2$  dans le déplacement produit par le système de force  $F_1$ .

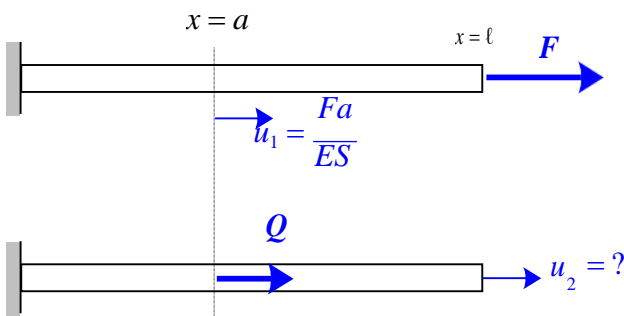
Ce que nous pouvons énoncer sous la forme :

$$W(1 \rightarrow 2) = W(2 \rightarrow 1)$$

Où 
$$F_1 \delta_2 = F_2 \delta_1$$

L'intérêt de ce théorème est historique (1864-1872) on trouve ce théorème de réciprocité dans d'autres domaines de la physique (électricité, électromagnétisme, fonctions de transfert). Du point de vue mécanique ce théorème de réciprocité énonce la symétrie de l'opérateur "raideur" liée à l'existence de l'énergie de déformation élastique. Castigliano (1873) l'a utilisé dans la démonstration de son théorème.

**2.1. Illustration du théorème de Maxwell-Betty :**



La solution du problème 1 est connue :  $u_1 = \frac{Fa}{ES}$

Appliquons le théorème de Maxwell-Betty

$$Fu_2 = Qu_1 = Q \frac{Fa}{ES} \implies u_2 = \frac{Qa}{ES}$$

Résultat prévisible

**3. Théorème de Castigliano :**

La dérivée partielle de l'énergie de déformation de la structure par rapport à un effort est égale au déplacement du point d'application selon la ligne d'action de cet effort.

Ce que nous pouvons énoncer sous la forme :

$$\frac{\partial E_d}{\partial F} = \delta_F$$

Ce théorème est très pratique, puisqu'il permet de calculer le déplacement d'un point de la structure sans avoir à intégrer les équations différentielles locales. Pour calculer le déplacement d'un point qui n'est pas chargé on introduit une charge fictive  $X$  dans la direction souhaitée.

$$\left[ \frac{\partial E_d(F, X)}{\partial X} \right]_{X=0} = \delta_X$$

Ménabréa a eu l'idée d'utiliser le théorème de Castigliano pour déterminer les inconnues hyperstatiques d'un problème. Cette utilisation particulière porte le nom de théorème de Ménabréa.

**4. Théorème de Ménabréa :**

Pour une structure hyperstatique de degré  $N$ , les  $N$  inconnues hyperstatiques l'énergie de déformation élastique de la structure.

Ce que nous pouvons énoncer sous la forme :

$$\forall i \in [1, N] \quad \frac{\partial E_d(F, X_i)}{\partial X_i} = 0$$

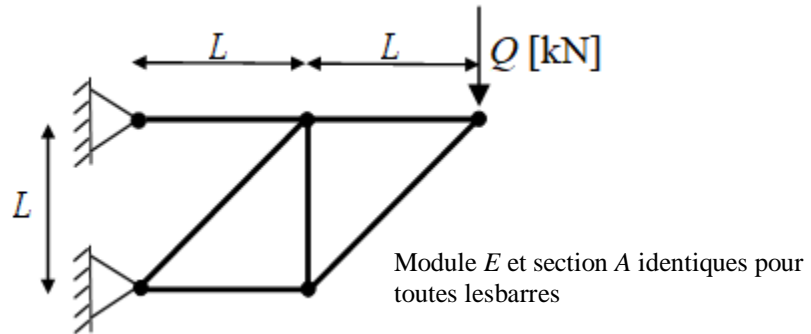
L'intérêt est évident puisque ce théorème permet de construire le système matriciel des  $N$  équations pour déterminer les  $N$  inconnues hyperstatiques.

Ce théorème peut être vu comme l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange, puisqu'il consiste à couper les liaisons hyperstatiques pour faire apparaître soit des efforts internes soit des efforts de liaison. On calcule alors l'énergie de déformation en fonction de ces inconnues. Pour respecter les liaisons coupées il faut écrire que le travail de l'effort de liaison est nul, c'est le théorème de Ménabréa<sup>[8]</sup>.

5. Exemple :

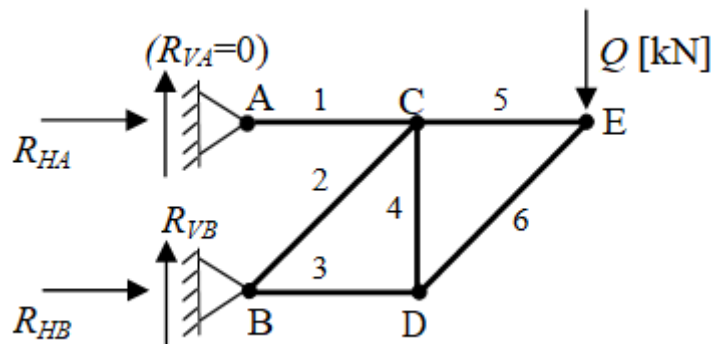
Pour le treillis isostatique ci-dessous, on propose :

- de calculer les réactions d'appui;
- de déterminer les efforts dans chacune des barres par les trois méthodes (méthode de Cremona, méthode des sections, méthode générale).



**Solution :**

➤ Calcul des réactions d'appui :



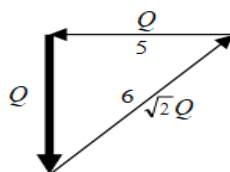
Soit  $N_1$  à  $N_6$  les efforts normaux relatifs aux barres 1 à 6. Remarquons que la réaction  $R_{VA}$  est forcément nulle puisqu'elle ne peut être équilibrée par aucun autre effort vertical. En effet,  $R_{HA}$  et  $N_1$  agissent uniquement selon un axe horizontal.

- équilibre des efforts verticaux :  $R_{VB} = Q$
- équilibre des efforts horizontaux :  $R_{HA} + R_{HB} = 0$
- équilibre des moments par rapport au point A :  $R_{HB}L - Q \cdot 2L =$

On obtient :  $R_{VB} = Q, R_{HB} = 2Q, R_{HA} = -2Q, (R_{VA} = 0)$ .

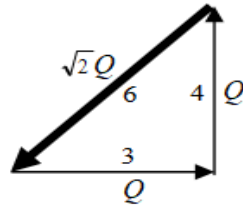
➤ Calcul des efforts dans les barres par la méthode de Cremona :

**nœud E :**



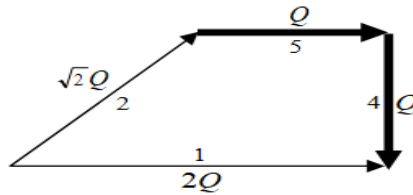
$$\begin{cases} N_5 = Q \text{ (traction)} \\ N_6 = -\sqrt{2} Q \text{ (compression)} \end{cases}$$

**nœud D ( $N_6$  connu) :**



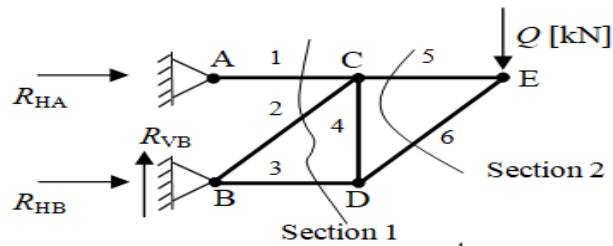
$$\begin{cases} N_3 = -Q & (\text{compression}) \\ N_4 = Q & (\text{traction}) \end{cases}$$

**nœud C ( $N_4$  et  $N_5$  connus) :**

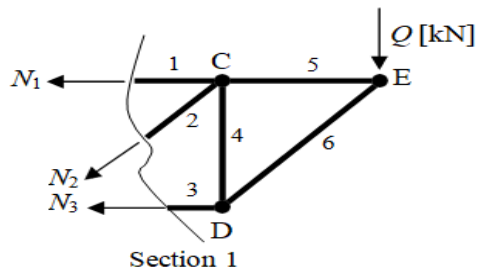


$$\begin{cases} N_1 = 2Q & (\text{traction}) \\ N_2 = -\sqrt{2} Q & (\text{compression}) \end{cases}$$

➤ Calcul des efforts dans les barres par la méthode des sections :



**Section 1 :**

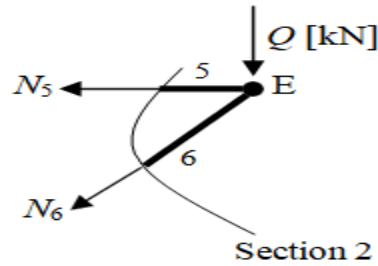


- équilibre des efforts verticaux :  $N_2 \cos 45^\circ + Q = 0$
- équilibre des efforts horizontaux :  $N_1 + N_2 \cos 45^\circ + N_3 = 0$
- équilibre des couples autour du point C :  $N_3 L + QL = 0$

Sachant que  $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$  , on obtient :

$$\begin{cases} N_1 = 2Q & (\text{traction}) \\ N_2 = -\sqrt{2} Q & (\text{compression}) \\ N_3 = -Q & (\text{compression}) \end{cases}$$

Section 2 :



- équilibre des efforts verticaux :  $N_6 \cos 45^\circ + Q = 0$
- équilibre des efforts horizontaux :  $N_5 + N_6 \cos 45^\circ = 0$

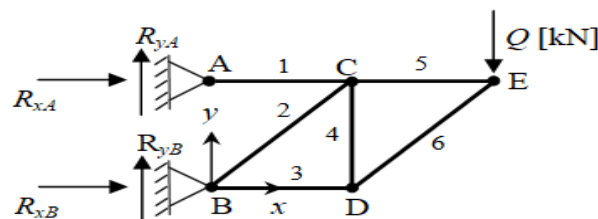
$$\text{On obtient : } \begin{cases} N_5 = Q & (\text{traction}) \\ N_6 = -\sqrt{2} Q & (\text{compression}) \end{cases}$$

Le calcul de  $N_4$  est immédiat si on effectue une section dans les barres 3, 4 et 5 : on obtient directement  $N_4 = \text{charge extérieure } Q$  (traction).

➤ Calcul des efforts dans les barres par la méthode générale :

Il faut considérer chaque nœud et écrire les équations d'équilibre qui lui sont relatives :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{x,i} + Q_{x,i} + \sum_{\substack{\text{Barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{x_{\text{barre}} - x_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \\ R_{y,i} + Q_{y,i} + \sum_{\substack{\text{Barres} \\ \text{concourantes} \\ \text{au nœud } i}} N_{\text{barre}} \frac{y_{\text{barre}} - y_i}{L_{\text{barre}}} = 0 \end{array} \right.$$



Nœud A :

- coordonnées du nœud A :  $(0, L)$
- barre concourante en A : **Barre 1** : nœud opposé  $(L, L)$ , longueur  $L$
- effort extérieur appliqué : aucun
- présence d'un appui  $(R_{xA}, R_{yA})$

$$\begin{cases} R_{xA} + 0 + N_1 \left( \frac{L-0}{L} \right) = 0 \\ R_{xA} + 0 + N_1 \left( \frac{L-L}{L} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} R_{xA} + N_1 = 0 \\ R_{yA} = 0 \end{matrix}$$

**Nœud B :**

- coordonnées du nœud B : (0,0)
- barres concourantes en B : **Barre 2** : nœud opposé (L,L), longueur  $\sqrt{2}L$   
**Barre 3** : nœud opposé (L,0), longueur L
- effort extérieur appliqué : aucun
- présence d'un appui ( $R_{xB}, R_{yB}$ )

$$\begin{cases} R_{xB} + 0 + N_2 \left( \frac{L-0}{\sqrt{2}L} \right) + N_3 \left( \frac{L-0}{L} \right) = 0 \\ R_{yB} + 0 + N_2 \left( \frac{L-0}{\sqrt{2}L} \right) + N_3 \left( \frac{0-0}{L} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} R_{xB} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_3 = 0 \\ R_{yB} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0 \end{matrix}$$

**Nœud C :**

- coordonnées du nœud C : (L,L)
- barres concourantes en C : **Barre 1** : nœud opposé (0,L), longueur L  
**Barre 2** : nœud opposé (0,0), longueur  $\sqrt{2}L$   
**Barre 4** : nœud opposé (L,0), longueur L  
**Barre 5** : nœud opposé (2L,L), longueur L
- effort extérieur appliqué : aucun
- pas d'appui

$$\begin{cases} 0 + 0 + N_1 \left( \frac{0-L}{L} \right) + N_2 \left( \frac{0-L}{\sqrt{2}L} \right) + N_4 \left( \frac{L-L}{L} \right) + N_5 \left( \frac{2L-L}{L} \right) = 0 \\ 0 + 0 + N_1 \left( \frac{L-L}{L} \right) + N_2 \left( \frac{0-L}{\sqrt{2}L} \right) + N_4 \left( \frac{0-L}{L} \right) + N_5 \left( \frac{2L-L}{L} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -N_1 - \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_5 = 0 \\ -\frac{N_2}{\sqrt{2}} - N_4 = 0 \end{matrix}$$

**Nœud D :**

- coordonnées du nœud D : (L,0)
- barres concourantes en D : **Barre 3** : nœud opposé (0,0), longueur L  
**Barre 4** : nœud opposé (L,L), longueur L  
**Barre 6** : nœud opposé (2L,L), longueur  $\sqrt{2}L$
- effort extérieur appliqué : aucun
- pas d'appui

$$\begin{cases} 0 + 0 + N_3 \left( \frac{0-L}{L} \right) + N_4 \left( \frac{L-L}{L} \right) + N_6 \left( \frac{2L-L}{\sqrt{2}L} \right) = 0 \\ 0 + 0 + N_3 \left( \frac{0-0}{L} \right) + N_4 \left( \frac{L-0}{L} \right) + N_6 \left( \frac{L-0}{\sqrt{2}L} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -N_3 + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ N_4 + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \end{matrix}$$

**Nœud E :**

- coordonnées du nœud E :  $(2L, L)$
- barres concourantes en E : **Barre 5** : nœud opposé  $(L, L)$ , longueur  $L$   
**Barre 6** : nœud opposé  $(L, 0)$ , longueur  $\sqrt{2}L$
- effort extérieur appliqué :  $(Q_x, Q_y) = (0, -Q)$
- pas d'appui

$$\begin{cases} 0 + 0 + N_5 \left(\frac{L-2L}{L}\right) + N_6 \left(\frac{L-2L}{\sqrt{2}L}\right) = 0 & -N_5 - \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ 0 - Q + N_5 \left(\frac{L-L}{L}\right) + N_6 \left(\frac{0-L}{\sqrt{2}L}\right) = 0 & Q + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Finalement, on obtient un système de dix équations dans lequel les dix inconnues sont  $N_1$  à  $N_6$  et  $R_{xA}$ ,  $R_{yA}$ ,  $R_{xB}$ ,  $R_{yB}$  :

$$\begin{array}{rcl} R_{xA} + N_1 = 0 & -N_1 - \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_5 = 0 & N_4 + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{yA} = 0 & -\frac{N_2}{\sqrt{2}} - N_4 = 0 & -N_5 - \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{xB} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_3 = 0 & -N_3 + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 & Q + \frac{N_6}{\sqrt{2}} = 0 \\ R_{yB} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0 & & \end{array}$$

Ces dix équations peuvent être exprimées sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ R_{xA} \\ R_{yA} \\ R_{xB} \\ R_{yB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système fournit les solutions suivantes :

$$\begin{cases} N_1 = 2Q \\ N_2 = -\sqrt{2}Q \\ N_3 = -Q \\ N_4 = Q \\ N_5 = Q \\ N_6 = -\sqrt{2}Q \end{cases} \text{ et } \begin{cases} R_{xA} = -2Q \\ R_{yA} = 0 \\ R_{xB} = 2Q \\ R_{yB} = Q \end{cases}$$



# ***Chapitre III***

### III. Élément fini de barre pour le calcul des treillis :

#### 1. introduction à l'élément de barre :

On désigne par barre une poutre travaillant seulement en traction-compression. Typiquement, les treillis de poutres sont souvent approximés dans un premier temps comme un ensemble de barres rotulées entre elles (Figure 1.1). Les 2 extrémités sont les nœuds de l'élément.

On présente dans cette partie l'élément barre de façon simple en utilisant les connaissances de mécanique d'un élève de Bac+2 :

- principe fondamental de la statique,
- tenseur de cohésion,
- sollicitation de traction-compression pour une poutre,
- méthode des nœuds.

Le but est de mettre en œuvre rapidement la méthode. Cependant, la méthode des éléments finis ne peut pas se réduire à cette démarche simple dans le cas général d'une pièce tridimensionnelle.

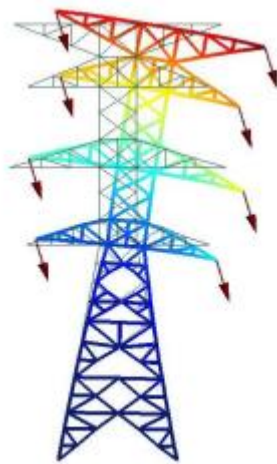


Figure III.1 : Exemple de calcul par éléments finis d'un pylône électrique (éléments barres).

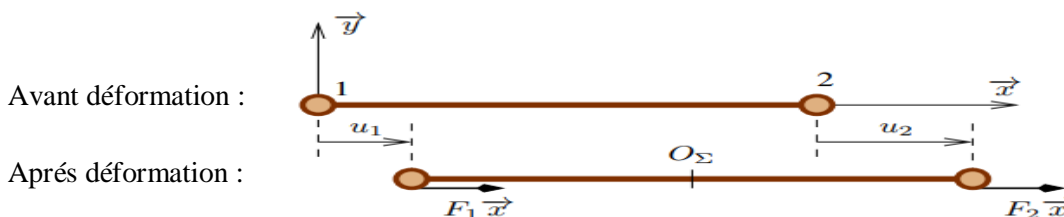


Figure III.2 : Élément barre à 2 nœuds.

#### 2. Équilibre de l'élément barre :

Un élément de barre est représenté par un segment de droite reliant les deux extrémités de la barre (Figure 1.2). La barre est caractérisée par sa longueur  $l$ , par l'aire de sa section  $S$  et par son module d'Young  $E$ . Les extrémités sont appelées les nœuds de la barre, ils ont pour abscisses  $x_1 = 0$  et  $x_2 = l$ .

## Chapitre 3: Calcul des structures par éléments finis

La barre est en équilibre sous les actions des forces  $F_1 \vec{x}$  et  $F_2 \vec{x}$  aux nœuds 1 et 2. On note les déplacements des nœuds 1 et 2 respectivement  $u_1 \vec{x}$ ,  $u_2 \vec{x}$ .

-Le torseur de cohésion en  $O_\Sigma$  peut s'écrire de deux façons :

$$\{K_{O_\Sigma}\}\{ext. \rightarrow 2\} \Rightarrow N = F_2 \quad (2.1)$$

ou bien :

$$\{K_{O_\Sigma}\} = -\{ext. \rightarrow 1\} \Rightarrow N = -F_1 \quad (2.2)$$

On remarque que la barre est bien en équilibre car  $F_1 + F_2 = 0$ .

-La relation entre  $N$ ,  $u_1$  et  $u_2$  pour une poutre en traction est :

$$N = \frac{ES}{l} \delta l \Rightarrow N = \frac{ES}{l} (u_2 - u_1) \quad (2.3)$$

- En utilisant les résultats précédents on a alors :

$$F_1 = \frac{ES}{l} (u_1 - u_2) \quad (2.4)$$

$$F_2 = \frac{ES}{l} (-u_1 + u_2) \quad (2.5)$$

- Ces deux dernières relations s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

La matrice :

$$k = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

est appelée la matrice de rigidité de l'élément barre.

**Exemple :** On prend une poutre encastree à gauche ( $u_1 = 0$ ), et on applique un effort  $F$  à l'extrémité droite ( $F_2 = F$ ). Le système matriciel à résoudre est le suivant :

$$\frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Qui devient ici :

$$\frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

où les inconnues sont le déplacement de l'extrémité droite  $u_2$  et la force de réaction de l'extrémité gauche  $F_1$ . Ce système de 2 équations à 2 inconnues donne la solution :

$$u_2 = \frac{Fl}{ES}$$

Et  $F_1 = -F$

L'effort normal est déterminé par :

$$N = \frac{ES}{l} (u_2 - u_1) = \frac{ES}{l} \left( \frac{Fl}{ES} - 0 \right) = F$$

### 3. Etude de deux barres :

#### 3.1. Assemblage des matrices de rigidité élémentaires :

On suppose deux barres de longueurs, de modules d'Young et de sections différentes collées bout à bout et soumises à de la traction (Figure. 3.1). Les barres sont numérotées I et II, elles sont reliées à trois nœuds 1, 2 et 3. Ces trois nœuds subissent les forces extérieures  $F \vec{x}_1$ ,  $F \vec{x}_2$  et  $F \vec{x}_3$ . L'équilibre global s'écrit

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0. \quad (3.1)$$

A l'équilibre, l'ensemble des deux barres s'est déformé, les nœuds 1, 2 et 3 se sont déplacés respectivement de  $u_1 \vec{x}$ ,  $u_2 \vec{x}$  et  $u_3 \vec{x}$  ( $u_1 < u_2 < u_3$  si les deux barres sont en traction). Les équilibres des nœuds s'écrivent :

— équilibre du nœud 1 (méthode des nœuds)

$$F_1 + N_1 = 0 \Rightarrow -N_1 = F_1 \quad (3.2)$$

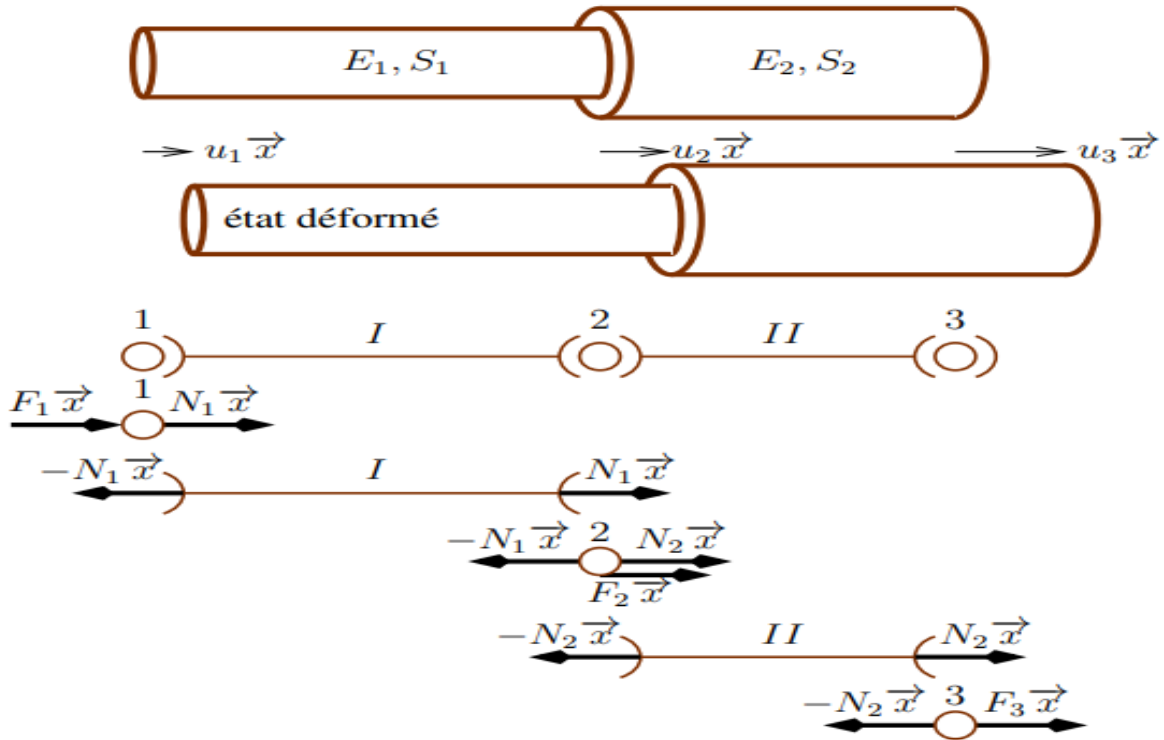


Figure III.3 : Deux barres en traction.

—équilibre du nœud 2

$$F_2 - N_1 + N = 0 \Rightarrow N_1 - N_2 = F_2 \quad (3.3)$$

— équilibre du nœud 3

$$F_3 - N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = F_3 \quad (3.4)$$

Pour chaque élément, on peut relier l'effort normal à l'allongement de la barre :

— élément I :

$$N_1 = \frac{E_1 S_1}{L_1} (u_2 - u_1) \quad (3.5)$$

— élément II :

$$N_2 = \frac{E_2 S_2}{L_2} (u_3 - u_2) \quad (3.6)$$

En remplaçant dans les expressions des équilibres des nœuds, on a les trois équations suivantes :

$$-\frac{E_1 S_1}{L_1} (u_2 - u_1) = F_1 \quad (3.7)$$

$$\frac{E_1 S_1}{L_1} (u_2 - u_1) - \frac{E_2 S_2}{L_2} (u_3 - u_2) = F_2 \quad (3.8)$$

$$\frac{E_2 S_2}{L_2} (u_3 - u_2) = F_3 \quad (3.9)$$

En notant  $k_1 = E_1 S_1 / L_1$  et  $k_2 = E_2 S_2 / L_2$ , on a alors le système matriciel suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_2 + k_1 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{Q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \quad (3.10)$$

Cette opération est l'opération d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires, la matrice  $\mathbf{K}$  est appelée matrice de rigidité de la structure, le vecteur  $\underline{Q}$  est le vecteur des inconnues de déplacements et le vecteur  $\underline{F}$  est le vecteur des forces extérieures :

$$\mathbf{K}\underline{Q} = \underline{F} \quad (3.11)$$

### 3.2. Mise en œuvre pratique :

La première étape consiste à écrire les deux matrices de rigidité des deux éléments en repérant les lignes et les colonnes de chaque matrice par les inconnues de déplacements associées :

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} & u_1 & u_2 \\ k_1 & -k_1 & u_1 \\ -k_1 & k_1 & u_2 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{matrix} & u_2 & u_3 \\ k_2 & -k_2 & u_2 \\ -k_2 & k_2 & u_3 \end{matrix} \quad (3.12)$$

On range ensuite dans la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  de la structure chaque terme des deux matrices à la ligne et la colonne correspondante :

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 \\ k_1 & k_1 & 0 & u_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & u_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 & u_3 \end{matrix} \quad (3.13)$$

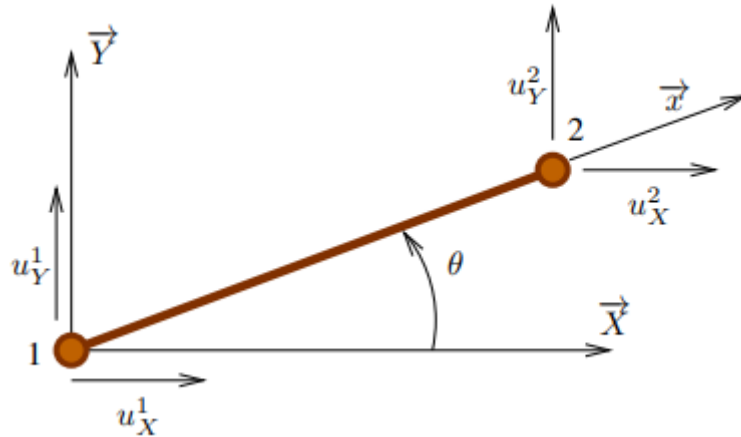
Le système à résoudre est alors :  $\mathbf{K}\underline{Q} = \underline{F}$

La deuxième étape consiste à faire le bilan des déplacements et des forces connus et inconnus. En prenant un encastrement à l'extrémité gauche et en appliquant une force  $F$  à l'extrémité droite, on a :

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0, \text{ connu} \\ \text{inconnu} \\ \text{inconnu} \end{matrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{inconnu, réaction à l'encastrement} \\ 0, \text{ connu} \\ F, \text{ connu} \end{matrix}$$

Si le déplacement est connu en un nœud alors la force est inconnue, si la force est connue alors le déplacement est inconnu. La troisième étape est la résolution du système d'équations complet afin de déterminer toutes les inconnues

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_2 + k_1 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (3.14)$$



**Figure III.4 :** Élément barre dans une base globale.

Une fois toutes les inconnues trouvées, on peut calculer les efforts normaux dans chaque barre :

$$N_1 = \frac{E_1 S_1}{l_1} \left( u_2 - \underbrace{u_1}_{=0} \right) \quad (3.15)$$

Et :

$$N_2 = \frac{E_2 S_2}{l_2} (u_3 - u_2) \quad (3.16)$$

### 3.3. Élément barre pour le calcul des treillis plans :

Les barres composant un treillis plan sont positionnées arbitrairement dans l'espace et font des angles différents avec le repère global de la structure  $(\vec{X}, \vec{Y})$  (Figure 3.2).

On note  $\theta$  l'angle entre l'axe  $\vec{X}$  du repère global et l'axe  $\vec{x}$  du repère local à la barre. Le vecteur déplacement d'un point de la barre s'écrit dans le repère local

$$\vec{u} = u \vec{x} \quad (3.17)$$

Il s'écrit dans le repère global

$$\vec{u} = u^X \vec{X} + u^Y \vec{Y}. \quad (3.18)$$

En projetant les deux équations précédentes sur  $\vec{x}$  il vient

$$u = u^X \cos \theta + u^Y \sin \theta. \quad (3.19)$$

En notant  $u_1^X$  et  $u_1^Y$  les déplacements suivant  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  du nœud 1 de la barre dans le repère global, et en appliquant la formule précédente au nœud 1, on a

$$u_1 = u_1^X \cos \theta + u_1^Y \sin \theta. \quad (3.20)$$

En utilisant les mêmes notations pour le nœud 2, on a

$$u_2 = u_2^X \cos \theta + u_2^Y \sin \theta. \quad (3.21)$$

Ceci peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}}_{-\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^X \\ u_1^Y \\ u_2^X \\ u_2^Y \end{bmatrix}}_{-\underline{Q}} \quad (3.22)$$

Soit :

$$\underline{q} = \mathbf{T} \underline{Q} \quad (3.23)$$

Où  $\underline{Q}$  est le vecteur des inconnus de déplacements aux nœuds de l'élément dans le repère global et  $\mathbf{T}$  est la matrice de transformation passant du repère global au repère local.

Il est possible d'écrire les mêmes relations pour les forces extérieures agissant aux nœuds de l'élément :

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{x} = F_1^X \vec{X} + F_1^Y \vec{Y} \text{ et } \vec{F}_2 = F_2 \vec{x} = F_2^X \vec{X} + F_2^Y \vec{Y} \quad (3.24)$$

Donc :

$$F_1^X = F_1 \vec{x} \cdot \vec{X} = F_1 \cos \theta \text{ et } F_1^Y = F_1 \vec{x} \cdot \vec{Y} = F_1 \sin \theta \quad (3.25)$$

de même :

$$F_2^X = F_2 \cos \theta \text{ et } F_2^Y = F_2 \sin \theta \quad (3.26)$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_1^X \\ F_1^Y \\ F_2^X \\ F_2^Y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix}}_{=T^T} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

La matrice qui apparaît pour les forces est la transposée de celle présente dans les relations des déplacements. Finalement, l'équilibre de la barre écrit en fonction des déplacements et des forces dans le repère local à la barre.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

devient en fonction des déplacements et des forces dans le repère global :

$$\begin{bmatrix} F_1^X \\ F_1^Y \\ F_2^X \\ F_2^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^X \\ u_1^Y \\ u_2^X \\ u_2^Y \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Tous calculs faits, l'équilibre de la barre en deux dimensions s'écrit :

$$\frac{ES}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}}_{=k_g} \begin{bmatrix} u_1^X \\ u_1^Y \\ u_2^X \\ u_2^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^X \\ F_1^Y \\ F_2^X \\ F_2^Y \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

où la matrice  $k_g$  est la matrice de rigidité de l'élément barre en deux dimensions.

L'effort normal est déterminé par :

$$N = \frac{ES}{l} (u_2 - u_1) = \frac{ES}{l} ((u_2^X - u_1^X) \cos \theta + (u_2^Y - u_1^Y) \sin \theta) \quad (3.31)$$



# *Chapitre IV*

### IV.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser de façon pragmatique la méthode des éléments finis pour le calcul des structures en treillis obtenus à l'aide des assemblages par rotules dont les éléments travaillent en traction - compression, et pour cela, nous avons fait un programme en Matlab qui assure un tel calcul à partir de la réponse statique des treillis plans. Ce qui nous permet d'introduire les principales étapes de construction de la structure.

Pour cet objectif de calcul, nous avons élaboré un programme en Matlab qui nous donne une analyse complète tout en assurant :

- 1- Le calcul des déplacements nodaux
- 2- La détermination des réactions aux appuis
- 3- Le calcul des contraintes dans tous les éléments constitutifs
- 4- La déduction des efforts dans les différents éléments de la structure (effort internes)

### IV.2 Présentation de la méthode et validation du programme

Intéressons-nous à la réponse statique d'un treillis plan représenté par la figure ci-dessous.

Ce treillis est un assemblage (par rotules) d'éléments travaillant en traction – compression. La géométrie, les caractéristiques mécaniques, les conditions aux limites et le chargement sont donnés.

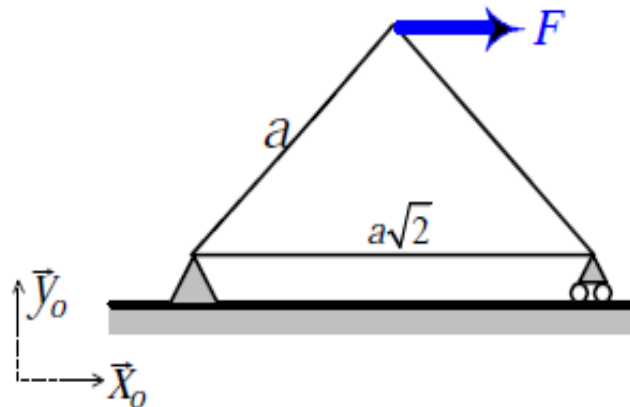


Figure IV.1 : treillis à trois barres

La démarche suivie est la suivante :

- Analyse du problème : discrétisation et définition des inconnues
- Calcul de la matrice raideur : équation matricielle à résoudre
- Résolution : déformée de la structure et efforts aux appuis
- Post-traitement : Contraintes dans les barres et efforts aux noeuds.

### IV.2.1 Analyse du problème

Le problème posé est plan, nous avons 3 nœuds à deux variables par nœud ( $u_i, v_i$ ) déplacements du nœud  $i$  dans le plan.

Notre modèle possède 6 degrés de liberté

$\{U\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]^T$  : Vecteur des déplacements nodaux

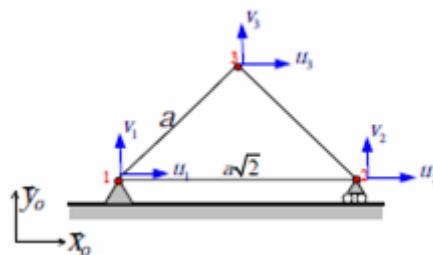


Figure IV.2 : Treillis à 3 barres  
déplacements nodaux

Les conditions aux limites :

Appui au nœud 1 (appui double) :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \text{ fait apparaître deux composantes d'effort inconnu } \begin{cases} X_1 \\ Y_1 \end{cases}$$

Appui au nœud 2 (appui glissant ou simple) :

$$v_2 = 0 \text{ fait apparaître une composante d'effort inconnu } Y_2$$

Le travail virtuel des efforts donnés et inconnus appliqués à la structure conduit à l'expression du vecteur des forces nodales :

$$\{F\} = [X_1 \quad Y_1 \quad 0 \quad Y_2 \quad F \quad 0]^T : \text{Vecteur forces}$$

Pour un vecteur de déplacement nodaux

$$\{U\} = [0 \quad 0 \quad u_2 \quad 0 \quad u_3 \quad v_3]^T$$

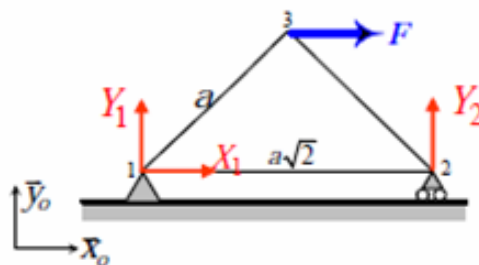


Figure IV.3 : Efforts nodaux connus et inconnus

Nous avons donc 6 inconnues pour 6 équations obtenues en écrivant le principe des travaux virtuels (équations de Lagrange) correspondant aux 6 degrés de liberté initiaux de la structure.

Pour calculer le travail virtuel des efforts intérieurs (contraintes), nous utilisons la notion de l'énergie de déformation que nous rappelons ci-dessous par :

$$\delta W_{int} = -\sum \frac{\partial E_d}{\partial q_i} \delta q_i \text{ avec } 2E_d = [U]^T [K][U]$$

Le système de Lagrange à résoudre est de la forme :

$$[K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 0 \\ Y_2 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Les équations 3, 5 et 6 nous permettent de déterminer le champ de déplacement de la structure (déformation de la structure)
- Les équation 1, 2 et 4 permettent de calculer les efforts aux appuis en fonction des déplacements.

Calcul de la matrice de rigidité de la structure :

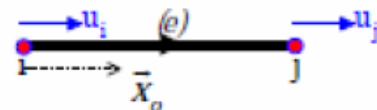
$$\partial T_{ext} = X_1 \partial u_1 + Y_1 \partial v_1 + Y_2 \partial v_2 + F \partial u_3$$

#### IV.2.2 Calcul de la matrice raideur

Utilisons les résultats tirés de l'énergie de déformation pour un élément  $(i, j)$  de longueur  $l_e$ .

- En **ID**

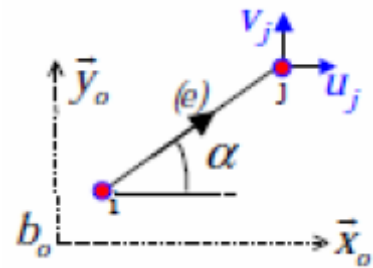
$$[K_e] = \frac{ES}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ sur } [u_i \quad u_j]^T$$



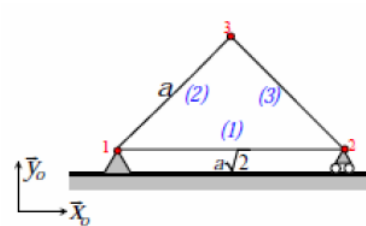
- En 2D

$$[K_e] = \frac{ES}{l_e} \begin{bmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{bmatrix} \text{ sur } [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]$$

Avec  $[A] = \begin{bmatrix} C_\alpha^2 & C_\alpha S_\alpha \\ C_\alpha S_\alpha & S_\alpha^2 \end{bmatrix}$  où  $C_\alpha = \cos \alpha$   
 $S_\alpha = \sin \alpha$

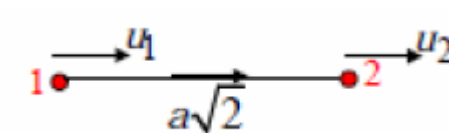


Notre structure est composée de trois éléments barres



- Pour l'élément 1 (1,2)

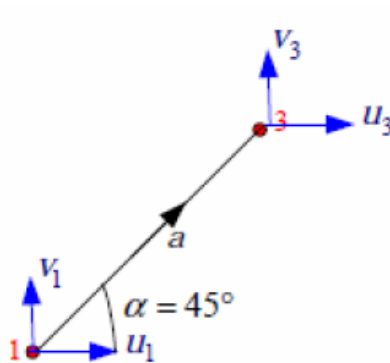
$$[K]_1 = \frac{ES}{a\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ sur } \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$



- Pour l'élément 2 (1,3)

$$[K]_2 = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

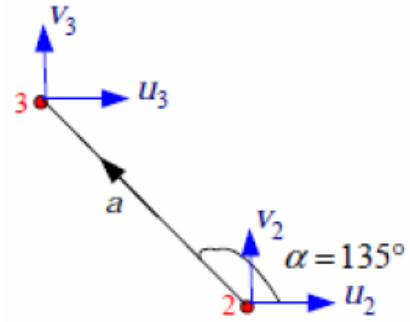
sur  $[u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3]^T$



- Pour l'élément 3 (2,3)

$$[K]_3 = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sur  $[u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T$



L'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformation de chaque élément. L'assemblage des matrices consiste à ranger chaque terme dans une matrice globale définie sur le vecteur :  $\{U\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T$

D'où la matrice obtenue par assemblage est appelée matrice globale

$$[K] = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 + \sqrt{2} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 + 1 & 1 - 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 - 1 & 1 + 1 \end{bmatrix}$$

### IV.2.3 Résolution

L'équation matricielle  $[K]\{U\} = \{F\}$  à résoudre est la suivante :

$$\frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1+1 & 1-1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1-1 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 0 \\ Y_2 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Commençons par calculer les déplacements en prenant le système réduit ci-dessous :

$$\frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

qui nous donne comme solutions en déplacements

$$\begin{cases} u_2 = \frac{F}{ES} \frac{a}{\sqrt{2}} \\ u_3 = \frac{F}{ES} a \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \\ v_3 = -\frac{F}{ES} \frac{a}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Et par conséquent, nous pouvons calculer les efforts aux appuis à partir du sous système réduit correspondant suivant :

$$\frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$

on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{ES}{2a} [-\sqrt{2} u_2 - (u_3 + v_3)] \\ Y_1 = -\frac{ES}{2a} (u_3 + v_3) \\ Y_2 = \frac{ES}{2a} (-u_2 + u_3 - v_3) \end{array} \right.$$

Avec

$E = 2.110^5 \text{ MPa}$  : Module de Young

$S = 400 \text{ mm}^2$  : Section transversale de l'élément barre

$a = 1000 \text{ mm}$  : Longueur élémentaire des éléments (1,3) et (2,3)

$F = 10 \text{ kN}$  : Force appliquée au nœud libre 3

Tableau 4.1 Données géométriques et mécaniques

On trouve :

Les résultats en déplacement  $\left\{ \begin{array}{l} u_2 = 0.084 \text{ mm} \\ u_3 = 0.160 \text{ mm} \\ v_3 = -0.042 \text{ mm} \end{array} \right.$

et les efforts aux appuis  $\left\{ \begin{array}{l} X_1 = -9945 \text{ N} \\ Y_1 = -4956 \text{ N} \\ Y_2 = 4956 \text{ N} \end{array} \right.$

**IV.2.4 Post-traitement**

Pour calculer les contraintes dans les barres, utilisons les résultats connus suivants

En <b>1D</b>	$N_e = \frac{ES}{l_e} (u_j - u_i)$
En <b>2D</b>	$N_e = \frac{ES}{l_e} [C_\alpha \quad S_\alpha] \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{ES}{a\sqrt{2}}(u_2) = \frac{F}{2} \\ N_2 = \frac{ES}{a\sqrt{2}}(u_3 + v_3) = \frac{F}{\sqrt{2}} \\ N_3 = \frac{ES}{a\sqrt{2}}(u_3 - u_2 - v_3) = -\frac{F}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Et enfin les contraintes dans les barres sont données par :

Dans l'élément barre <b>1 (1,2)</b>	$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{F}{2S_1}$	Contrainte de traction
Dans l'élément barre <b>2 (1,3)</b>	$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{F}{S_2\sqrt{2}}$	Contrainte de traction

Dans l'élément barre 3 (2,3)	$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = -\frac{F}{S_3\sqrt{2}}$	Contrainte de compression
------------------------------	---	---------------------------

Et numériquement, on aura avec des sections égales :

$$S_1 = S_2 = S_3 = S = 400 \text{ mm}^2$$

Dans l'élément barre 1 (1,2)	$\sigma_1 = 12.5 \text{ MPa}$	Contrainte de traction
Dans l'élément barre 2 (1,3)	$\sigma_2 = 17.68 \text{ MPa}$	Contrainte de traction
Dans l'élément barre 3 (2,3)	$\sigma_3 = -17.68 \text{ MP}$	Contrainte de compression

### IV.3 Validation du programme

Reprenons la résolution du problème précédent à l'aide de l'application que nous avons développée en Matlab. Cette application a été développée à partir d'un petit programme qu'on utilise pour déterminer le champ des déplacements nodaux et calcul des réactions aux appuis pour l'élément barre et l'élément ressort, nous l'avons introduit un module qui permet de traiter un calcul complet qui assure la détermination des déplacements nodaux, les efforts de réactions (efforts aux appuis), la contrainte normale (contrainte de traction ou compression) dans chaque élément et même les efforts nodaux (efforts internes).

Cette application est réservée aux calculs des structures en treillis dont les éléments sont assemblés par rotule, en effet pour toutes les structures isostatiques.

#### IV.3.1 Introduction des données

Afin de faire in calcul d'une structure en treillis faire une division du domaine (structure) en plusieurs éléments est appelée maillage. On utilise deux tableaux pour la description du maillage : tableau de connectivités des éléments et tableau des coordonnées des noeuds.

### IV.3.1.1 Tableau de connectivité

Pour notre structure, on obtient le tableau connectivité comme suit :

<i>Elément</i>	<i>Noeud ① (début)</i>	<i>Noeud ② (début)</i>
1	1	2
2	1	3
3	2	3



Tableau IV.1 : Tableau de connectivité

### IV.3.1.2 Tableau de coordonnées des nœuds

Puisque la structure est plane ou admet un plan de symétrie, on lui associe un repère à 2D

et le tableau de coordonnées des nœuds est obtenu comme suit :

<i>Tableau des coordonnées</i>		
<i>Noeud</i>	<i>Coordonnée (x)</i>	<i>Coordonnée (y)</i>
1	0	0
2	1414	0
3	707	707

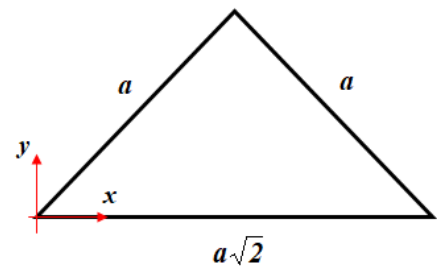
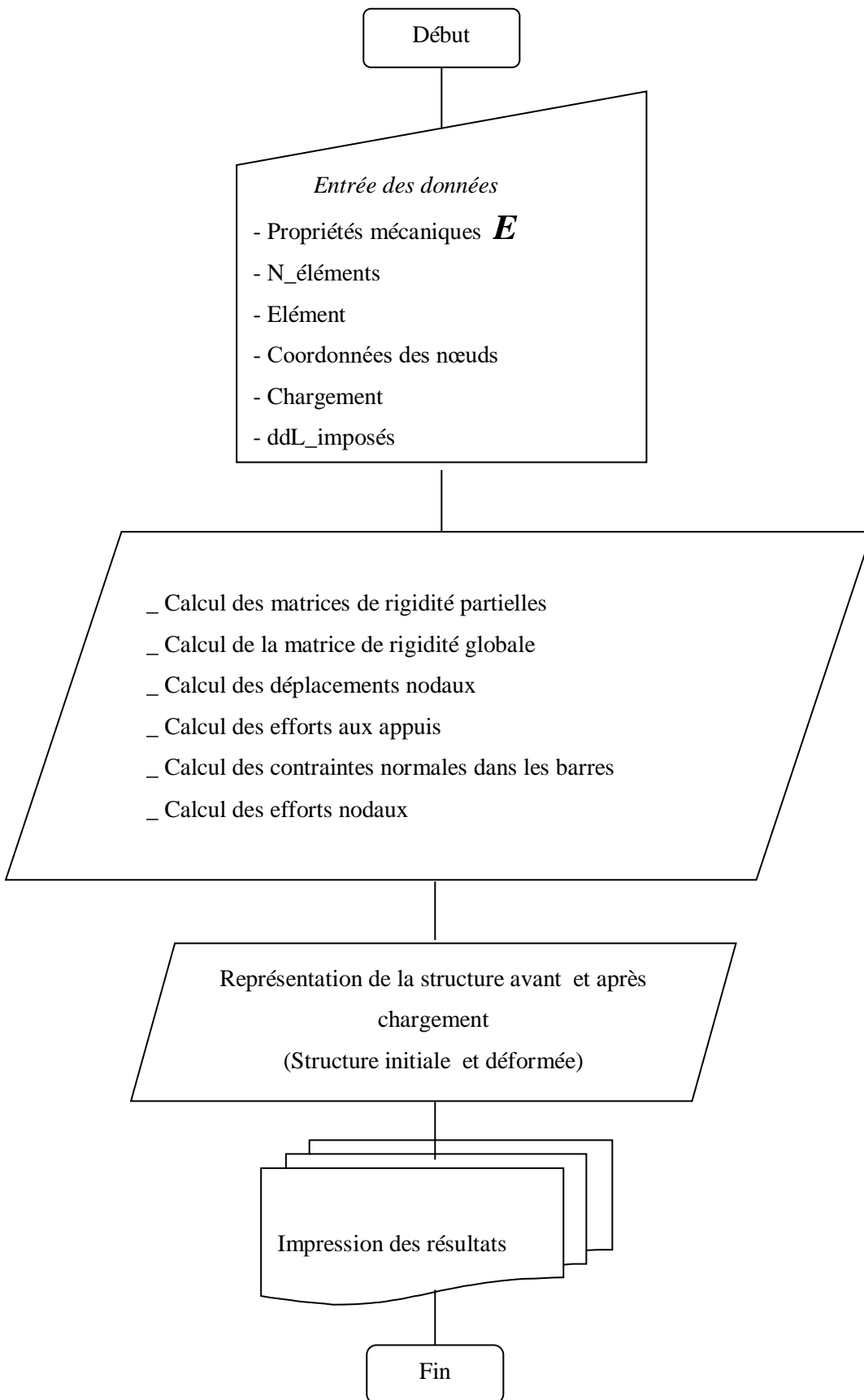


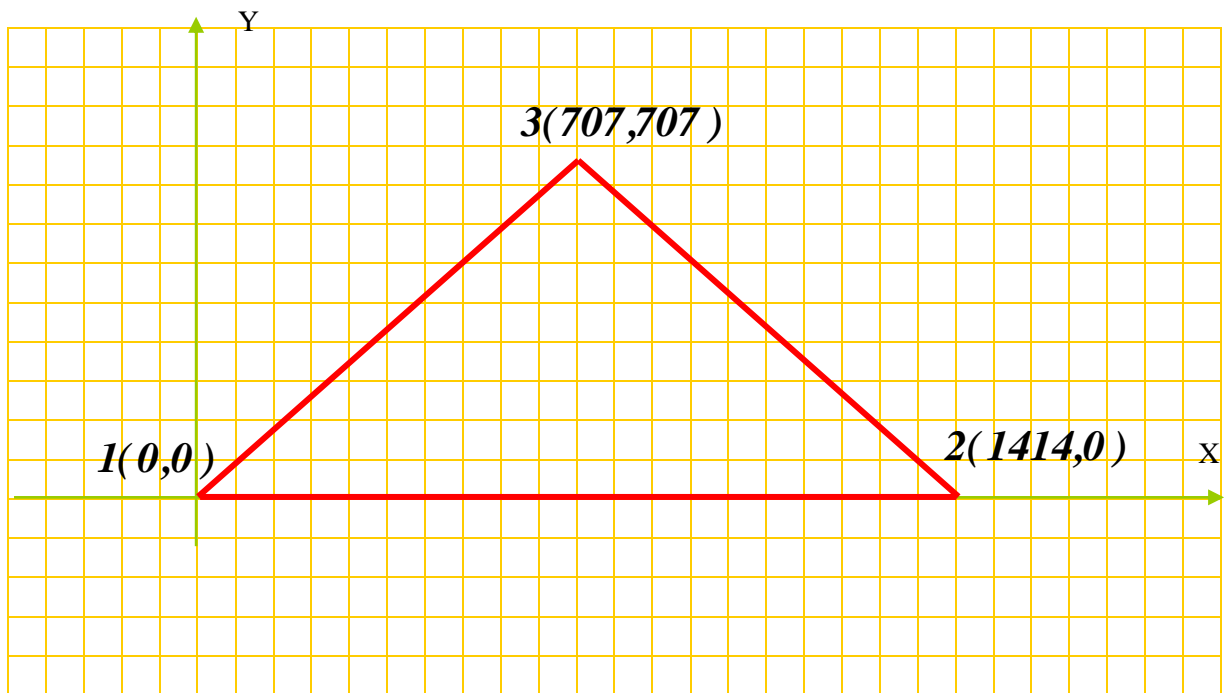
Tableau IV.2 : Tableau de coordonnées

### IV.3.2 Organigramme du programme

On introduit les données ci-dessus selon l'organigramme ci-dessous :

- Les données mécaniques à partir du tableau 4.1
- Les données géométrique à partir du tableaux 4.1, 4.2 et 4.3





### IV.3.3 Résultats

Champ de déplacements		Réactions aux appuis	
1.0000	0	1.0e+004 *	
2.0000	0	0.0001	-1.0000
3.0000	0.0842	0.0002	-0.5000
4.0000	0	0.0004	0.5000
5.0000	0.1611		
6.0000	-0.0421		

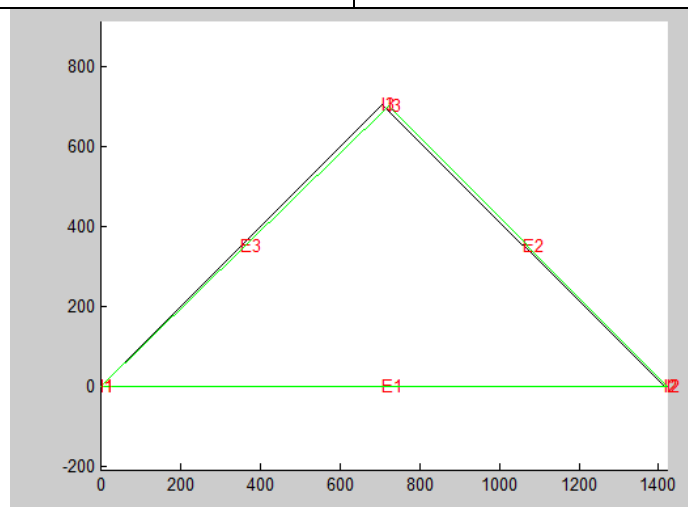


Figure IV.4 Structure initiale et structure déformée

### IV.3.4 Comparaison des résultats en déplacements et en réactions aux appuis

En comparants les résultats trouvés ci-dessus avec ceux qui sont trouvés manuellement (3.2.3.) .

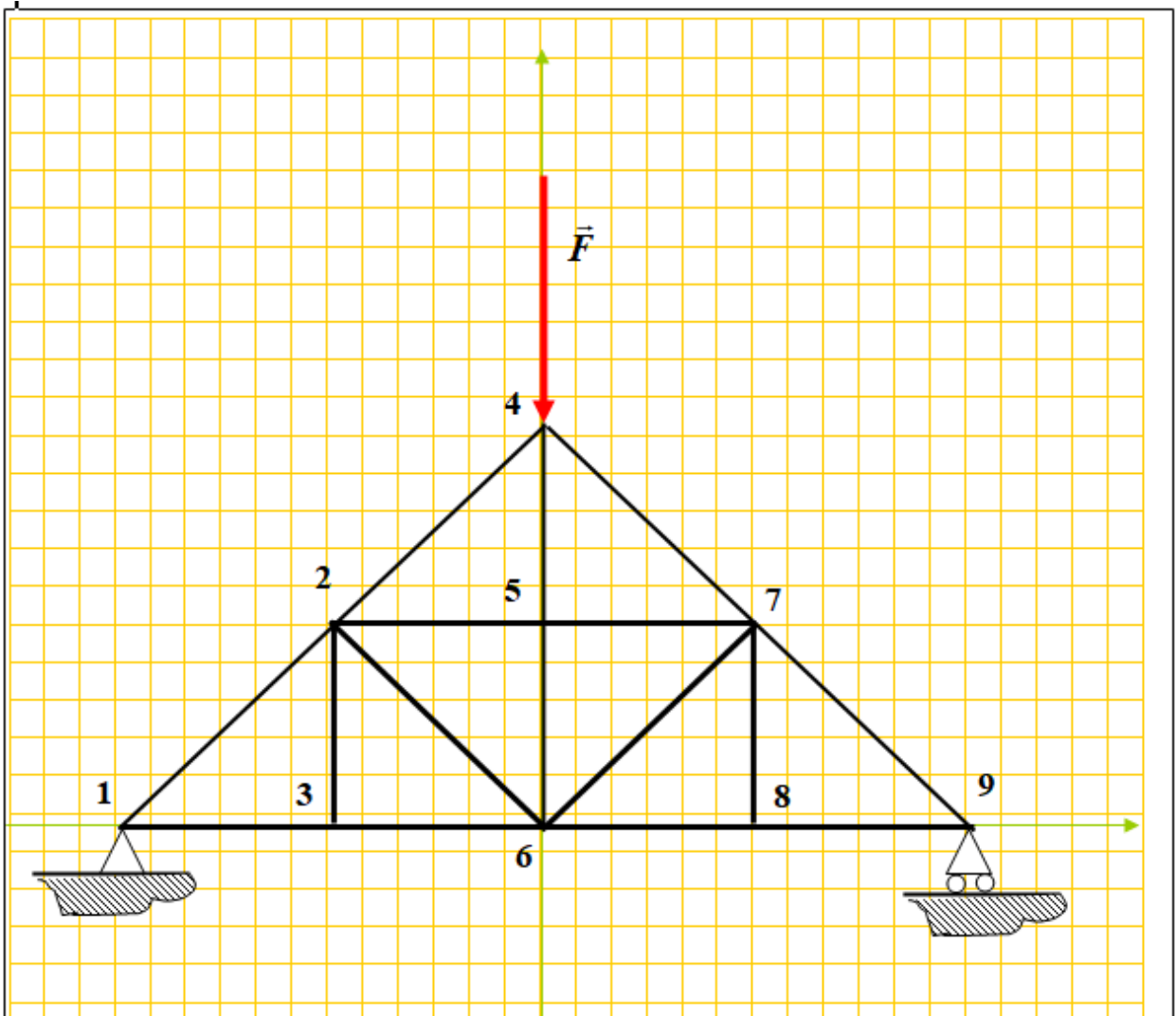
En déplacements (mm)			En réactions aux appuis (N)				
	Calcul manuel	Calcul par programme	Erreur %		Calcul manuel	Calcul par prog.	Erreur %
$u_2$	0.0840	0.0842	0,23	$X_1$	-9945	-10000	0,55
$u_3$	0.1600	0.1611	0,68	$Y_1$	-4956	-5000	0,88
$v_3$	-0.0420	-0.0421	0,23	$Y_2$	4956	5000	0,88

D'après les résultats de comparaison ci-dessus, on remarque clairement que les résultats donnés par le programme sont bien estimés, ce qui valide fortement l'efficacité du programme.

### IV.4 Analyse et optimisation d'une structure en treillis

Prenons une ferme de toit représentée ci-dessous, est une structure en treillis à 16 éléments de longueur égale à  $1m$ , liés par 9 nœuds rotules sollicitée par une charge verticale au nœud 4 . La structure possède un appui double au nœud 1 et un appui simple au nœud 9, elle est chargée au nœud 4 par une force verticale

$$|\vec{F}| = 20 kN$$



**IV.4.1 Tableau de connectivité**

Dressons le tableau de connectivité correspondant à la structure à analyser

Élément	Nœud (i)	Nœud (j)
1	1	2
2	1	3
3	2	3
4	3	6

<b>5</b>	<b>2</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>2</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>2</b>	<b>4</b>
<b>9</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>10</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>11</b>	<b>5</b>	<b>7</b>
<b>12</b>	<b>4</b>	<b>7</b>
<b>13</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
<b>14</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>15</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>16</b>	<b>7</b>	<b>9</b>

*Tableau IV.3*

#### **IV.4.2 Tableau de coordonnées**

A partir du tableau de connectivité ci-dessus, établissons le tableau de coordonnées des nœuds tout en respectant l'ordre de nomenclature des nœud

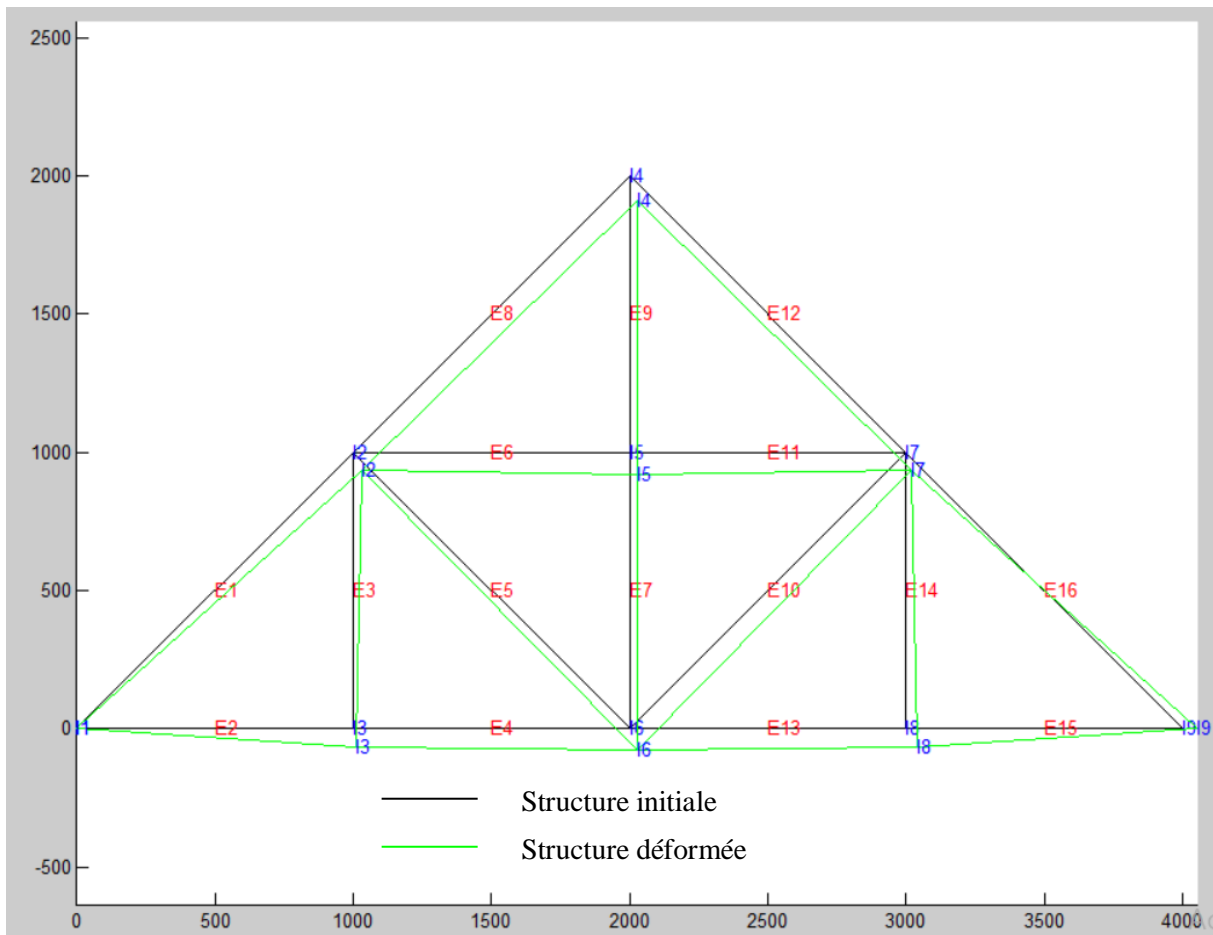
<b>Nœud</b>	<b>Coordonnée (X) (mm)</b>	<b>Coordonnée (Y) (mm)</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>2</b>	<b>1000</b>	<b>1000</b>
<b>3</b>	<b>1000</b>	<b>0</b>
<b>4</b>	<b>2000</b>	<b>2000</b>
<b>5</b>	<b>2000</b>	<b>1000</b>
<b>6</b>	<b>2000</b>	<b>0</b>
<b>7</b>	<b>3000</b>	<b>1000</b>
<b>8</b>	<b>3000</b>	<b>0</b>
<b>9</b>	<b>4000</b>	<b>0</b>

*Tableau IV.4*

#### IV.4.3 Résultat de l'analyse

Avec le chargement vertical  $|\vec{F}| = 20 \text{ kN}$ , on obtient les résultats ci-dessous :

<i>Champ de déplacements nodaux</i>	<i>Réactions aux appuis</i>
<p>Déplacements</p> <pre> 1.0000      0 2.0000      0 3.0000    0.3018 4.0000   -0.6553 5.0000    0.1250 6.0000   -0.6553 7.0000    0.2500 8.0000   -0.8839 9.0000    0.2500 10.0000  -0.8321 11.0000    0.2500 12.0000  -0.7803 13.0000    0.1982 14.0000  -0.6553 15.0000    0.3750 16.0000  -0.6553 17.0000    0.5000 18.0000      0                     </pre>	<p>Réactions</p> <pre> 1.0e+04 * 0.0001  -0.0000 0.0002    1.0000 0.0018    1.0000                     </pre>
<i>Contraintes normales dans les barres</i>	<i>Force nodale maximale</i>
<p>Contraintes</p> <pre> Sig1=-35.355339 Sig2=25.000000 Sig3=0.000000 Sig4=25.000000 Sig5=7.322330 Sig6=-10.355339 Sig7=-10.355339 Sig8=-28.033009 Sig9=-10.355339 Sig10=7.322330 Sig11=-10.355339 Sig12=-28.033009 Sig13=25.000000 Sig14=0.000000 Sig15=25.000000 Sig16=-35.355339                     </pre>	<pre> nn16=9.000000 Force Nod max od=74558.441227 =====                     </pre>

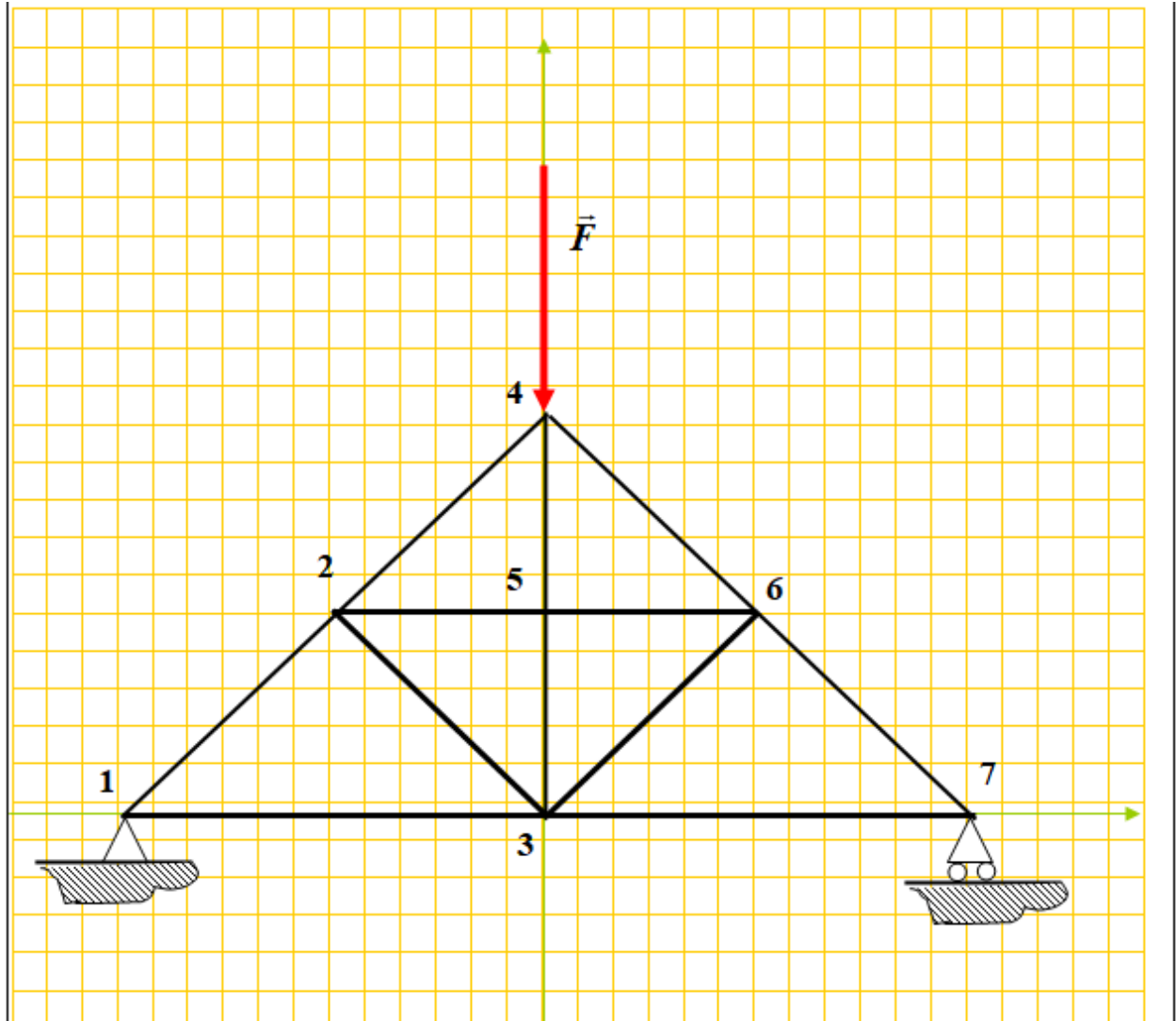


*Figure IV.4 Structure initiale et structure déformée  
Structure non optimisée*

#### IV.4.4 Interprétation des résultats

D'après le champ des déplacements, on remarque que tous les nœuds ont subis un déplacement ce qui implique la déformation ou le déplacement des éléments de la structure et par conséquent la déformation de la structure qui se caractérise par déplacement vers la droite qui s'explique par le degré de mobilité imposé à l'appui (appui simple). D'après le profil des contraintes normales calculées dans les barres, on remarque la présence de deux contraintes nulles dans la barre 3 et dans la barre 14 donc elles ne sont pas sollicitées ni par traction ni par une compression malgré qu'elles ont subis toutes les deux un déplacement sans déformation de longueur (déplacement d'un corps rigide), ce qui nous permet d'optimiser cette structure en enlevant les barres citées ci-dessus c'est-à-dire la remplacer par une autre structure ayant un nombre d'éléments réduit soit 12

éléments au lieu de 16 éléments (résignation des deux barres 3 et 14 plus l'élimination de deux liaisons rotules) soit la nouvelle structure :



**IV.4.5 Tableau de connectivité**

Dressons le tableau de connectivité correspondant à la structure à analyser

<b>Élément</b>	<b>Nœud (i)</b>	<b>Nœud (j)</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>1</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>2</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>3</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>2</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>8</b>	<b>4</b>	<b>6</b>
<b>9</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>10</b>	<b>3</b>	<b>6</b>
<b>11</b>	<b>3</b>	<b>7</b>
<b>12</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>13</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
<b>14</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>15</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>16</b>	<b>7</b>	<b>9</b>

**IV.4.6 Tableau de coordonnées**

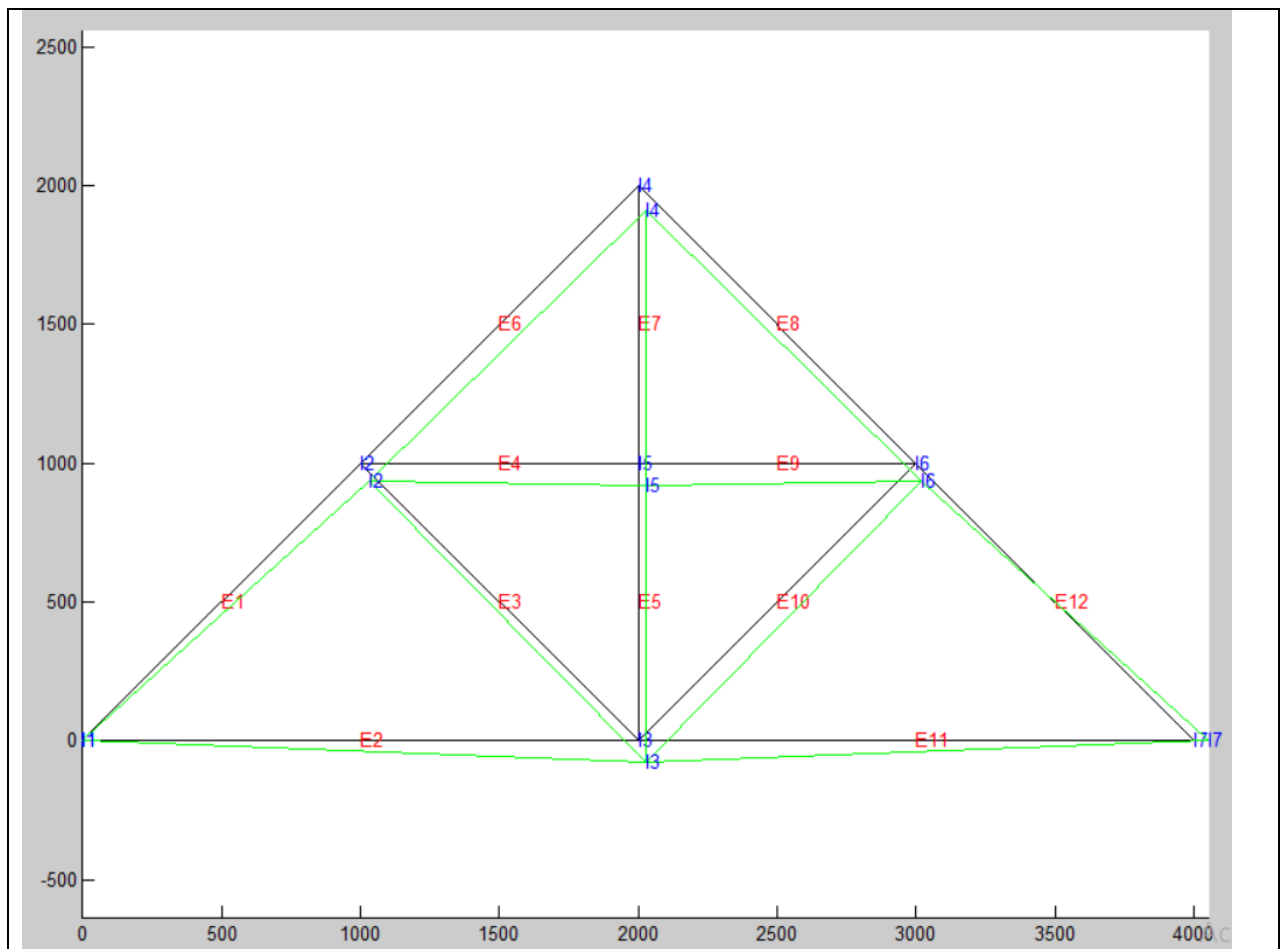
A partir du tableau de connectivité ci-dessus, établissons le tableau de coordonnées des nœuds tout en respectant l'ordre de nomenclature des nœud

<b>Nœud</b>	<b>Coordonnée (X) (mm)</b>	<b>Coordonnée (Y) (mm)</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>2</b>	<b>1000</b>	<b>1000</b>
<b>3</b>	<b>2000</b>	<b>0</b>
<b>4</b>	<b>2000</b>	<b>2000</b>
<b>5</b>	<b>2000</b>	<b>1000</b>
<b>6</b>	<b>3000</b>	<b>1000</b>
<b>7</b>	<b>4000</b>	<b>0</b>
<b>8</b>		
<b>9</b>		

#### IV.4.7 Résultat de l'analyse

Avec le chargement vertical  $|\vec{F}| = 20 \text{ kN}$ , on obtient les résultats ci-dessous :

<i>Champ de déplacements nodaux</i>	<i>Réactions aux appuis</i>
<pre> Déplacements   1.0000      0   2.0000      0   3.0000    0.3018   4.0000   -0.6553   5.0000    0.2500   6.0000   -0.7803   7.0000    0.2500   8.0000   -0.8839   9.0000    0.2500  10.0000   -0.8321  11.0000    0.1982  12.0000   -0.6553  13.0000    0.5000  14.0000      0                     </pre>	<pre> Réactions   1.0e+04 *           0.0001  -0.0000           0.0002   1.0000           0.0014   1.0000                     </pre>
<i>Contraintes normales dans les barres</i>	<i>Force nodale maximale</i>
<pre> Sig1=-35.355339 Sig2=25.000000 Sig3=7.322330 Sig4=-10.355339 Sig5=-10.355339 Sig6=-28.033009 Sig7=-10.355339 Sig8=-28.033009 Sig9=-10.355339 Sig10=7.322330 Sig11=25.000000 Sig12=-35.355339 ===== maxsig0=35.355339                     </pre>	<pre> nn16=9.000000 Force Nod max od=74558.441227 =====                     </pre>



*Figure IV.5 Structure initiale et structure déformée*

*Structure optimisée*

#### IV.4.8 Interprétation et comparaison des résultats

Les résultats obtenus pour la structure optimisée sont identiques à ceux de la structure initiale (non optimisée) donc cette optimisation nous permis de gagner deux éléments et de supprimer deux liaisons d'autre part d'alléger la structure.

### CONCLUSION

Après cette étude analytique sur les treillis qui nous a permis de développer un programme ou application de calcul, on conclut :

- Tous les calculs sont systématiques et la démarche suivie sera toujours la même en statique.
- Facilité de programmation de ce type de problème de calcul.
- Facilité de calcul des structures en treillis isostatiques.
- Seule l'analyse, du problème et l'interprétation des résultats, reste à la charge du concepteur.
- La matrice de rigidité est l'élément qui assure la relation entre charge et déformation du système réduit était inversible «  $Det [K] \neq 0$  » car les conditions aux limites en déplacement bloquaient tous les modes rigides de la structure.
- Facilité de trouver la solution lorsque le problème statique bien posé.
- Les efforts calculés aux appuis assurent l'équilibrage parfait du chargement.
- Les résidus d'équilibre sont nuls, car nous travaillons sur la solution analytique de l'équation matricielle. Dans le cas d'une résolution numérique ces résidus doivent tendrent vers zéro (erreur numérique).
- Les contraintes calculées sur les éléments équilibrent de façon exacte (aux résidus près) les charges nodales. Ceci est vrai dans ce cas particulier « calcul statique d'un treillis chargé aux noeuds » car l'approximation utilisée représente le champ exact de la solution analytique « effort normal constant dans chaque élément de la structure ».
- L'erreur de discrétisation est nulle.
- En post – traitement il est possible d'isoler un à un chaque élément de la structure pour écrire l'équation matricielle de l'équilibre de l'élément. Ce calcul permet de déterminer les efforts internes aux noeuds de la structure

## ***Références Bibliographiques :***

1. <https://appx.cchic.ca/svilleneuve/materiaux/chap4.pdf>
2. Bâtiments en acier à simple rez-de-chaussée. Partie 7 : Ingénierie incendie.
3. <https://usihome.com/decouvrez-differents-modeles-fermes-de-toit>.
4. Projet de passerelle mixte bois/acier sur l'Ourthe à La Roche en Ardennes, Belgique. Maître d'œuvre Francy Simon, La Roche en Ardenne, Belgique, 2004
5. Mthode-des-sections-pour-les-treillis-plans-connaissances-de-base\_french.pdf
6. Claude Hazard, Frédy Lelong et Bruno Quinzain, Mémotech — Structures métalliques, Paris, Casteilla, 1997, 352 p. (ISBN 2-7135-1751-6), p. 162-164
7. <https://appx.cchic.ca/svilleneuve/materiaux/chap4.pdf>
8. <https://meefi.pedagogie.ec-nantes.fr/MEF/MIAS/treillis/treillis-RDM.pdf>
9. Calcul\_des\_structures\_par\_elements\_finis\_Legay\_Cnam\_PARIS.pdf