



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abbes Laghrou Khenchela
Faculté des Sciences et Technologie
Département des Mathématiques et
Informatique



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Thème

**Transformation De Laplace Et Ces Application Sur Les
Equations Différentielles Entiers Et Fractionnaires**

Présentée par : *ASSAIDI Abderraouf*

Devant le jury composé de :

A.Abdelkrim

C.Laouar

F.Tbessi

Dr Université de Khenchela

Dr Université de Khenchela

Dr Université de Khenchela

Président.

Encadreur.

Examineur.

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022/2023



Dédicace



Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux.

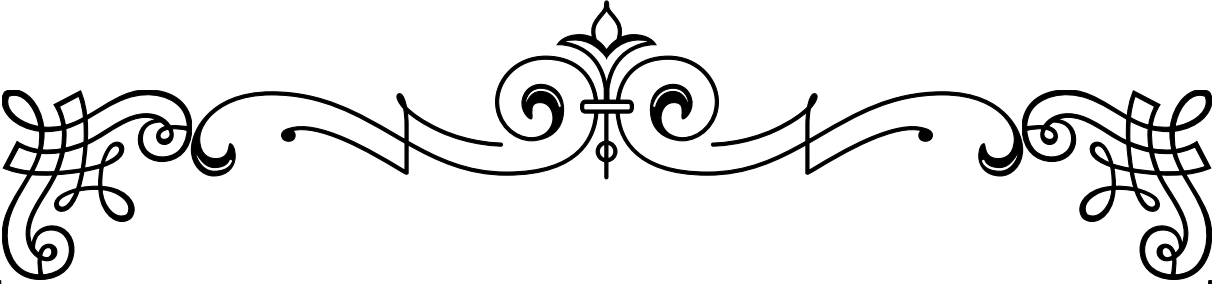


*Louange
à Dieu qui
a éclairé mon
chemin et m'a guidé
dans la concrétisation de
cette étape importante de ma car-
rière académique à travers cette mé-
moire. Ce document est le fruit de mes efforts
et de mes réussites, grâce à Sa grâce divine. Je le
dédie humblement à **mes vénérables parents**, qu'Allah les
préserve et les protège. Je tiens à exprimer ma profonde grati-
tude envers m'encadreuse, **Dr L. Chafia** pour tous les conseils
et orientations qu'elle m'a donnés tout au long de la réal-
isation de ce mémoire. Je remercie également tous
les professeurs du département pour chaque
lettre de savoir qu'ils nous ont enseignée.
Je tiens également à exprimer
ma gratitude envers mes ca-
marades, leur souhai-
tant réussite dans
leur par-
cours.*



ABDERRAOUF.ASSAIDI

Remerciement



Au sujet du Prophète Mohammed, le Sceau des Prophètes, que la paix et les bénédictions de Dieu soient sur lui, il a dit : "Celui qui n'exprime pas sa gratitude envers les gens n'exprime pas sa gratitude envers Dieu, et celui qui vous fait une bonne action, répondez-lui de manière adéquate. Si vous n'êtes pas en mesure de le faire, alors priez pour lui." En suivant notre Prophète et en reconnaissant les bienfaits d'Allah, exalté-Il, je Le remercie pour m'avoir permis de réaliser ce modeste travail. Je rends hommage à mes chers parents, source de mon inspiration, qui ne m'ont jamais privé de rien pour me permettre d'atteindre les plus hauts rangs. Que Dieu les protège et les guide de Son regard vigilant qui ne dort jamais. J'adresse mes sincères remerciements et ma gratitude à m'en-cadreuse bienveillante, Dr. Chafia Laouar, pour ses conseils tout au long de la réalisation de ce mémoire. Je prie Allah de vous combler de bien et de vous accorder la santé et le bien-être. Je salue respectueusement le comité qui a eu l'honneur de discuter de ce mémoire. Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à nous aider à réaliser ce modeste travail. Un grand merci.

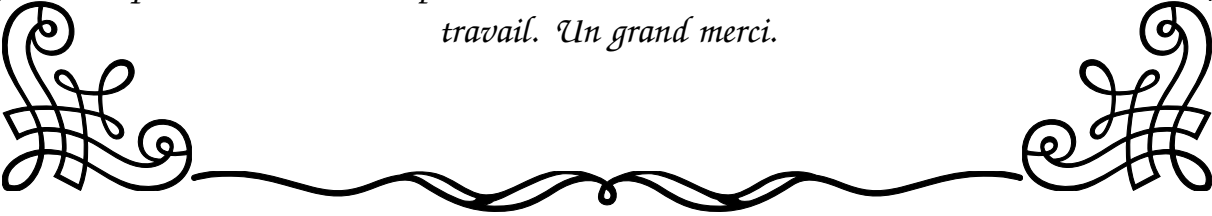


Table des matières

Remerciement	2
Abstract	5
Résumé	6
	7
Notations	8
Introduction	9
1 Transformation de Laplace et ses applications sur les équations différentielles entières	10
1.1 Définition de la transformation de Laplace; Exemples	10
1.2 Conditions d'existence du transformation de Laplace	12
1.3 Propriétés de la transformation de Laplace	13
1.4 Relation entre la transformation de Laplace et la transformation de Fourier . .	15
1.5 L'inverse de la transformation de Laplace	15
1.6 Résolution des équations différentielles ordinaires par la transformation de Laplace	16
2 Transformation de Laplace et ses applications sur les équations différentielles fractionnaires	20
2.1 Fonctions spéciales	20
2.1.1 Fonction Gamma	20
2.1.2 Fonction Bêta	22
2.1.3 Fonction de Mittag-Leffler	23
2.2 Intégrale de Riemann-Liouville	25
2.3 Transformation de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville	27
2.4 Dérivées fractionnaires	28
2.4.1 Dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville	28
2.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	31
2.5 Propriétés des opérateurs fractionnaires	35
2.6 Transformation de Laplace du dérivées fractionnaires	37
2.7 Équations différentielles fractionnaires	38
2.7.1 Équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville	38
2.7.2 Équation différentielle fractionnaire de type Caputo	39

2.8	Résolution des équations différentielles fractionnaires par la transformation de Laplace	40
2.8.1	Équation différentielle fractionnaire homogène	40
2.8.2	Équation différentielle fractionnaire non homogène	41

Conclusion	43
-------------------	-----------

Bibliographie	44
----------------------	-----------

Abstract

In this dissertation, we discussed the Laplace transform and its properties, along with some examples of common functions. Moreover, we learned how to apply it to solve certain types of ordinary differential equations and fractional differential equations.

Keywords : Laplace Transform; Integer Order Differential Equation; Gamma Function; Beta Function. Mittag-Leffler Function; Riemann-Liouville Integral. Caputo-Type Fractional Derivative; Riemann-Liouville-Type Fractional Derivative. Fractional Order Differential Equation.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons retenu la transformation de Laplace et ses propriétés, ainsi que quelques exemples de fonctions courantes. De plus, nous avons appris comment l'appliquer pour résoudre certains types d'équations différentielles ordinaires et d'équations différentielles fractionnaires.

Mots-clés: Transformation de Laplace; Equation différentielle d'ordre entier; Fonction gamma. Fonction beta. Fonction Mittag-Leffler. Intégrale de Riemann-Liouville. Dérivé fractionnaire de type de Caputo; Dérivé fractionnaire de type Riemann-Liouville; Equation différentielle d'ordre fractionnaire.

الملخص:

في هذه المذكرة تطرقنا الى تعريف تحويل لابلاس و معرفة خصائصه وبعض الأمثلة في استخدامه على بعض من الدوال المألوفة .
كما تعرفنا ايضاً على استخداماته في حل بعض الأنواع من المعادلات التفاضلية العادية والكسرية.

الكلمات المفتاحية: تحويل لابلاس، تحويل فوريي، معادلة تفاضلية ذات رتبة صحيحة، الدالة غاما، الدالة بيتا، دالة ميتاغ-لفلر، التكامل الكسري من نوع ريمان-ليوفيل، المشتقة الكسرية من نوع كابيتو، المشتقة الكسرية من نوع ريمان-ليوفيل، معادلة تفاضلية كسرية.

Notations

$\mathcal{L}\{f\}$	La transformation de Laplace de la fonction f .
$F(S)$	Autre notation de la transformée de Laplace.
$\Re(s)$	La partie réelle du nombre complexe s .
$L^p(\mathbb{R})$	Espace des fonctions tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) ^p < \infty$.
$L^q(\mathbb{R})$	L'espace dual de $L^p(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
TL	Abréviation du (Transformée de Laplace).
$L^1(\mathbb{R})$	Espace des fonctions intégrables sur \mathbb{R} .
$\Gamma(z)$	Fonction gamma .
$n!$	Fonction factoriel .
$\beta(z, w)$	Fonction beta .
$\mathcal{F}(s)$	La transformation de Fourier.
$E_\alpha(z)$	Fonction de Mittag-Leffler .
$\mathcal{L}^{-1}\{F\}$	La transformation inverse de Laplace.
\mathcal{I}_x^α	Intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α .
${}^{RL}\mathcal{D}_x^\alpha$	Dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .
${}^C\mathcal{D}_x^\alpha$	Dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre α .
$C[a, b]$	Espace des fonctions continues sur $[a, b]$.

Introduction

Au début du 19^{ème} siècle, le mathématicien français Pierre-Simon Laplace cherchait un moyen de résoudre les équations différentielles complexes qui se posaient dans la physique et l'ingénierie. Après des années de travail acharné, il a finalement développé une méthode révolutionnaire appelée la transformation de Laplace. Cette méthode permettait de transformer une équation différentielle en une simple équation algébrique, rendant ainsi la résolution plus facile. La transformation de Laplace est rapidement devenue un outil indispensable pour les ingénieurs et les physiciens, et elle est encore largement utilisée aujourd'hui.

La transformation de Laplace peut être utilisée pour résoudre une grande variété d'équations différentielles entières, y compris les équations linéaires et non-linéaires. Elle est particulièrement utile pour résoudre les équations différentielles qui ont des conditions initiales ou des conditions aux limites, car elle permet de calculer facilement les solutions en fonction de ces conditions. En outre, la transformation de Laplace peut être utilisée pour effectuer des opérations mathématiques telles que la dérivation et l'intégration, ce qui la rend encore plus polyvalente.

La transformation de Laplace peut également être utilisée pour résoudre des équations différentielles fractionnaires, qui sont des équations qui contiennent des dérivées d'ordre non-entier. Cela peut sembler étrange, mais la transformation de Laplace permet de transformer ces équations en équations algébriques plus simples, qui peuvent ensuite être résolues à l'aide de techniques mathématiques standard. La transformation de Laplace a donc ouvert la voie à une nouvelle gamme d'applications en mathématiques et en sciences, en permettant de résoudre des problèmes qui étaient auparavant considérés comme insolubles.

Transformation de Laplace et ses applications sur les équations différentielles entières

Dans ce chapitre, nous commençons par un section de concepts de base de la transformation de Laplace et ses conditions d'existence et les propriétés fondamentales et quelques exemples et en fin nous proposons l'inverse de cette transformation. La suite de chapitre, nous représentons l'application de la transformée de Laplace sur les équations différentielles entières.

1.1 Définition de la transformation de Laplace; Exemples

Définition 1.1

Transformation de Laplace de la fonction f noté $\mathcal{L}\{f\}$, où $F(s)$ est définie par la formule suivante :

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C};$$

à condition que l'intégrale impropre soit convergente.

La transformation de Laplace peut être étudiée sous deux formes différentes :

- **Transformation fonctionnelle:** Il s'agit de la transformée de Laplace d'une fonction spécifique.
- **transformation opérationnelle:** On s'intéresse à la transformée de Laplace des opération comme la primitive, la dérivée ... etc, d'une fonction $f(t)$.

Exemples usuels : On considère toujours que $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue au moins par morceau.

- Pour $f(t) = 1$,

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} 1e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

- Pour $f(t) = t$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\}(s) &= \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^2} \quad s > 0.\end{aligned}$$

- Pour $f(t) = t^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\}(s) &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt \\ &= \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} dt, \\ &= \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}\{t^{n-2}\} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

- Pour $f(t) = e^{at}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= -\frac{1}{a-s}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

- Pour $f(t) = e^{ait} = \cos at + i \sin at$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{ait}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{(ai-s)t} dt \\ &= -\frac{1}{ai-s} \\ &= \frac{s}{s^2+a^2} + i \frac{a}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{L}\{\cos at\}(s) = \frac{s}{s^2+a^2},$$

et

$$\mathcal{L}\{\sin at\}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

- Pour $f(t) = \frac{1}{t}, \quad t > 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{1}{t} dt \\ &= \left[\ln t \cdot e^{-st} \right]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} \ln t \cdot e^{-st} dt.\end{aligned}$$

Cette intégrale diverge quand $t \rightarrow 0$, alors la transformation de Laplace de la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ n'existe pas.

1.2 Conditions d'existence du transformation de Laplace

Définition 1.2

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction d'ordre exponentiel a , s'il existe $a > 0$, $M > 0$ et $T > 0$ tel que:

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \text{ pour tout } t > T.$$

Théorème 1.1

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceau sur tout intervalle fini $[0, n]$. Si f est d'ordre exponentiel a , alors la transformation de Laplace de la fonction f existe pour tout $\Re(s) > a$.

Preuve: Pour $n > 0$, alors:

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^n f(t)e^{-st} dt + \int_n^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Comme f est continue par morceau sur $[0, n]$ alors l'intégrale de Laplace existe, et puisque f d'ordre exponentielle a pour tout $t > n$, alors on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \right| &\leq \int_n^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-st} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} Me^{at} e^{-st} dt \\ &= \frac{M}{s-a} < +\infty. \end{aligned}$$

Alors la transformation de Laplace existe pour tout $\Re(s) > a$. □

Théorème 1.2

Supposons que l'intégrale de Laplace existe pour $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est à dire que $f(t)e^{-\alpha t}$ est sommable. Si $\Re(s) > \alpha$ alors

$$\left| f(t)e^{-st} \right| < \left| f(t)e^{-\alpha t} \right|,$$

qui sa donne que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe.

Preuve: On a : $s = x + iy$, pour $\Re(s) > \alpha$

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}\{f\}(s) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)e^{-(x+iy)t}| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)| e^{-xt} dt \\ &< \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty. \end{aligned}$$

Qui sa donne que la transformation de Laplace existe pour $\Re(s) > \alpha$. □

Théorème 1.3

Soit f une fonction continue par morceau et d'ordre exponentielle a . Alors :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

1.3 Propriétés de la transformation de Laplace1. **Linéarité****Proposition 1.1**

Soient f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[0; +\infty[$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\} &= \int_0^{+\infty} (\lambda f + \mu g)e^{-st} \, dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} f e^{-st} \, dt + \mu \int_0^{+\infty} g e^{-st} \, dt \\ &= \lambda \mathcal{L}\{f\}(s) + \mu \mathcal{L}\{g\}(s).\end{aligned}$$

Donc la transformation de Laplace est linéaire.

2. **Transformation de Laplace de la dérivée:** La transformation de Laplace des dérivées successives d'une fonction f s'obtient par:

•

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} \, dt \\ &= [f(t)e^{-st}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} \, dt \\ &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f''(t)e^{-st} \, dt \\ &= [f'(t)e^{-st}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} \, dt \\ &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f^{(n)}(t)e^{-st} \, dt \\ &= s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

3. **Translation:** On suppose que la fonction h est définie par : $h(t) = e^{at}f(t)$, et on calcule sa transformation de Laplace.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t} \, dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s - a).\end{aligned}$$

4. **Dérivée de la transformation de Laplace:** Soit $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ la transformation de Laplace de la fonction f , leurs dérivées est définie par

•

$$\begin{aligned}\{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\}' &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} -t f(t) e^{-st} dt \\ &= -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s).\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\}'' &= \frac{d^2}{ds^2} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s).\end{aligned}$$

•

$$\{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\}^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s).$$

5. **Transformation de Laplace de la primitive**

$$\begin{aligned}\int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(u) du &= \int_s^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t) dt du \\ &= \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{-ut} f(t) du dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \int_s^{+\infty} e^{-ut} du dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s).\end{aligned}$$

6. **Transformation de Laplace du produit de convolution**

Définition 1.3

Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Le produit de convolution $f * g$ est définie par:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx.$$

La transformation de Laplace d'un produit convolé $f * g$ donné par:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s).$$

1.4 Relation entre la transformation de Laplace et la transformation de Fourier

Définition 1.4

Soit f une fonction intégrable, alors sa transformation de Fourier définie par :

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t} dt,$$

est notée aussi $\hat{f}(\xi)$.

On pose que $s = x + 2\pi i t \xi$ tel que $x > \zeta_0(f)$, et on calcul $\mathcal{L}\{f\}(x + 2\pi i t \xi)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(x + 2\pi i t \xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(x+2\pi i \xi)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt}e^{-2\pi i \xi t} dt \\ &= \mathcal{F}\{f(t)e^{-xt}\}(\xi). \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.5 L'inverse de la transformation de Laplace

Pour une fonction $f : [0; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, on suppose que la transformation de Laplace de f existe et notée $F(s)$, alors

Définition 1.5

La transformation de Laplace inverse si l'on considère uniquement les variables réelles, est donnée par la formule suivante :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t \geq 0,$$

ou bien notée

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = f(t).$$

L'inverse de la transformée de Laplace \mathcal{L}^{-1} vérifie les mêmes propriétés de la transformée de Laplace \mathcal{L} .

Table 1.1: Tableau de TL des fonctions

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}
$H(t - t_0)$	$\frac{e^{-st_0}}{s}$

1.6 Résolution des équations différentielles ordinaires par la transformation de Laplace

On suppose l'équation différentielle à coefficient constant d'ordre n

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y^{(2)}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + a_n y^{(n)}(t) = f(t). \quad (1.2)$$

Pour trouver une solution $y = y(t)$ de cette équation, tel que $t \geq 0$ et vérifiant les conditions : $y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}$, en passe a les étapes suivantes :

1. Appliquant TL, et utilisant ses propriétés

$$\mathcal{L}\{a_0 y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y^{(2)}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + a_n y^{(n)}(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

2. En utilise les techniques algébrique pour trouver $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.
3. Trouver $y(t)$ par l'utilisation de l'inverse de TL $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

On se propose d'utiliser la transformée de Laplace pour résoudre des équations différentielles.

Équation différentielle homogène :

On considère l'équation différentielle homogène suivante

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0,$$

avec ces conditions initiales : $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t) + 5y'(t) + 6y(t)\} &= 0 \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} + 5\mathcal{L}\{y'(t)\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} &= 0 \quad (\text{par la linéarité de TL}) \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 6Y(s) &= 0 \quad (\text{par la TL de la dérivée}). \end{aligned}$$

Donc

$$Y(s) = \frac{2s + 13}{s^2 + 5s + 6}.$$

2ème étape : Utilisant les techniques algébriques par la décomposition en élément simple, alors la solutions $Y(s)$ s'écrit par :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + 2} \\ Y(s) &= \frac{-7}{s + 3} + \frac{9}{s + 2}. \end{aligned}$$

3ème étape : Appliquant l'inverse de la transformée de Laplace pour trouver $y(t)$, alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s + 3} + \frac{9}{s + 2}\right\}(t) \\ y(t) &= -7e^{-3t} + 9e^{-2t}. \end{aligned}$$

Équation différentielle non homogène:

On considère l'équation différentielle non homogène suivante:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t,$$

avec $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

Appliquant la transformation de Laplace sur l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} + 2\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{t\} \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) &= \frac{1}{s^2}, \end{aligned}$$

Donc

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 1)s^2} + \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1}.$$

Utilisant les techniques algébrique alors par la décomposition en élément simple, alors la solution $Y(s)$ s'écrit par :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{(s + 1)^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s + 1} + \frac{F}{(s + 1)^2} \\ &= \frac{2}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2}. \end{aligned}$$

Appliquant l'inverse de la transformée de Laplace pour trouver $y(t)$, alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2}\right\}(t) \\ &= 2e^{-t} + te^{-t} - 2 + t + e^{-t} + te^{-t} \\ &= t - 2 + 3e^{-t} + 2te^{-t}. \end{aligned}$$

Système différentielle ordinaire:

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

Avec les conditions suivantes : $y(0) = 0$ et $x(0) = 3$. On applique la transformée de Laplace sur le système

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{3x(t) + 2y(t)\}(s), \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t) + 2y(t)\}(s), \end{cases}$$

,alors :

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 3X(s) + 2Y(s), \\ sY(s) - y(0) = X(s) + 2Y(s). \end{cases}$$

Enfin, on trouve

$$\begin{cases} (s - 3)X(s) - 2Y(s) = 3, \\ X(s) + (2 - s)Y(s) = 0. \end{cases}$$

Donc, nous obtenons un système à deux équations linéaires du premier degré d'inconnues $X(t)$ et $Y(t)$. Maintenant, on trouve $X(t)$ et $Y(t)$ par la méthode de Cramer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-3 & -2 \\ 1 & 2-s \end{vmatrix} = -s^2 + 5s - 4, \quad \Delta_X = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2-s \end{vmatrix} = 3(2-s), \quad \Delta_Y = \begin{vmatrix} s-3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Donc :

$$X(t) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{3s-6}{(s-1)(s-4)},$$

et

$$Y(t) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{3}{(s-1)(s-4)}.$$

Par la décomposition en élément simple :

$$X(t) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-4}, \quad Y(t) = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-4}$$

Appliquant l'inverse de la transformée de Laplace :

$$x(t) = e^t + 2e^{4t}, \quad y(t) = -e^t + e^{4t}.$$

Transformation de Laplace et ses applications sur les équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, nous abordons les informations fondamentales sur le calcul fractionnaire en comprenant les fonctions spéciales et en expliquant l'intégration et la dérivation de Riemann-Liouville. Nous découvrons également leurs propriétés distinctives, ainsi que la dérivée de Caputo avec ses caractéristiques. De plus, nous explorons les équations différentielles fractionnaires de type Riemann-Liouville et Caputo, et finalement, nous résolvons certaines équations de ce type en appliquant la transformation de Laplace.

2.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous introduisons les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler, qui seront utilisées ultérieurement. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

2.1.1 Fonction Gamma

Définition 2.1

On appelle fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0),$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemples: On a :

•

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi} \quad (\text{Posant le changement de variable } t = \tau^2). \end{aligned}$$

Lemme 2.1.1

La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , (resp. holomorphe sur le demi plan $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$) et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{R}_+^* (\text{resp. } z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0), \Gamma^k(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Lemme 2.1.2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$; $n \in \mathbb{N}$; on a

$$1. \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.1)$$

$$2. \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$3. \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!} \quad (2.2)$$

Preuve:

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. Il suffit d'appliquer (2.1) pour $z = n-1$.

3. Nous allons démontrer la formule (2.2) par récurrence sur \mathbb{N} .

- Pour $n = 0$, on a $\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(0)! \sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}$.
- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n . C'est à dire que supposons que

$$\Gamma\left((n-1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n-1))! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)} (n-1)!}$$

est vérifié. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n-1))! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
 &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
 &= \frac{2n}{2n} \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
 &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}.
 \end{aligned}$$

Donc la formule (2.2) est vérifié pour n . □

Proposition 2.1

Pour tout $p > 0$, on a

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n)}.$$

2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.2

La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et w par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (p, q \in \mathbb{C}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0).$$

Proposition 2.2

Pour tout $p, q \in \mathbb{C}$, $\Re(p) > 0$, $\Re(q) > 0$; on a

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Preuve : Soit $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, on a

$$\begin{aligned}
 \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx\right) \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy\right) \\
 &= \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy.
 \end{aligned}$$

En utilisant le changement de cordonnées, considérons les nouvelles cordonnées

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}.$$

et

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

De même que le domaine D' correspondant D dans les coordonnées u, v est

$$D' = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \iint_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} | -u | du dv \\ &= \iint_{D'} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q), \end{aligned}$$

par conséquent

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

2.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 2.3

La fonction de Mittag-Leffler est définie par

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0,$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Exemples: On va calculer $E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_{1,2}(x)$, $E_{1,3}(x)$.

•

$$E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

•

$$E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{2k!} = \cosh \sqrt{x}.$$

•

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{(k+1)}}{(k+1)!} = \frac{1}{x} (e^x - 1).$$

$$E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{(k+2)}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} (e^x - 1 - x).$$

Théorème 2.1

Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) = \lambda E_n(\lambda x^n).$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) = \lambda x^{\beta-n-1} E_n(\lambda x^n).$$

Proposition 2.3

Pour $\alpha, \beta > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad s > 0, |\lambda s^\alpha| < 1. \quad (2.3)$$

Preuve : Grâce à la définition de transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

En posons le changement de variable $st = \tau$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha k + \beta - 1} e^{-\tau} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \Gamma(\alpha k + \beta) \\ &= s^{-\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda s^{-\alpha})^k. \end{aligned}$$

Pour $|\lambda s^\alpha| < 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda s^{-\alpha})^k = \frac{1}{1 - \lambda s^{-\alpha}}.$$

Donc

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{-\beta}}{1 - \lambda s^{-\alpha}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}.$$

□

2.2 Intégrale de Riemann-Liouville

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$. Notons par $(\mathcal{I}_{a^+}^1 f)$ la primitive de f qui s'annule en a . Donc :

$$\forall t \in [a, b]; \quad (\mathcal{I}_{a^+}^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

L'itération de $(\mathcal{I}_{a^+}^1 f)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^1 f)^2(t) &= (\mathcal{I}_{a^+}^1 f) \circ (\mathcal{I}_{a^+}^1 f) = \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, en notant $(\mathcal{I}_{a^+}^1 f)^n$ la $n^{\text{ème}}$ itération de $(\mathcal{I}_{a^+}^1 f)$. Une récurrence directe montre que

$$(\mathcal{I}_{a^+}^1 f)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Si on note $g = (\mathcal{I}_{a^+}^1 f)^n$, donc g c'est l'unique fonction vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad g^{(k)}(a) = 0, \quad g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante:

Définition 2.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f que l'on note $(\mathcal{I}_{a^+}^n f)$, est définie par

$$(\mathcal{I}_{a^+}^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Grâce à la fonction Gamma, la propriété $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, nous permet de généraliser la définition précédente de la manière suivante:

Définition 2.5

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par

$$\forall t \in [a, b]; \quad (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f , par

$$\forall t \in [a, b]; \quad (\mathcal{I}_{b^-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Remarque 2.2.1

Par le simple changement de variable $s = t - \tau$, on remarque que $\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f(t)$ peut être écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s) ds. \quad (2.7)$$

Notons ces opérateurs $(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f)$ et $(\mathcal{I}_+^\alpha f)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+; (\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}; (\mathcal{I}_+^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.9)$$

Proposition 2.4

Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a

1.

$$(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}. \quad (2.10)$$

2.

$$(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}. \quad (2.11)$$

Preuve : On a

1.

$$(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-1} d\tau.$$

Posons $\tau - a = s(t - a)$, donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t ((t-a) - s(t-a))^{\alpha-1} (s(t-a))^{\beta-1} (t-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta), \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.0.1

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

2. Même idée (le changement de variable est $b - \tau = s(b - t)$).

□

Théorème 2.2

Si $f \in L^1([a, b])$; alors $\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f$ existe pour tout $\alpha > 0$ et $\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f \in L^1([a, b])$.

Proposition 2.5

Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors

$$\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \mathcal{I}_{a^+}^\beta f = \mathcal{I}_{a^+}^\alpha \mathcal{I}_{a^+}^\beta f = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f.$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \mathcal{I}_{a^+}^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (\tau-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^\tau (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-s)^{\beta-1} f(s) ds d\tau.\end{aligned}$$

On change l'ordre d'intégration

$$\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \mathcal{I}_{a^+}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-s)^{\beta-1} d\tau ds,$$

Posant

$$\begin{cases} u = \frac{\tau-s}{t-s} & du = \frac{d\tau}{t-s}, \\ \tau = (t-s)u + s, & u \in [0, 1]. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \mathcal{I}_{a^+}^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} \int_s^t (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) du ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t).\end{aligned}$$

□

2.3 Transformation de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville

Lemme 2.3.1

Soit $\alpha > 0$, $f \in L^1([a, b])$, $b > 0$. Alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f$ est

$$\mathcal{L}(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s).$$

Preuve : On écrit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f$ comme convolution de deux fonction $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(t)$. C'est à dire

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \right) * f(t) \\ &= g(t) * f(t).\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f)(s) &= \mathcal{L}(g * f)(s) \\
 &= \mathcal{L}(g)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\
 &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\right)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\
 &= s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s).
 \end{aligned}$$

□

Exemples sur l'intégrale de Riemann-Liouville de quelques fonctions usuelles:

1. **Fonction constante :**

Soit $f(t) = C$, alors:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{a+}^{\beta} C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} C d\tau \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(t - \tau)\{\alpha\}}{\alpha} \right]_a^t \\
 &= \frac{C}{\alpha \Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha} \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

2. **Fonction exponentielle :**

Soit $f(t) = e^{kt}$, $k > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on applique la formule de (la remarque 2.2.1) avec $a = -\infty$, alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{a+}^{\beta} e^{kt} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{k(t-s)} ds \\
 &= \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-ks} ds,
 \end{aligned}$$

pour $ks = x$:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{\alpha-1} e^{-x} \frac{dx}{k} \\
 &= k^{-\alpha} \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\
 &= k^{-\alpha} \frac{e^{kt}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \\
 &= k^{-\alpha} e^{kt}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.4 Dérivées fractionnaires

2.4.1 Dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville

Soit $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière unique de α qui vérifiée $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ \mathcal{I}_t^1.$$

On peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ \mathcal{I}_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 2.6

Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$.

- La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b] \quad {}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

- La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de f est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}^{RL}\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 2.7

Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$.

- La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad {}^{RL}\mathcal{D}_+^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_+^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

- La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α de f est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad {}^{RL}\mathcal{D}_-^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_-^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1

1. Pour $\alpha = 0$, $n = 1$, on a

$${}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^0 f(t) = -\frac{d}{dt} (\mathcal{I}_{a^+}^1 f) = f(t).$$

2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad {}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = {}^{RL}\mathcal{D}_+^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad {}^{RL}\mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = {}^{RL}\mathcal{D}_-^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t).$$

Proposition 2.6

Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a

1.

$$({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \quad (2.16)$$

2.

$$({}^{RL}\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}. \quad (2.17)$$

Preuve :

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition (??) et proposition la (??) on a :

$$\begin{aligned} ({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1}\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \cdots (n-\alpha+\beta-1-(n-1)) (t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \cdots (\beta-\alpha) (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

D'autre coté

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1), \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \cdots (\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} ({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \cdots (\beta-\alpha) (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \cdots (\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \cdots (\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière.

Remarque 2.4.2

- Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$ on a

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \lambda + 1)} (n - \alpha + \lambda)(n - \alpha + \lambda - 1) \cdots (\lambda - \alpha + 1) t^{\lambda - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \lambda + 1)} (n - (\alpha - \lambda))(n - 1 - (\alpha - \lambda)) \cdots (1 - (\alpha - \lambda)) t^{\lambda - \alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda - \alpha + 1)} t^{\lambda - \alpha}, & \text{si } (\alpha - \lambda) \notin \{1, 2, \dots, n\}, \lambda > -1. \\ 0 & \text{si } (\alpha - \lambda) \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $(\alpha - \lambda) \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \lambda = \alpha - m$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ c'est à dire :

$$\left({}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} t^{\alpha - m}\right)(t) = 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Exemples sur la dérivé fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de quelques fonctions usuelles:

1. Fonction exponentielle :

Pour $a = -\infty$:

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_{-\infty}^{\alpha} e^{kt} &= \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{I}_{-\infty}^{n-\alpha} e^{kt} \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (k^{\alpha-n} e^{kt}) \\ &= k^{\alpha-n} k^n e^{kt} \\ &= k^{\alpha} e^{kt}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

2. Fonction constante C :

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} C &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} C \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{C}{\Gamma(n - \alpha + 1)} (t - a)^{n-\alpha} \right) \\ &= \frac{C}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \frac{d^n}{dt^n} \left((t - a)^{n-\alpha} \right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\text{on a : } \frac{d^n}{dt^n} \left((t - a)^{n-\alpha} \right) = (n - \alpha)(n - \alpha - 1) \cdots (1 - \alpha)(t - a)^{-\alpha},$$

$$\text{et on a : } \Gamma(n - \alpha + 1) = (n - \alpha)(n - \alpha - 1) \cdots (1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha),$$

$$\text{alors que : } {}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}.$$

2.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.8

: Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$.

1. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) &= \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Remarque 2.4.3

Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, {}^C \mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* {}^C \mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)).$$

Lemme 2.4.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. si $f \in AC^n([a, b])$, alors presque partout

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C \mathcal{D}_{a^+}^n f(t) &= f^{(n)}(t) \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C \mathcal{D}_{b^-}^n f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Proposition 2.7

Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a

$$({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n.$$

Preuve : Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition (??) et la proposition (??) on a

$$\begin{aligned} ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n-1} d\tau, \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.4.4

Pour $\lambda = \beta - 1$ et $a = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
({}^C \mathcal{D}_{0^+}^\alpha t^\lambda)(t) &= \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha} \\
&= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & \text{si } \lambda \notin \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\ 0, & \text{si } \lambda \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \end{cases}, \lambda > -1,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$({}^C \mathcal{D}_{0^+}^\alpha t^m)(t) = 0, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Théorème 2.3

Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et si f possède $(n-1)$ dérivées en a et $(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)$ existe. Alors

$$({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right],$$

presque pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve : On a par définition :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\
&= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right] d\tau.
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned}
g(\tau) = f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k &\rightarrow \frac{d}{d\tau} \left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right] \\
\frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} &\rightarrow \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] &= \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right] d\tau \\ &= \left[\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g(\tau) \right]_a^t - \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d}{d\tau} g(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+1} \frac{d}{dt} g(t).$$

De même façon pour n -fois,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+n} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] = 0,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} [g(t)] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ &= ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t).\end{aligned}$$

Corollaire 2.4.2.1

Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)$, $({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t)$ sont existents, on suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. Alors

$$({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = (\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t).$$

Exemples sur la dérivé fractionnaire au sens de Caputo de quelques fonctions usuelles :

1. **Fonction constante C :**

$$\begin{aligned}{}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha C &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d^n}{dt^n} C \right) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Cette résultat c'est la différence entre la dérivé fractionnaire au sens de Caputo et de Riemann-Liouville.

2. **Fonction exponentielle** : Pour $a = -\infty$

$$\begin{aligned}
{}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha e^{kt} &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{kt} \right) \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left(k^n e^{kt} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} k^n e^{k\tau} d\tau \\
\text{on a : } e^{k\tau} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(k\tau)^m}{m!}, \\
\text{alors : } {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha e^{kt} &= \frac{k^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(k\tau)^m}{m!} d\tau \\
&= \frac{k^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{k^m}{m!} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^m d\tau \\
&= \frac{k^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{k^m}{m!} \int_a^t t^{n-\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} d\tau \tag{2.23} \\
\text{pour } \frac{\tau}{t} &= y, \\
\text{donc : } {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha e^{kt} &= \frac{k^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{k^m}{m!} t^{n-\alpha+m} \int_{\frac{a}{t}}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^m dy \\
&= \frac{k^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{k^m}{m!} t^{n-\alpha+m} \beta(n-\alpha, m+1) \\
&= \frac{k^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{k^m}{m!} t^{n-\alpha+m} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha+m+1)} \\
&= k^n t^{n-\alpha} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(tk)^m}{\Gamma(n-\alpha+m+1)}.
\end{aligned}$$

2.5 Propriétés des opérateurs fractionnaires

- **Linéarité**: La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires pour n'importe quelle approche de dérivation.

$$\mathcal{D}^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \mathcal{D}^\alpha f(t) + \mu \mathcal{D}^\alpha g(t).$$

- **Compositions entre opérateur**

Proposition 2.8

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes:

- Si $f(t) \in L_p([a, b])$, ($1 \leq p \leq \infty$), alors

$$(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \mathcal{I}_{a^+}^\alpha f)(t) = f(t) \text{ et } (\mathcal{D}_{b^-}^\alpha \mathcal{I}_{b^-}^\alpha f)(t) = f(t).$$

– Si $\alpha > \beta$ et $f(t) \in L_p([a, b])$, ($1 \leq p \leq \infty$), alors

$$(\mathcal{D}_{a^+}^\beta \mathcal{I}_{a^+}^\alpha f)(t) = (\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta} f)(t) \text{ et } (\mathcal{D}_{b^-}^\beta \mathcal{I}_{b^-}^\alpha f)(t) = (\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha-\beta} f)(t).$$

– Si $f(t) \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors

$$(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \mathcal{D}_{a^+}^\beta f)(t) = (\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(t) \text{ et } (\mathcal{D}_{b^-}^\alpha \mathcal{D}_{b^-}^\beta f)(t) = (\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta} f)(t).$$

– Si $f(t) \in L_1([a, b])$, $(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f) \in C^n([a, b])$, alors

$$(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (t - a)^{\alpha-k},$$

$$(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} (\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f)^{(n-k)}(b)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (b - t)^{\alpha-k}.$$

– En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha + \mathcal{D}_{a^+}^\alpha + f)(t) &= f(t), \\ (\mathcal{I}_{b^-}^\alpha + {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha + f)(t) &= f(t). \end{aligned}$$

Proposition 2.9

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes:

1. Si $f(t) \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors :

$$\begin{aligned} ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha + {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\beta + f)(t) &= ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} + f)(t), \\ ({}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha + {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\beta + f)(t) &= ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} + f)(t). \end{aligned}$$

2. Si $f(t) \in C^n([a, b])$, ou $f(t) \in C^n([a, b])$, alors

$$\begin{aligned} ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha + f)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k, \\ ({}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha + f)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} f^{(k)}(b)}{k!} (b - t)^k. \end{aligned}$$

3. En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha + {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha + f)(t) &= f(t) - f(a), \\ (\mathcal{I}_{b^-}^\alpha + {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha + f)(t) &= f(t) - f(b). \end{aligned}$$

• Intégration par parties

Corollaire 2.5.0.1

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n - 1 < \alpha \leq n$. Soit $f(t) \in C^n([a, b])$ et $g(t) \in C^n([a, b])$. Alors

$$\int_a^b f(t) \mathcal{D}_{a^+}^\alpha g(t) dt = \int_a^b \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) g(t) dt,$$

et

$$\int_a^b f(t) \mathcal{D}_{b^-}^\alpha g(t) dt = \int_a^b \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) g(t) dt.$$

2.6 Transformation de Laplace du dérivées fractionnaires

Lemme 2.6.1

Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle. Alors

$$\forall s > s_0, \mathcal{L}[\mathcal{I}_0^\alpha f](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s).$$

Proposition 2.10

Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle. Alors

1.

$$\forall s > s_0, \mathcal{L}[\mathcal{D}_0^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f)^{(k)}(0).$$

2.

$$\forall s > s_0, \mathcal{L}[\mathcal{D}_0^C f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (f)^{(k)}(0).$$

Preuve :

1. On applique (??) à $(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f)$ puis on utilise le lemme ?? :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{D}_0^\alpha f](s) &= \mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} \mathcal{I}_0^{n-\alpha} f \right] (s) \\ &= s^n \mathcal{L}[\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} (\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f)^{(k)}(0) \\ &= s^n s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} (\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f)^{(k)}(0) \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f)^{(k)}(0). \end{aligned}$$

2. De même on applique le lemme (??), puis on utilise (??) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{D}_0^C f](s) &= \mathcal{L} \left[\mathcal{I}_0^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f \right] (s) \\ &= s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](s) \\ &= s^{\alpha-n} \left[s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} (f)^{(k)}(0) \right] \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.6.1

On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha(fg) &\neq (\mathcal{D}^\alpha f)g + f(\mathcal{D}^\alpha g) \\ \mathcal{D}^\alpha(fg) &\neq \frac{(\mathcal{D}^\alpha f)g - f(\mathcal{D}^\alpha g)}{g^2} \\ \mathcal{D}^\alpha(f \circ g) &\neq (\mathcal{D}^\alpha f)(g).g'.\end{aligned}$$

2.7 Équations différentielles fractionnaires

Définition 2.9

Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad (2.24)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. Les conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise:

$$\mathcal{D}^{\alpha-k} y(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{I}^{n-\alpha} y(t) = b_n. \quad (2.25)$$

De la même manière

$${}^C \mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad (2.26)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.27)$$

2.7.1 Équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

On commence par l'équation homogène de type Riemann-Liouville.

Lemme 2.7.1

Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in \mathcal{C}(0, 1) \cap \mathcal{L}(0, 1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville :

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (2.28)$$

admet une solution unique

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$ avec $m = 1, 2, \dots, n$.

Lemme 2.7.2

Supposons que

$$u \in C(0, 1) \cap L(0, 1) \text{ et } \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u \in C(0, 1) \cap L(0, 1).$$

Alors:

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n}. \quad (2.29)$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \dots, n$.

Lemme 2.7.3

Soit $1 < \alpha \leq 2$, et $y \in C([0, 1])$. Alors l'unique solution de problème aux limites

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \quad (2.30)$$

est donné par:

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds,$$

tel que

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t(1-s))^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}. \quad (2.31)$$

2.7.2 Équation différentielle fractionnaire de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo.

Lemme 2.7.4

Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo:

$${}^C \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (2.32)$$

admet une solution unique

$$u(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Lemme 2.7.5

Supposons que $u \in C^n([0, 1])$. Alors

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} {}^C \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1}. \quad (2.33)$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Lemme 2.7.6

Soit $1 < \alpha \leq 2$, et $y \in C([0, 1])$. Alors l'unique solution de problème aux limites

$$\begin{cases} {}^C \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u(t) = y(t), & 0 < t < 1, \\ u(0) + u'(0) = 0, \\ u(1) + u'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

est donné par :

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds,$$

tel que :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1. \\ \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2.35)$$

2.8 Résolution des équations différentielles fractionnaires par la transformation de Laplace

Pour résoudre une équation différentielle fractionnaire à l'aide de la transformée de Laplace, c'est le même principe pour résoudre les équations différentielles d'ordre entier, il faut prendre la transformée de Laplace de chaque terme de l'équation, puis résoudre l'équation algébrique obtenue pour la fonction de Laplace. Une fois que la fonction de Laplace est trouvée, elle peut être inversée pour obtenir la solution de l'équation différentielle fractionnaire dans le domaine temporel.

2.8.1 Équation différentielle fractionnaire homogène

Type de Riemann-Liouville :

Soit l'équation suivante :

$${}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y(t) + ay(t) = 0, \quad t < 0, \quad n-1 < \alpha < n$$

$n = 1$ c'est à dire que $0 < \alpha < 1$, sous la condition :

$${}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y(0) = C.$$

Pour résoudre cette équation nous suivons les étapes suivantes :

Étape 01: On applique la transformée de Laplace sur l'équation, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y(t) + ay(t)\}(s) &= 0 \\ \mathcal{L}\{{}^{RL}\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y(t)\}(s) + a\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= 0 \\ s^{\frac{1}{2}}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \mathcal{D}_{0+}^{-k-\frac{1}{2}}y(0) + aY(s) &= 0 \\ s^{\frac{1}{2}}Y(s) - C + aY(s) &= 0 \\ Y(s) &= \frac{C}{s^{\frac{1}{2}} + a}. \end{aligned}$$

Etape 02: On applique la transformée inverse de Laplace, alors :

$$y(t) = C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} + a}\right\}(t). \quad (2.36)$$

On a d'après (Proposition 2.3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\}(s) &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda} \\ t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}\right\}(t). \end{aligned}$$

Appliquons ce résultat sur l'équation (2.29), donc :

$$\begin{aligned} y(t) &= C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\frac{1}{2}-\beta}}{s^{\frac{1}{2}} + a}\right\}(t) \\ &= Ct^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-at^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Type de Caputo :

On pose l'équation suivante :

$${}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) + ay(t) = 0 \quad t > 0 \quad n-1 < \alpha < 1,$$

$n = 1,$

avec $y(0) = C.$

Etape 01: Appliquons la transformée de Laplace, qui sa donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) + ay(t)\}(s) &= 0 \\ \mathcal{L}\{{}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t)\}(s) + a\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= 0 \\ s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-\alpha-1}y^{(k)}(0) + aY(s) &= 0 \\ s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}C + aY(s) &= 0 \\ Y(s) &= C\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a}. \end{aligned}$$

Etape 02: Appliquons la transformée inverse de Laplace, alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a}\right\} \\ &= CE_{\alpha,1}(-at^\alpha). \end{aligned}$$

2.8.2 Équation différentielle fractionnaire non homogène

Soit l'équation suivante :

$${}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) + {}^C\mathcal{D}_{0+}^\beta y(t) = h(t),$$

tel que : $t > 0, 0 < \alpha < \beta < 1, y(0) = C.$

Etape 01: Appliquons la transformée de Laplace sur l'équation, sa donne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{{}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{{}^C\mathcal{D}_{0+}^\beta y(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{h(t)\}(s) \\
s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0) + s^\beta Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0) &= H(s) \\
(s^\alpha + s^\beta)Y(s) - (s^{\alpha-1} + s^{\beta-1})C &= H(s) \\
Y(s) &= \frac{H(s)}{s^\alpha + s^\beta} + C \frac{s^{\alpha-1} + s^{\beta-1}}{s^\alpha + s^\beta} \\
Y(s) &= H(s) \frac{1}{s^\alpha + s^\beta} + C \frac{1}{S}
\end{aligned}$$

Etape 02: Par l'application de l'inverse de la transformée de Laplace, alors :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \frac{1}{s^\alpha + s^\beta} \right\} (t) + C, \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \frac{1}{s^\alpha + s^\beta} \right\} (t) + C \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(S) \frac{s^{-\alpha}}{s^{\beta-\alpha} + 1} \right\} (t) + C \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) t^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta}(-t^{\beta-\alpha}) \right\} (t) + C \\
&= \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta}((-t\tau)^{\beta-\alpha}) h(\tau) \, d\tau + C.
\end{aligned}$$

Conclusion

La transformée de Laplace est un outil mathématique puissant utilisé pour résoudre des équations différentielles linéaires ordinaires. Elle permet de transformer une équation différentielle dans le domaine du temps en une équation algébrique dans le domaine de la fréquence. Cette transformation facilite la résolution des équations différentielles, en particulier celles comportant des conditions initiales.

Les applications de la transformation de Laplace sont nombreuses et diverses. Voici quelques-unes des principales utilisations :

1. Résolution des équations différentielles ordinaires : La transformée de Laplace permet de résoudre des équations différentielles linéaires avec des coefficients constants ou variables. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle, sur une équation algébrique dans le domaine de la fréquence, qu'il est souvent plus facile de résoudre. Ensuite, en effectuant la transformation inverse de Laplace, on retrouve la solution dans le domaine du temps.
2. Analyse des systèmes linéaires : La transformée de Laplace est utilisée pour analyser le comportement des systèmes linéaires, tels que les circuits électriques, les systèmes de contrôle et les systèmes de traitement du signal. Elle permet de représenter ces systèmes sous forme d'équations algébriques dans le domaine de la fréquence, ce qui facilite l'analyse de leur réponse en fréquence, leur stabilité et leur performance.
3. Résolution des équations différentielles fractionnaires : La transformée de Laplace généralisée, appelée transformée de Laplace fractionnaire, permet de résoudre des équations différentielles fractionnaires. Ces équations font intervenir des dérivées d'ordre non entier, ce qui les rend plus complexes à résoudre avec les méthodes traditionnelles. La transformée de Laplace fractionnaire offre une approche alternative pour résoudre ces équations et étudier les systèmes dynamiques fractionnaires.
4. Analyse de la stabilité : La transformée de Laplace est également utilisée pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques. Elle permet de déterminer la stabilité d'un système en examinant les pôles de la fonction de transfert dans le domaine de la fréquence. La localisation des pôles dans le plan complexe fournit des informations précieuses sur la stabilité et le comportement du système.

En conclusion, la transformation de Laplace est un outil essentiel pour résoudre des équations différentielles linéaires et analyser les systèmes dynamiques. Elle facilite la résolution des équations différentielles ordinaires et permet également d'aborder les équations différentielles fractionnaires. Son utilisation est compétente dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie, offrant une approche puissante pour comprendre et résoudre les problèmes dynamiques.

Bibliographie

- [1] Murray R. Spiegel, Ph. D. (1965). Theory and problems of Laplace transforms.
- [2] Spiegel M.R. (1981). Transformées de Laplace, cours et problèmes. Série Schaum.
- [3] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. (1993). Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Gordon and Breach, New York.
- [4]] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.
- [5] Schiff , J. L. (Ed.). (1999). The Laplace transform, theory and applications. New York: Springer.
- [6] A.A. Kilbas, J.J. Trujillo, Dfferential equations of fractional order: methods, results and problems II, Appl. Anal. 81 (2002); 435-493.
- [7] Demengel G. (2002). Transformation de Laplace: théorie et illustrations par les exemples. Ellipses.
- [8] Ahmed Lesfari. Distribution, analyse de Fourier et transformation de Laplace. Cours et exercices.
- [9] A.A. Kilbas, H.H. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
- [10] IFIPS-Université de Paris-Sud. (2008). Transformées de Laplace des fonctions et des distributions. Cours et exercices.
- [11] Dubois F., Galucio A. C., Point N. (2010). Introduction à la dérivation fractionnaire. théorie et application. Paris, France.
- [12] Kexue L., Jigen P. (2011). Laplace transform and fractional differential equations. Applied Mathematics Letters, 24, 2019-2023
- [13] T. Houmor, Analyse du Chaos dans un Système d'équations Différentielles Fractionnaires, Thèse Doctorat en sciences, Univ de Constantine, 2014
- [14] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 19
- [15]] Zhou. Y. (2014). Basic theory of fractional differential Equations. World Scientific, New Jersey.