الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Problèmes aux limites avec conditions non locales

Réalisé par : **BECHAA Meriem**
BOUTAMINE Meroua

Dirigé par : **Mlle. CHERGUI Djamila**

Membres de jury :

Président : Mme. MERGHAD Amel
Examinateur : Mr. BRAHIMI Saadoun

2020-2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

À L'être le plus cher de ma vie

Ma mère et la source de mes efforts Mon père .

Que vie nous donne temps pour la remercier!

C'est grâce à leurs amours infinis.

Leur patiences, leur inestimables aide et ses conseils que ma vie s'est construite!

Mes deus frères et ma seule adorable soeur que dieu les protége.

Tous mes amis intimes pour l'appui moral.

Pour chacun des mentionné mon coeur.

A tous.

Meriem

Dédicace

Je dédie ce modest travail

A mes trés chers respectueux et mangifique parants

♥ mon père et ma mère ♥

Qui m'ont Soutenus tout au long de ma vie

Par leur patience, leur amours et leur encouragement

A mes frères

A mes soeurs

A toute ma famille

A tout mes amis

A tout les étudiants de $2^{ième} Master Math$ 2021

A tous

Meroua

Remerciements

En premier lieu nous voulons remercier Allah qui nous a donnés la volonté, la patience, le courage et la force pour avoir réaliser ce travail.

Nous remercions et témoignons notre reconnaissance, bien sûr, en priorité, notre encadreur Dr. "CHERGUI. Djamila" qui en tant que directeur de mémoire qui est toujours montré à l'écoute et trés disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire. Ainsi, pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je tiens également à remercier Mme. Merghad Amel qui m'a fait l'honneur de présider le jury, ainsi que Mr. Brahimi Saadoune pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie chaleureusement tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques et Informatiques pour toute l'aide qui m'a été accordée.

Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation.

Je remercie aussi ma famille, mes amis. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Problèmes aux limites avec conditions non locales

Résumé

Dans ce travail, nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution forte à un problème d'évolutions avec des conditions aux limites non locales de type intégral pseudo-hyperbolique intégro-différentiel. La preuve est basée sur des estimations à priori et la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considérée. Nous avons également utilisé une méthode semi-analytique pour estimer cette solution est perturbation de l'homotopie. De plus, nous concluons les résultats obtenus par des exemples illustratifs.

Mots-clés : Equation intégro-différentielle pseudohyperbolic, Estimation a priori, Condition intégrale, Existence et unicité, transformation de Laplace, Méthode de perturbation de l'homotopie.

Boundary problems with non-local conditions

Abstract

In this work, we are interested in the study of the existence and uniqueness of a strong solution to evolution problem with non-local boundary conditions of integral type pseudo-hyperbolic integro-differential. The proof is based on priori estimates and the density of the image of the operator generated by the problem considered. We also used semi-analytical method to estimate this solution, is homotopy perturbation. In addition,. We conclude the results obtained by illustrative examples.

Keywords :Pseudo-hyperbolic integro-differential equation, A priori estimate, Integral condition, Existence and uniqueness, Laplace transform method, homotopy perturbation method.

مسائل حدية ذات شروط غير محلية

ملخـــص

فـــي هذا العمل، نحـــــن مهتمون بإثبات وجود و وحدانية الحل القوي لمسالة التطورات ذات الشروط الحدية الغير المحلية من نوع التفاضلي التكاملي الزائف القطعي.

البرهان يعتمد على التقديرات القبلية وخاصية كثافة صورة التطبيق الناتج من المشكل المدروس. استخدمنا أيضا طريقة شبه تحليلية لتقدير هذا واضطراب التماثل.

بالإضافة إلى ذلك نستخلص النتائج التي تم الحصول عليها بأمثلة توضيحية.

الكلمات المفتاحية

معادلـــــة تفاضلية تكاملية زائفة قطعية، التقديرات القبلية ، شـــرط التكامل ،الوجود والوحدانية ، تحويـــــل **لابـــــلاص** ، طـــــريقة اضطراب التماثل.

Table des matières

Notations

Pour facilité la lecture, on commence par introduire les différentes notations utilisées tout au long de ce travail.

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

Ω : Domaine borné dans $\mathbb{R}$.

Γ : La frontière de Ω.

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω.

$L^\infty(\Omega)$: espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω.

$C(\Omega)$: espace des fonctions continues sur Ω.

$C^n(\Omega)$: espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.

T : opérateur linéeaire.

$D(T)$: domaine de définition de l'opéerateur T.

$G(T)$: graphe de l'opérateur T.

$R(T)$: image de l'opérateur T.

$N(T)$: noyau de l'opérateur T.

M : fermeture de l'ensemble M.

$M^\perp$: orthogonal de l'ensemble M.

$X; Y$: des espaces de Banach de normes respectives $\|.\|_X; \|.\|_Y$.

$\mathscr{L}(X;Y)$: espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y,

cet espace est muni de la norme $\|B\|_{\mathscr{L}(X;Y)} = \sup\limits_{u \neq 0} \dfrac{\|Bu\|_Y}{\|u\|_X}$.

H : espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notées respectivement par $|.|$, $(.;.)$.
$\mathscr{L}(H)$: espace des opérateurs linéaires continus dans H.

$\Gamma(.)$: La fonction Gamma.

$B(.,.)$: La fonction Bêta.

$\mathfrak{Re}(.)$: Partie réelle d'un nombre complexe.

$[.]$: Partie entière d'un nombre réel.

$\Im_x u = \displaystyle\int_0^x u(\xi, t) d\xi$.

$\Im_x^2 u = \displaystyle\int_0^x \int_0^\eta u(\xi, t) d\xi d\eta$.

Table des figures

Introduction générale

Les q́uations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation et leur étude occupe les mathématiciens depuis le dix-huitième siècle avec les travaux d'Euler, d'Alembert, Lagrange et de Laplace... ; au fil de cette dernière quarantaine d'années beaucoup de phénomènes et de problèmes modernes physiques, mécaniques, biologiques et technologiques ont été modelés par des équations aux dérivées partielles **(EDP)**, paraboliques ou hyperboliques, mais avec des conditions non locales. Ainsi, les conditions aux bords de type intégrales peuvent être utilisées quand il est impossible de mesurer directement la quantité recherchée sur la frontière où sa valeur totale ou moyenne est connue. Plus précisément, les conditions standards (Dirichlet, Neumann, ...) qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours adéquates car elles dépendent du contexte physique où les données peuvent être mesurées à la frontière du domaine étudié. Dans certains cas, il n'est pas possible de prescrire la solution (pression, température, ...) ponctuellement aux bords, parce que la valeur moyenne de la solution peut être mesurée le long du bord ou le long d'une partie de celui-ci.

La signification physique de base des conditions intégrales (moyenne, flux total, énergie totale, masse totale, moment,...) a été la raison essentielle de l'intérêt croissant à ce type de problèmes.

La modélisation mathématique des problèmes avec conditions intégrales est rencontrée en physique des plasmas (les processus de diffusion des particules dans un plasma turbulent.) [2], théorie de transmission de chaleur [20, 56, 8], thermo-élasticité [60, 42], certains procédés technologiques [43], oscillations d'un milieu [23], dynamique des eaux souterraines [4, 64], propagation de l'humidité [4], génie chimique [66], semi-conducteurs [65], modèles démographiques [29] et en problèmes mathématiques en biologie [5].

Les problèmes avec des conditions aux limites non-locales ont été étudiés par pleusieurs chercheurs. La signiflcation physique des conditions aux limites non-locales a servi de base pour lintérêt croissant porté a ce type de problème. La modélisation mathématique des problèmes non-locaux est rencontré en théorie de transmission de la chaleur, en théorie des populations, thermo-élasticité, élasticitée, physique de plasma et en métallurgie [21, 56]. Parmi les travaux récents dans cette direction, nous citons ceux de A. Bouziani [6, 7, 8, 9] qui a étudié des problèmes mixtes pour une classe d'équations paraboliques et hyperboliques.

Pour tous ces motifs, les **EDP** avec des conditions intégrales ont bénéficié d'une trés grande attention. Le premier qui s'est intéressé à l'étude de ces problèmes avec une condition intégrale

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0.$$

était Cannon [32] en , où il démontra par la méthode du potentiel, l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème mixte combinant une condition de Dirichlet et une condition intégrale pour l'équation de la chaleur lors de l'étude de la conduction thermique dans une barre métallique mince chauffée. En utilisant toujours la méthode du potentiel, Kamynin a établi dans [47] l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème similaire avec une représentation plus générale en utilisant un système d'équations intégrales.

La méthode adoptée dans la plupart des articles précédents est celle des inégalités d'énergie. Cette dernière appelée la méthode d'analyse fonctionnelle ou la méthode des estimations a priori. Cette méthode basée sur les idées de I.G. Pétrovski [31] qui l'a utilisé dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique, par la suite J.Leray [37] et L.Garding[44] ont fait des développements importants de la méthode et son schéma a été présenté par A.A. Dezin [13]. La méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O.A.Ladyzenskaya [58], K. Friedrichs[41], N. I. Yurchuk[52, 53], A.V. Kartynnik [10] et de A. Bouziani[62, 15], [16]. En fait, en Cannon[32], Ionkin[56] et Yurchuk[54] ont utilisé la condition intégrale :

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t).$$

Nous étudions dans la présente mémoire certaines classes de problèmes aux limites non standard. Nous développons plus exactement la méthode des inégalités de l'énergie à ce problème.

Cette méthode s'est avérée un outil efficace dans l'étude des problèmes non classiques. De tels problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différents types d'équations : paraboliques, pseudo-paraboliques, hyperboliques et du type mixte et cela en utilisant différentes méthodes.

Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A. A. DEZIN [14], et qui peut être résumé comme suit :

D'abord on ramène le problème posé $(\mathcal{P})$ à une équation opérationnelle :

$$Lu = F, \quad u \in D(L),$$

où l'opérateur L est considéré d'un espace de Banach $\mathbb{E}$ dans un espace de Hilbert $\mathbb{F}$ convenablement choisis.

On établit les estimations a priori pour l'opérateur L. On démontre ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace $\mathbb{F}$.

Plus précisément nous suivrons dans ce travail le schéma suivant :

Schéma

Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, nous démontrons l'inégalité de l'énergie du type

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \le c\|Lu\|_{\mathbb{F}}, \quad \forall u \in D(L). \tag{1}$$

Cette démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées et une certaine fonction poids, et en intégrant sur le domaine.

Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. On montre ensuite que l'opérateur L dans $\mathbb{E}$ admet une fermeture $\overline{L}$. La solution de l'équation opérationnelle

$$\overline{L}u = F, \tag{2}$$

est appelée solution forte généralisée du problème considéré.

Par passage à la limite, l'estimations (1) est prolongée aux solutions fortes généralisées, i.e., on a

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \le c\|\overline{L}u\|_{\mathbb{F}}. \tag{3}$$

A partir de là, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (2), l'égalité des ensembles $R(\overline{L})$ et $\overline{R(L)}$, et l'inversibilité de $\overline{L}$. L'inverse $(\overline{L})^{-1}$ étant défini sur l'ensemble des valeurs de l'opérateur $\overline{L}$.

La dernière étape, consiste à établir la densité de l'ensemble $R(L)$ dans $\mathbb{F}$ et donc l'existence d'une solution forte généralisée du problème (1).

La méthode de transformée de Laplace est un outil utilisé pour approcher la solution de différentes classes d'équations aux dérivées partielles linéaires (voir : Suying et al. [68], A. Merad et A. Bouziani. [17, 18]). La difficulté principale dans l'utilisation de la méthode de transformation de Laplace consiste à trouver son inverse, car l'inverse de la transformation est trés complexe dans certaies situations. Pour surmonter cette difficulté, il existe de nombreuses techniques numériques permettant d'inverser la transformation de Laplace. Une bonne comparaison de quatre algorithmes numériques d'inversion de Laplace fréquemment utilisés est donnée par H. Hassanzadeh et *al.*[27].

La méthode de perturbation d'homotopie **(HPM)** a été proposée par Ji-Huan He **1998** [38] Cette méthode a été appliquée par plusieurs scientifiques [39, 40], aux différents problèmes linéaires et non linéaires. La méthode de perturbation d'homotopie **(HPM)** peut être combinée avec des transformations comme celle de Laplace, pour résoudre des équations différentielles ordinaires et aussi aux dérivées fractionnaires

Ce mémoire porte sur l'étude Problèmes aux limites avec conditions non locales. est composée de trois chapitres.

Dans le Chapitre un, est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce travail concernant les opérateurs linéaires non bornés, l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert, inégalités importantes, transformation de Laplace est sa transformation inverse, méthode de perturbation de l'homotopie combinée avec la transformation de Laplace **(LT-HPM)** et quelque lemmes techniques.

Dans le chapitre deux, est réservé à l'étude d'un problème pseudo hyperbolique intégro-différentielles avec deux conditions intégrales. On transfère le problème à un autre nonlocale aussi, mais moins compliqué, Puis on décrit le cadre fonctionnel en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite. On montre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur une inégalité d'énergie et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème étudié dans l'espace d'arrivée F.

Dans le chapitre trois, on présente la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace **(LT- HPM)**. De plus, nous concluons les résultats obtenus par des exemples illustratifs.

☞Enfin, ce mémoire est clôturée par une bibliographie.

Chapitre

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels et notions de Base

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

On se place dans un cadre hilbertien $(H_1 \longrightarrow H_2)$, où H_i est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $|.|_i$ et le produit scalaire $(.,.)_i$, $(i = 1,2)$.

1.1.1 Espace normés

Définition 1.1. *(voir [[26], page 21]).(Norme) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une norme sur E, est une application de $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les conditions suivantes :*

$i.\|x\| \geq 0$ *et* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

$ii.\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, *pour tout* $x \in E$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}.$

$iii.\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pour tout* $x, y \in E.$

Remarque 1.1. *L'espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par* $(E, \|.\|)$.

une application $x \longrightarrow \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés ii) et iii) mais pas nécessairement la propriété i) est appellée une semi-norme sur E.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.2. *(Suite de Cauchy) Soit E un espace vectoriel normé. Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de E est de cauchy si et seulement si,*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > m > N \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Définition 1.3. *(Espace Complet) un espace métrique est dit complet si toute suite de cauchy admet une unique limite dans l'espace. On notera que tout espace compact est complet.*

Définition 1.4. *(Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace normé complet.*

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.5. *(produit scalaire) Soit E un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$. *Un produit scalaire sur E est une application* $\langle .,. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ *telle que pour tout* $x, y, x_1, x_2 \in E$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$ *on a :*

1.$\langle x, x\rangle \geq 0$ *et* $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
3. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$.
4. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

Définition 1.6. *(voir [[30], page 6]). (Espace préhilbertien) Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire .*

Définition 1.7. *(Espace de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur* $\mathbb{K}$ *complet pour la norme induite par le produit scalaire .*

1.1.4 Opérateurs linéaires bornés

De maniére général d'un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ linéaire où D(A) est le domaine de définition de l'application linéaire A, qui est un sous espace vectoriel de H_1. Que l'on suppose en général dense dans H_1 ; l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) = H_1 \longrightarrow H_2$ est dit bornée si l'image de la boule d'unite $(A(B_{H_1}(0,1)))$ de H_1 est bornée dans H_2.

Tout opérateur A est complètement définit par son graphe $G(A)$ qui est un sous espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ définit par : $G(A) = (v, Av); \quad v \in \mathcal{D}(A)$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$. On note par :

$$N(A) = \{v \in \mathcal{D}(A), \quad Av = 0\} \quad \text{(noyau de T)}$$

.

$$R(A) = \{Av, \quad v \in \mathcal{D}(A)\} \quad \text{(image de T)}.$$

On note $\mathscr{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathscr{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des opérateur linéaire continues dans H_2 (resp. des endomorphismes continue du H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathscr{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathscr{L}(H_1,H_2)} = \sup_{u \in H_1/\{0\}} \frac{\|Bu\|_{H_2}}{\|u\|_{H_1}}.$$

Définition 1.8. *On dit qu'une application linéaire continue $B \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ est inversible ssi il existe une application $B' \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$ telle que :*

$$B' \circ B = I_{H_1}, \quad B \circ B' = I_{H_2}$$

L'application B' si elle existe est unique. On notera $B' = B^{-1}$.

Théorème 1.1. *Toute bijection linéaire continue $B \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ est inversible.*

Théorème 1.2. *Soit $B : H_1 \longrightarrow H_2$ une application linéaire. Alors B est continu si et seulement si le graphe de B est fermé dans $H_1 \times H_2$, c'est-à-dire : pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H_1 vérifiant $(x_n \longrightarrow x, n \longrightarrow \infty)$ dans H_1 et $(Bx_n \longrightarrow y, n \longrightarrow \infty)$ dans H_2, on a $y = Bx$.*

1.1.5 Opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.9. *On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$; i.e, Pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$: $u_n \longrightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \longrightarrow v$ dans H_2, alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.*

L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe $(\|u\|_G := \|u\|_{h_1} + \|Au\|_{H_2})$ dans H_1.

Théorème 1.3. *(Théorème du graphe fermé) Si l'opérateur fermé A est définit sur tout l'espace H_1, alors A est borné*

$$(A \quad \textit{fermé et} \quad \mathcal{D}(A) = H_1 \Longrightarrow A \quad borné).$$

Définition 1.10. *On dit qu'un opérateur A est fermable dans H_1 s'il admet un prolongement fermé. Autrement dit A est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow 0$ et $Au_n \longrightarrow v$, alors $v = 0$. L'opérateur fermé $\overline{A}$ dont le graphe $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ est appelé fermeture de A.*

Définition 1.11. *On dit que l'opérateur S est une extension de T si $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ et $Tu = Su$ pour tout $u \in \mathcal{D}(T)$ (Autrement dit, $G(T) \subset G(S)$).*

Remarque 1.2. *Il n'est pas vrai que tout sous espace de $H_1 \times H_2$ est le graphe d'un opérateur.*

Proposition 1.1. *Un sous espace $G \in H_1 \times H_2$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si :*

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0. \tag{1.1}$$

Démonstration. On note P_1 :G $\longrightarrow E$ la projection donnée par $p_1(x, y) = x$ si la propriété (1.1) est vrai alors, $(x, y_1) \in G$ et $(x, y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$. Donc : l'application $T : p_1G \longrightarrow F$ qui associé à $x \in p_1G$ implique $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$ est bien définie et possède G comme son graphe. ■

Théorème 1.4. ***(Théoreme de l'isomorphisme)****Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F. Alors T^{-1} est continu de F dans E.*

Théorème 1.5. ***(Théoreme du graphe fermé)*** *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T, $G(T)$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continu.*

1.1.6 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.12. *Soit M un sous-espaces vectoriel de l'espace de Hilbert H_1, on définit $M^{\perp}$ l'orthogonal de M par*

$$M^{\perp} = \{f \in H_1; \quad < f, g >_{H_1} = 0; \quad \forall g \in M\}.$$

Proposition 1.2. *Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert H_1. Alors M est dense dans H_1 si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$*

Démonstration. Supposons d'abord que M est dense dans H_1. Soit $f \in M^{\perp} \subset H_1$, soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'élément de M qui converge vers f. On a $< f, f_n >_{H_1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on en conclut que $\|f\|_{H_1} = 0$. Donc : $f = 0$, qui donne $M^{\perp} = \{0\}$..

Réciproquement, supposons que $M^{\perp} = \{0\}$. Alors On a $(M^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = F$ et comme $M \subset \overline{M}$. Il s'en suit que $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$, et donc $(M^{\perp})^{\perp} \subset (\overline{M}^{\perp})^{\perp}$ mais $\overline{M}$ est un fermé, alors $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$, alors on trouve $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M} \Rightarrow F \subset \overline{M}$. D'où $F = \overline{M}$. ■

1.1.7 Espaces des fonctions intégrables :

Définition 1.13. *[Podlubny, 1999] Soit $\Omega = [0, T]$ $(0 < T < +\infty)$ en intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.*

1) Pour $1 \leq P < \infty$, l'espace $L^P(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty$$

.

2) Pour $P = \infty$ l'espace $L_\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornée presque partout (P.P) sur Ω.

Théorème 1.6. *[Podlubny, 1999] Soit $\Omega = [0, T]$ $(0 < T < \infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.*

1) Pour $1 \leq P < \infty$ l'espace $L^P(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \left(\int_0^T |f(t)|^P dt\right)^{\frac{1}{P}} < \infty$$

2) Pour $L^\infty(\Omega)$, est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\| = \inf\{M \geq 0 : |f(t)| \leq M(P.P) \quad sur \quad \Omega\}$$

1.1.8 Espaces des fonctions continue et absolument continue

Définition 1.14. *[Kilbas et al 2006] Soit $\Omega = [0, T], (0 < T < \infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonction f qui ont leurs dérivées d'ordre inferieur on égale à n continues sur Ω, muni de la norme*

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} max|f^{(k)}(t)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier Si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continue sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t\in\Omega} |f(t)|.$$

1.1.9 Fonctions Utiles

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés de la fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta qui liée a cette fonction.

Fonction Gamma d'Euler

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'euler $\Gamma(z)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes à parties réelles positives).

Définition 1.15. *[Podlubny, 1999] Pour* $z \in \mathbb{C}$ *telle que* $Re(z) > 0$. *La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par l'integrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp^{-t} t^{z-1} dt,$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0+) = \infty$, $\Gamma(z)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour* $0 < z < 1$.

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ *est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0. \tag{1.2}$$

qu'on peu la démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} \exp^{-t} t^z dt \\ &= [\exp^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} \exp^{-t} t^{z-1}) dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

La fonction Gamma d'euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, *en effet* $\Gamma(1) = 1$ *et en utilisant la relation* (1.2) *nous obtenons :*

$$\begin{cases} T(2) = 1T(1) = 1! \\ T(3) = 2T(2) = 2.1! = 2! \\ T(4) = 3T(3) = 3.2! = 3! \\ \vdots \\ T(n+1) = nT(n) = n(n-1)! = n!. \end{cases}$$

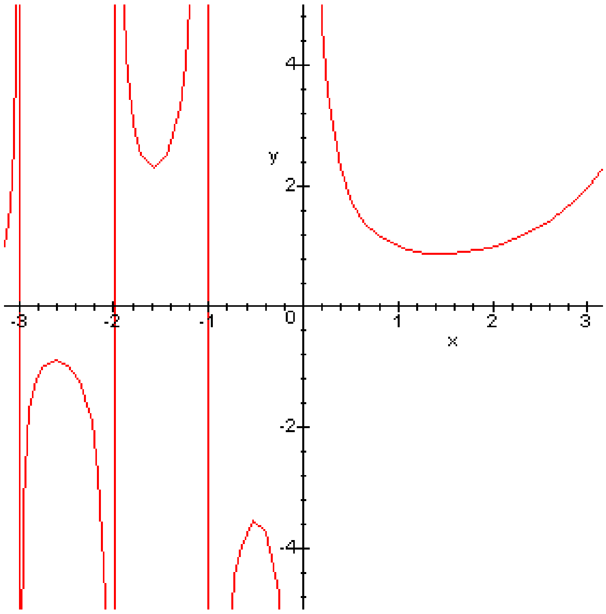

figure 1.1: Courbe représentative de la fonction Gamma

La fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quant elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.16. *[Podlubny, 1999] La fonction Bêta est un type d'integrale d'euler définie pour des nombres complexes z et w par :*

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt; \quad Re(z)>0; \quad Re(w)>0. \tag{1.3}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivantes :

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}; \quad Re(z)>0; \quad Re(w)>0. \tag{1.4}$$

Il s'ensuit de (1.4) *que :*

$$B(z,w)=B(w,z); \quad Re(z)>0; \quad Re(w)>0.$$

La fonction de Mittag-leffler

La fonction Mittag-leffler joue un rôle trés important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équation différentielles d'ordre fractionnaire. Cette fonction à été introduite par G.M.mittag leffler [Mittag-leffler1995].

Définition 1.17. *[Podlubny, 1999] Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suite :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}; \quad \alpha > 0. \tag{1.5}$$

En particulier : $E_1(z) = \exp^z; \quad E(z) = \cosh(\sqrt{z})$.
Cette fonction peut ètre généraliser pour deux paramètre pour donner :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}; \quad \alpha > 0; \quad \beta > 0. \tag{1.6}$$

1.1.10 Inégalités importante

Inégalité intégrale de cauchy-schwarz. Pour toute $U, V \in L^P(\Omega)$. Nous avons l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega U(x)V(x)dx \le \left(\int_\Omega U(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega V(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Inégalité de Hölder. Pour $U, V \in L^P(\Omega)$, nous avons :

$$\int_\Omega U(x)V(x)dx \le \left(\int_\Omega U^P(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_\Omega V^P(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad P > 1. \tag{1.8}$$

Cette inégalité est la généralisation de l'inégalité intégrale de Cauchy-schwarz.
Inégalité de Cauchy avec ϵ. Pour tout ϵ ; Pour arbitraire a, b dans $\mathbb{R}$ nous avons l'inégalité :

$$|ab| \le \frac{\epsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|b|^2. \tag{1.9}$$

Inégalité de young avec ϵ. Pour tout $\epsilon > 0$, et pour arbitraire a, b dans $\mathbb{R}$ nous avons l'inégalité :

$$|ab| \le |\epsilon a|^P + \frac{P-1}{P}|\frac{b}{\epsilon}|^{\frac{P}{P-1}}, \quad \forall P > 1. \tag{1.10}$$

Qui est la généralisation de l'énégalité de cauchy avec ϵ.

Inégalité de Poincaré .

Lemme 1.1. *Pour $u \in L^2(0,l)$. On a l'estimation :*

$$\|\Im_x u\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{l}{\sqrt{2}}\|u\|_{L^2(0,l)} \tag{1.11}$$

Démonstration. L'inégalité de Cauchy-schwarz entraine

$$\begin{aligned}
(\Im_x u)^2 &= \left(\int_x^l u(\xi,t)d\xi\right)^2 \\
&\leq \left(\int_x^l d\xi\right)\left(\int_x^l u(\xi,t)^2 d\xi\right) \\
&\leq (l-x)\int_x^l (u(\xi,t))^2 d\xi \\
&\leq (l-x)\int_0^l (u(x,t))^2 dx.
\end{aligned}$$

Par l'intégration sur $(0,l)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^l (\Im_x u)^2 dx &\leq \left(\int_0^l (l-x)dx\right)\left(\int (u(x,t))^2 dx\right) \\
&\leq \frac{l^2}{2}\int_0^l (u(x,t))^2 dx
\end{aligned}$$

Par conséquent, on aura :

$$\|\Im_x u\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{L^2(0,l)}.$$

■

Remarque 1.3. *L'inégalité* (1.11) *reste valable si on remplace l'intervalle* $(0,l)$ *par une région bornée* Ω *de* $\mathbb{R}$*. Il suffit de remplacer* l *par* $mes(\Omega)$ *(mesure de* Ω*) dans* (1.11).

Inégalité de Gronwall. L'inégalité de Gronwall joue un grand rôle dans les estimations des termes integro-différentiels et dont l'utilisation est fréquente pour l'obtention des estimations a priori dans les normes des espaces sucsités et autres.

Lemme 1.2. *(voir [63]) Soit* $Z_i(\tau)$ $(i=1,2,3)$ *sont des fonctions non négatives sur* $[0,T]$, $Z_1(\tau), Z_2(\tau)$ *sont intégrables et la foncion* $Z_3(\tau)$ *soit non-décroissante. Alors :*

$$\int_0^t Z_1(\tau)d\tau + Z_2(t) \leq Z_3(t) + c\int_0^t Z_2(\tau)d\tau$$

,

découle l'inégalité

$$\int_0^t Z_1(\tau)d\tau + Z_2(t) \leq e^{ct} Z_3(t).$$

1.2 Transformation de Laplace

1.2.1 Définition et Propriétés

Définition 1.18. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.*
- On appelle transformée de Laplace de f, la fonction $\mathcal{L}$ définie par :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt = F(s).$$

- On appelle transformation de laplace, l'application $\mathcal{L}$ définie sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ par $\mathcal{L}(f)$.

Remarque 1.4. *On peut étendre cette définition aux fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :*
a) f est continue par morcaux, c'est-à-dire que sur chaque intervalle fini de la forme $[a, b], a < b$, les discontinuités de f (si elles existent) sont en nombre fini et sont de premiére espèce.
b) f est d'ordre exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ telle que $|f(t)| \leq M\exp(\alpha t)$. La continuité intervient lorsqu'on parlera de la transformée inverse de Laplace.

Sous ces conditions, il est facile de vérifier que $\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$ converge pour $Re(s) > \alpha$ et on peut alors parler de transformée de Laplace de f.

Linéarité
Si les fonctions $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ ont des transformée de laplace, et soit $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ un ensemble quelconque de constantes arbitraires. Alors

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{L}\{f_i(t)\}. \tag{1.12}$$

Translation de la transformée

$$\mathcal{L}\{\exp(-\alpha t) f(t)\} = F(s+a). \tag{1.13}$$

Transformation d'une dérivée d'ordre supèrieur

Soit $f(t)$ continu sur $0 \leq t < \infty$, et soient $f'(t), f''(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ continus par morceaux sur tout intervalle fini continu dans $[0, \infty)$. Alors

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{i-1} f^{(i-1)}(0). \tag{1.14}$$

où : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Transformation d'un produit de convolution

Définition 1.19. *Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g, est une autre fonction, qui se note généralement $f * g$ et qui est définie par :*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau. \tag{1.15}$$

Théorème 1.7. *Soit $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ et $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. Alors :*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s). \tag{1.16}$$

Inversements,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t).$$

1.2.2 Transformée Inverse de Laplace

Méthode Analytique Il n'existe pas de méthode analytique générale permettant de calculer $u(x,t)$ si on connait $U(x,s)$. Cependant, on connait l'expression exacte $u(x,t)$ pour certaines fonctions $U(x,s)$. L'inversion de la transformée de laplace s'effectue par le biais d'une intégrale dans le plan complexe, la formule de **Bromwich Mellin** est donnée par :

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(U(x,s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \exp(st) U(x,s) ds.$$

Avec γ choisi de sorte que l'integrale soit convergente. C'est-à-dire γ doit être supérieur à la partie réelle de tout singularité de U(x,s) et qu'à l'infini (γ est réelle positive $Re(s) = \gamma$), $U(x,s) \longrightarrow 0$ au moins rapidement que $\frac{1}{|s|^2}$.

En pratique la formule de Bromwich Mellin est peu utilisé, et on calcule les inverses des transformes de Laplace à partir des tables de transformes de Laplace.

Méthode numérique (L'algorithme de Stehfest) Pour les cas de figure pour lesquels on ne peut pas trouver une solution analytique, on peut employer la méthode numérique suivante :

La méthode de Stehfest, aussi connu sous le nom d'algorithme de Stehfest, est une méthode qui permet de calculer les valeurs de $u(x,t)$. Elle a été publée par Harald Stehfest en 1970.

La transformée inverse de la fonction $U(x,s)$ peut se calculer par :

$$u(x,t) \simeq \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^{2m} \beta_n U\left(x; \frac{n \ln 2}{t}\right), \tag{1.17}$$

avec,

$$\beta_n = (-1)^{n+m} \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{min(n,m)} \frac{k^m (2k)!}{(m-k)!k!(k-1)!(n-k)!(2k-n)!} \tag{1.18}$$

où m est un nombre entier positif impair et $[q]$ désigne la partie entiére du nombre réel q.
Pour $m = 5$, les premiers β_n sont donnés par :
$\beta_1 = \frac{1}{12}, \beta_2 = -\frac{385}{12}, \beta_3 = 1279, \beta_4 = -\frac{46871}{3}, \beta_5 = \frac{505465}{6}, \beta_6 = -\frac{473915}{2}, \beta_7 = \frac{1127735}{3},$
$\beta_8 = -\frac{1020215}{3}, \beta_9 = \frac{328125}{2}, \beta_{10} = -\frac{65625}{2}.$

1.3 Méthode de perturbation de l'homotopie combinée avec la transformation de Laplace(LT- HPM)

1.3.1 Idée de base de la méthode de perturbation de l'homotopie

La méthode de perturbation de l'homotopie a été proposée par Ji-Huan He en 1998 [38] et a été développée et améliorée par lui-même [39, 40]. Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'equation fonctionnelle non-linéaire suivante :

$$A(u) - f(r) = 0; \quad r \in \Omega, \tag{1.19}$$

avec la condition aux limites suivante :

$$B(u; \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0; \quad r \in \Gamma, \tag{1.20}$$

où A est un opérateur fonctionnel général, B un opérateur de frontiére, $f(r)$ est une fonction analytique connue et est la frontiére du domaine. L'opérateur A peut-être décomposé en deux opérateurs L et N, où L est linéaire et N est un opérateur non linéaire. L'equation (1.19) peut donc s'écrire comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \tag{1.21}$$

En utilisant la technique d'homotopie, nous construisons une homotopie :

$$v(r; p) : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

qui satisfait :

$$H(v, p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0; \quad r \in \Omega. \tag{1.23}$$

où

$$H(v;p) = L(v) - L(u_0) + p[L(u_0) + N(v) - f(r)] = 0 \tag{1.24}$$

où $p \in [0;1]$ est un paramètre d'inclusion, u_0 est une approximation initiale de l'équation (1.19), qui vérifie les conditions aux limites. Évidemment, à partir des équations (1.23) et (1.24), nous aurons :

$$H(v.0) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{1.25}$$

$$H(v;1) = A(v) - f(r) = 0 \tag{1.26}$$

Le changement de p de zéro à l'unité ne sont que celles de $v(r;p)$ de $u_0(r)$ á $u(r)$.

En topologie, on parle de déformation, et $L(v) - L(u_0), A(v) - f(r)$ sont appelés homotopie. En 1998 Ji-Huan He, a utilisé le paramìtre d'inclution p comme un "petit paramètre", et suppose que la solution d'q̀uation (1.23) et (1.24) peut être écrite comme série de puissance en p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + ... \tag{1.27}$$

Nous prenons $p \longrightarrow 1$, on aboutit à l'approximation de la solution de l'équation (1.19).

$$u = \lim_{p \longrightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + ... \tag{1.28}$$

La combinaison de la méthode de perturbation et de la méthode d'homotopie est appelée méthode de perturbation de l'homotopie **(HPM)**, qui a éliminé les limitations des techniques de perturbation traditionnelles. La série (1.28) est convergente pour plusieurs de cas. Certains critères sont suggérés pour la convergence de la série (1.28), dans [38].

1.3.2 La méthode HPM combinée avec la transformation de Laplace

Dans les éxemples suivant nous exposons la méthode de pertubation d'homotopie (HPM) combinée avec la transformation de Laplace (LT).

Exemple 1.1. *On considére l'équation de* ***Riccati*** *suivante :*

$$\frac{du}{dt} = 2u - u^2 + 1, t \in \Omega(\Omega = [0, +\infty)) \tag{1.29}$$

$$u(0) = 0, \tag{1.30}$$

la solution exacte de (1.29) *et* (1.30) *est donnée par :*

$$u(t) = 1 + \sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2t} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right),$$

d'autre part, le dévlopement de taylor de u au voisinage de 0 *est*

$$u(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 ....$$

*On cherche maintenant la solution selon la méthode **(LT-HPM)**. Appliquant l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'équation* (1.29)*, on obtient*

$$sU(s) - U(0) = \mathcal{L}(2u(t) - u^2(t) + 1),$$

d'où

$$U(s) - \frac{1}{s}u(0) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(2u(t) - u^2(t) + 1), \tag{1.31}$$

en appliquant l'inverse de l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'équation (1.31)*, on obtient :*

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}(2u(t) - u^2(t) + 1)\right\} + u(0) \tag{1.32}$$

Nous construire l'homotopie suivantes :

$$v(t;p) : \Omega \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.33}$$

$$v(t) - u(0) = p\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}(2v(t) - v^2(t) + 1)\right\} \tag{1.34}$$

supposons que la solution de (1.33) *soit écrire comme la série suivante :*

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t), \tag{1.35}$$

en remplaçant (1.35) *dans* (1.34)*, on obtient*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t) - u(0) = p\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\Big(2\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t) - \Big(\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_{j(t)}\Big)^2 + 1\Big)\right\}.$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p, on trouve

$$\begin{cases} p^0 : v_0(t) = u(0) = 0, \\ p^1 : v_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^{-1}\mathcal{L}\{2v_0 - v0^2 + 1\}) = t, \\ p^2 : v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^{-1}\mathcal{L}\{2v_1 - 2v_0 v_1\}) = t^2, \\ p^3 : v_3(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^{-1}\mathcal{L}\{2v_2 - 2v_0 v_2 - v_1^2\}) = \frac{1}{3}t^3, \\ p^4 : v_4(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^{-1}L\{2v_3 - 2v_0 v_3 - 2v_1 v_2\}) = -\frac{1}{3}t^4, \\ \vdots \\ p^i : v_i(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^{-1}\mathcal{L}\Big\{2v_{i-1} - \sum_{j=0}^{i-1} v_j v_{i-j-1}\Big\}). \end{cases}$$

lorsque $p \longrightarrow 1$, (1.35) devient la solution approximative de l'equation (1.29), c-à-d,

$$u(t) = \lim_{p \longrightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + \ldots.$$

$$u(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 \ldots.$$

Exemple 1.2. *Dans le réctangle* $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ *on considère l'équation déférentielle partielle non linéaire suivante :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega \tag{1.36}$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = x. \tag{1.37}$$

La solution éxacte de (1.36)-(1.37) *est donnée par :*

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t},$$

le développement de taylor par rapport à t de la fonction u au voisinage de 0 *est :*

$$u(x, t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^8 \ldots).$$

*On cherche maintenant la solution selon la méthode **(LT-HPM)**, en appliquant l'opérateur* $\mathcal{L}$ *à l'équation* (1.36)*, on obtient,*

$$U(x, s) - u(x, 0) = \mathcal{L}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x}\Big),$$

d'où

$$U(s, x) - \frac{1}{s}u(x, 0) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \tag{1.38}$$

Appliquons l'opérateur $\mathcal{L}^{-1}$ *à l'équation* (1.38)*, on obtient*

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s}\mathcal{L}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big) + u(x, 0),$$

nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$v(x; t; p) : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$v(x, t) - u(x, 0) = p\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s}\mathcal{L}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - v\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big), \tag{1.39}$$

supposons que la solution de (1.39) *soit écrite comme la série suivante :*

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t), \tag{1.40}$$

en remplace (1.40) *dans* (1.39)*, on obtient*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(x,t) - u(x,0) = p\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s}\mathcal{L}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} p^j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j \sum_{j=0}^{\infty} p^j \frac{\partial v_j}{\partial x}\Big)\Big), \tag{1.41}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p, on trouve :

$$\begin{cases} p^0 : v_0(x,t) = u(x,0) = x, \\ p^1 : v_1(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(s^{-1}\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial v_0}{\partial x}\Big\}\Big) = -tx, \\ P^2 : v_2(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(s^{-1}\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial v_0}{\partial x}\Big\}\Big) = t^2 x, \\ p^3 : v_3(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(s^{-1}\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_0\frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial v_0}{\partial x}\Big\}\Big) = t^3 x, \\ p^4 : v_4(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(s^{-1}\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial v_3}{\partial x} - v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_3\frac{\partial v_0}{\partial x}\Big\}\Big) = t^4 x, \\ \vdots \\ p^i : v_i(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(s^{-1}\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{i-1} v_j \frac{\partial v_{i-1}}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{i-1} v_j \frac{\partial v_{i-j-1}}{\partial x}\Big\}\Big). \end{cases}$$

lorsque $p \longrightarrow 1$, (1.40) devient la solution approximative de l'équation (1.36), c-à-d :

$$u(t) = \lim_{p\longrightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 \ldots.$$

$$u(t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 \ldots)$$

.

Chapitre

Chapitre 2

Etude d'un problème intégro-différentielle pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales

2.1 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire $Q = \Omega \times I = \{(x,t) : 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T\}$, on considère une équation intégro-différentielle pseudo-hyperbolique :

$$\mathcal{L}v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} + \gamma v - \int_0^t a(t-s)v(x,s)ds = g(x,t), \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales

$$\ell v = v(x,0) = \Phi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2.2}$$

$$qv = v_t(x,0) = \Psi(x), \quad 0 < x < 1 \tag{2.3}$$

et

$$\int_0^1 v(x,t)dx = n(t), \quad 0 < t < T, \tag{2.4}$$

$$\int_0^1 xv(x,t)dx = m(t), \quad 0 < t < T, \tag{2.5}$$

où g, Φ, Ψ, a, n et m sont des fonctions connues α, β, γ et T des constantes positives, de plus les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ satisfont aux conditions de compatibilité suivantes :

$$\int_0^1 \Phi dx = n(0), \int_0^1 x\Phi dx = m(0), \int_0^1 \Psi dx = n'(0), \int_0^1 x\Psi dx = m'(0).$$

2.2 Reformulation du problème

Puisque les conditions aux limites intégrales sont non homogènes, il est commode de converti le problème (2.1)-(2.5) en un problème équivalent avec des conditions intégrales homogènes. Pour cela, nous introduisons une nouvelle fonction $u(x,t)$ comme suit

$$v(x,t) = u(x,t) + U(x,t), \tag{2.6}$$

où

$$U(x,t) = (-6x+4)n(t) + (12x-6)m(t). \tag{2.7}$$

Le problème (2.1)-(2.5) avec des conditions intégrales non-homogènes (2.4)-(2.5) peut être réduit de façon équivalente au problème de trouver une fonction u satisfaisant à

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \gamma u - \int_0^t a(t-s)u(x,s)ds = f(x,t), \tag{2.8}$$

avec les conditions initiales

$$\ell u = u(x,0) = \phi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2.9}$$

$$qu = u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < 1 \tag{2.10}$$

et

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T, \tag{2.11}$$

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = 0, \quad 0 < t < T, \tag{2.12}$$

où

$$f(x,t) = g(x,t) = U(x,t) \tag{2.13}$$

et

$$\varphi(x) = \Phi(x) - \ell U(x,t), \tag{2.14}$$

$$\psi(x) = \Psi(x) - qU(x,t). \tag{2.15}$$

Donc au lieu chercher v, nous cherchons simplement u. La solution du problème (2.1)-(2.5).

2.3 Estimaion a priori

Dans ce chapitre, on montre l'existence et l'unicité de la solution forte dans un espace fonctionnel du problème (2.1)-(2.5). La démonstration est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème (2.8)-(2.12) équivalent au problème (2.1)-(2.5) en suivant le schéma cité dans l'introduction. La solution du problème (2.8)-(2.12) peut être considérée comme une solution du problème sous la forme opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F}, \tag{2.16}$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell, q)$ avec un domaine de définition $D(L)$ constitué de fonctions $u \in L^2(Q)$; telles que $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \in L^2(Q)$ et u satisfait (2.11) ainsi que (2.12), l'opérateur L est considéré de B dans F, où B est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2(Q)$, dont la norme est :

$$\|u\|_B = \Big(\sup_{0 \le \tau \le T} \int_0^1 \Big(\|\Im_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2 + \|\Im_x u(x,\tau)\|^2 \Big) dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

qui est fini et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments de $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ dont la norme est

$$\|\mathcal{F}\|_F = \Big(\int_{Q_\tau} \|f\|^2 dx dt + \int_0^1 (\|\psi(x)\|^2 + \|\varphi\|^2) dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui est fini.

Théorème 2.1. *Si $u(x,t)$ est une solution de problème (2.8)-(2.12) et $|a(t)| \le a_1$ et β satisfaisant la condition $\beta \ge \dfrac{T^4 a_1 \epsilon_1^2 + a_1}{8\epsilon_1} + \dfrac{1}{8\epsilon_2}$, $f \in C(\overline{Q})$, on a l'estimation*

$$\|u\|_B \le C \|Lu\|_F. \tag{2.17}$$

Où C est une constante positive indépendante de u; $u \in D(L)$

$$C = \Big(\frac{\max(\frac{1}{2}, \epsilon_2, \frac{1}{2}\gamma + \alpha}{\min(1, \gamma + 2\alpha)} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. On pose $\Im_x u = \int_0^x u(\xi,t) d\xi$ et $\Im_x^2 u = \int_0^x \int_0^\eta u(\xi,t) d\xi d\eta$. Multiplions l'équation (2.8) par $Mu = -\Im_x^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}$, puis intégrons sur le sous domaine $Q_\tau = (0,\tau) \times (0,1)$ où $0 \le \tau \le T$, on obtient :

$$-\int_{Q_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt+\alpha\int_{Q_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt+\beta\int_{Q_\tau}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt- \tag{2.18}$$
$$\gamma\int_{Q_\tau}u\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt+\int_{Q_\tau}(\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds)\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt=$$
$$-\int_{Q_\tau}f\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt.$$

L'intégration par parties de chaque terme du côté gauche de l'équation (2.18) donne

$$-\int_{Q_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt=\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x\psi(x)\|^2dx \tag{2.19}$$

$$\alpha\int_{Q_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt=\frac{1}{2}\alpha\int_0^1\|u(x,\tau)\|^2dx-\frac{1}{2}\alpha\|\varphi(x)\|^2dx, \tag{2.20}$$

$$\beta\int_{Q_\tau}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt=\beta\int_{Q_\tau}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2dxdt, \tag{2.21}$$

$$-\gamma\int_{Q_\tau}u\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt=\frac{1}{2}\gamma\int_0^1\|\Im_x u(x,\tau)\|^2dx-\frac{1}{2}\gamma\int_0^1\|\Im_x\varphi(x)\|^2dx. \tag{2.22}$$

Substitutions (2.19)-(2.22) dans (2.18) donne

$$\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2dx+\frac{1}{2}\gamma\int_0^1\|\Im_x u(x,\tau)\|^2dx+\frac{1}{2}\alpha\int_0^1\|u(x,\tau)\|^2dx$$
$$+\beta\int_{Q_\tau}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2dxdt=\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x\psi(x)\|^2dx+\frac{1}{2}\gamma\int_0^1\|\Im_x\varphi(x)\|^2dx+\frac{1}{2}\alpha\|\varphi(x)\|^2dx$$
$$-\int_{Q_\tau}f\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt-\int_{Q_\tau}(\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds)\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt.$$

En utilisant les inégalités de type de Poincaré suivantes

$$\int_0^1\|\Im_x^2 u(x,\tau)\|^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x u(x,\tau)\|^2dx,$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x u(x,\tau)\|^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1\|u(x,\tau)\|^2dx,$$
$$\int_{Q_\tau}\|\int_0^t u(x,s)ds\|^2dxdt\le\frac{T^2}{2}\int_{Q_\tau}\|u\|^2dxdt,$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \|\Im_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2 dx + \Big(\frac{1}{2}\gamma+\alpha\Big)\int_0^1 \|\Im_x u(x,\tau)\|^2 dx + \beta\int_{Q_\tau}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 dxdt \tag{2.23}$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^1 \|\psi(x)\|^2 dx + \Big(\frac{1}{4}\gamma+\frac{1}{2}\alpha\Big)\int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx$$
$$\leq -\int_{Q_\tau} f\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt - \int_{Q_\tau}\Big(\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds\Big)\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy avec ϵ, le membre droit de (2.23) est borné

$$-\int_{Q_\tau} f\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt - \int_{Q_\tau}\Big(\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds\Big)\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt$$
$$\leq \frac{\epsilon_2}{2}\int_{Q_\tau}\|f\|^2 dxdt + \frac{1}{2\epsilon_2}\int_{Q_\tau}\|\Im_x^2\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 dxdt + \frac{a_1\epsilon_1}{2}\int_{Q_\tau}\|\int_0^t u(x,s)ds\|^2 dxdt$$
$$+\frac{a_1}{2\epsilon_1}\int_{Q_\tau}\|\Im_x^2\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 dxdt.$$

On a

$$-\int_{Q_\tau} f\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt - \int_{Q_\tau}\Big(\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds\Big)\Im_x^2\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt \tag{2.24}$$
$$\leq \frac{\epsilon_2}{2}\int_{Q_\tau}\|f\|^2 dxdt + \Big(\frac{T^4 a_1\epsilon_1^2 + a_1}{8\epsilon_1} + \frac{1}{8\epsilon_2}\Big)\int_{Q_\tau}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 dxdt,$$

en utilisant (2.24) dans (2.23), on obtient

$$\int_0^1 \|\Im_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2 dx + \Big(\gamma+2\alpha\Big)\int_0^1 \|\Im_x u(x,\tau)\|^2 dx$$
$$+2\Big(\beta - \frac{T^4 a_1\epsilon_1^2 + a_1}{8\epsilon_1} - \frac{1}{8\epsilon_2}\Big)\int_{Q_\tau}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 dxdt$$
$$\leq \epsilon_2\int_{Q_\tau}\|f\|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1\|\psi\|^2 dx + \Big(\frac{1}{2}\gamma+\alpha\Big)\int_0^1\|\varphi\|^2 dx,$$

Si β satisfaisant la condition $\beta \geq \dfrac{T^4 a_1\epsilon_1^2 + a_1}{8\epsilon_1} + \dfrac{1}{8\epsilon_2}$, on obtient

$$\int_0^1 \|\Im_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2 dx + \Big(\gamma+2\alpha\Big)\int_0^1 \|\Im_x u(x,\tau)\|^2 dx \tag{2.25}$$
$$\leq \epsilon_2 \int_{Q_\tau} \|f\|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1 \|\psi\|^2 dx + \Big(\frac{1}{2}\gamma+\alpha\Big)\int_0^1 \|\varphi\|^2 dx,$$

puisque le membre de droite de (2.25) est indépendante de τ, nous prenons le supermum par rapport à τ de 0 à T dans le membre de gauche nous obtenons :

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}\int_0^1 \|\Im_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2 dx + \int_0^1 \|\Im_x u(x,\tau)\|^2 dx \leq C\Big(\int_{Q_\tau} \|f\|^2 dxdt + \int_0^1 \|\psi(x)\|^2 dx + \int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx\Big).$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$\|u\|_B \leq C\|Lu\|_F.$$

Avec $C = \Big(\dfrac{\max(\frac{1}{2},\epsilon_2,\frac{1}{2}\gamma+\alpha}{\min(1,\gamma+2\alpha)}\Big)^{\frac{1}{2}}$. ■

Proposition 2.1. *L'opérateur L de B dans F est fermable.*

Démonstration. Soit $\{u_n\} \in D(L)$ une suite telle que :

$$u_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad B, \tag{2.26}$$

et

$$Lu_n \longrightarrow (f,\varphi,\psi) \quad dans \quad F, \tag{2.27}$$

il faut démontrer que

$$f \equiv 0, \quad \varphi \equiv 0 \quad et \quad \psi \equiv 0.$$

La convergence de u_n vers 0 dans B entraîne :

$$u_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad D'(Q). \tag{2.28}$$

D'aprés la continuité de la dérivation de $D'(Q)$ dans $D'(Q)$ (2.28) implique

$$\mathcal{L}u_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad D'(Q), \tag{2.29}$$

par ailleurs, la convergence de $\mathcal{L}u_n$ vers f dans $L^2(Q)$ engendre

$$\mathcal{L}u_n \longrightarrow f \quad dans \quad D'(Q). \tag{2.30}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $D'(Q)$, on conclut de (2.29) et (2.30) que $f = 0$. Ensuite, il s'engendre de (2.27)

$$\ell u_n \longrightarrow \varphi \quad dans \quad L^2(0,1), \quad q u_n \longrightarrow \psi \quad dans \quad L^2(0,1), \tag{2.31}$$

d'un autre coté, d'après que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_B^2 &= \sup_{0\le\tau\le T}\int_0^1 \left(\|\Im_x \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,\tau)\|^2 + \|\Im_x u_n(x,\tau)\|^2\right)dx \\
&\ge \int_0^1 \left(\|\Im_x \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0)\|^2 + \|\Im_x u_n(x,0)\|^2\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(\|\Im_x q u_n\|^2 + \|\Im_x \ell u_n\|^2\right)dx
\end{aligned}$$

donc on trouve

$$\int_0^1 \left(\|\Im_x q u_n\|^2 + \|\Im_x \ell u_n\|^2\right)dx \le \|u_n\|_B^2, \quad \forall n,$$

alors compte tenu de (2.27), on aura

$$\ell u_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2(0,1), \quad q u_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2(0,1) \tag{2.32}$$

D'après l'unicité de la limite dans $L^2(0,1)$ en vertu de (2.31) et (2.32) on obtient $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. ■

Définition 2.1. *La solution de l'équation*

$$\overline{L}u = \mathcal{F}.$$

est dite solution forte du problème (2.8)-(2.12)

Théorème 2.1 est valide pour une solution forte, i.e; on a l'inégalité :

$$\|u\|_B \le c\|\overline{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{2.33}$$

Par conséquent, cette dernière inégalité entraîne les corollaires suivants

Corollaire 2.1. *La solution du problème* (2.1)-(2.5) *est unique si elle existe et dépend continûment de* $\mathcal{F} \in F$.

Corollaire 2.2. *L'ensemble des valeurs* $R(\overline{L})$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est égale à la fermeture* $\overline{R(L)}$ *de* $R(L)$.

Démonstration. Soit $z \in \overline{R(L)}$, alors il existe une suite de Cauchy $\{z_n\}_n$ dans F constituée des éléments de l'ensemble $R(L)$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} z_n = z.$$

Il existe alors une suite correspondante $u_n \in D(L)$ telle que

$$Lu_n = z_n.$$

De l'estimation (2.17), on obtient

$$\| u_p - u_q \|_B \leq c \| Lu_p - Lu_q \|_F \longrightarrow 0,$$

quand p et q tendent vers l'infini. On peut déduire que $\{u_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans B, ainsi il existe $u \in B$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = u \quad dans \quad B.$$

En vertu de la définition de $\overline{L}\Big(\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = u$ dans B si $\lim_{n \longrightarrow +\infty} Lu_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} z_n = z$, alors $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \overline{L}u_n = z$ et comme $\overline{L}$ est fermé donc $\overline{L}u = z\Big)$, la fonction u vérifie que :

$$u \in D(\overline{L}), \quad \overline{L}u = z.$$

Ainsi $z \in R(\overline{L})$, alors

$$\overline{R(L)} \subset R(\overline{L}).$$

Aussi on conclut ici que $R(\overline{L})$ est fermé parce qu'il est complet (tout sous-espace complet d'un espace métrique (non nécessairement complet) est fermé).

☞reste à montrer l'inclusion inverse.

Soit $z \in R(\overline{L})$, alors il existe une suite $\{z_n\}_n$ dans F constituée des éléments de l'ensemble $R(\overline{L})$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} z_n = z,$$

où $z \in R(\overline{L})$, car $R(\overline{L})$ est un sous-ensemble fermé d'un espace complet F, donc $R(\overline{L})$ est complet. Il existe alors une suite correspondante $u_n \in D(\overline{L})$ telle que

$$\overline{L}u_n = z_n.$$

De l'estimation (2.33), on obtient :

$$\| u_p - u_q \|_B \leq c \| \overline{L}u_p - \overline{L}u_q \|_F \longrightarrow 0,$$

quand p et q tendent vers l'infini. On peut déduit que $\{u_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans B, ainsi il existe $u \in B$ telle que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = u \quad dans \quad B.$$

Une fois encore, il existe une suite correspondante $\{L(u_n)\}_n \in R(L)$ telle que

$$Lu_n = \overline{L}u_n \quad sur \quad R(L), \quad \forall n.$$

Donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} Lu_n = z,$$

En conséquence $z \in \overline{R(L)}$ et alors on conclut que

$$R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}.$$

■

2.4 Existence de la solution

Théorème 2.2. *Si β satisfaisant la condition $\beta \geq \dfrac{T^4 a_1\epsilon_1^2 + a_1}{8\epsilon_1} + \dfrac{1}{8\epsilon_2}$, alors le problème* (2.8)-(2.12) *admet une solution unique et forte $u = \overline{L}^{-1}(f,\varphi,\psi) = \overline{L^{-1}}(f,\varphi,\psi)$.*

Démonstration. Pour prouver que le problème (2.8)-(2.12) admet une solution forte pour tout arbitraire $(f,\varphi,\psi) \in F$, il suffit de prouver que $R(L)$ est dense dans F, tout d'abord pour le cas où L est réduit à $L_0 = (\mathcal{L},\ell,q)$ avec le domaine $D(L_0) = \{u/u \in D(L) : \ell u = 0 et q u = 0\}$. pour ce faire, nous démontrons la proposition suivant : ■

Proposition 2.2. *Dans les conditions du théorème 2.1,pour $\omega \in L^2(Q)$ et pour tout $u \in D(L_0)$, nous avons*

$$\int_Q \mathcal{L}u.\omega dxdt = 0, \tag{2.34}$$

alors ω s'annule presque partout dans Q.

Démonstration. L'égalité (2.34) peut s'écrire comme suit

$$\int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\omega dxdt = \alpha\int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\omega dxdt + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\omega dxdt - \gamma\int_{Q_\tau} u\omega dxdt \tag{2.35}$$
$$-\int_{Q_\tau} f\omega dxdt + \int_{Q_\tau} (\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds)\omega dxdt,$$

à partir de légalité (2.35), nous donnons la fonction ω en termes de u comme suit :

$$\omega = -\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.36}$$

En substituant ω dans (2.35) par sa représentation (2.36), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt &= \alpha \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt \\
&+\beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt - \gamma \int_{Q_\tau} u\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt \\
-\int_{Q_\tau} f\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt &+ \int_{Q_\tau} (\int_0^t a(t-s) u(x,s) ds)\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

par intégration par parties et en tenant compte des conditions (2.11) et (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
-\int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \|\Im_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \|\Im_x q u\|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \|\Im_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2 dx,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt &= \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 \|u(x,\tau)\|^2 dx + \frac{1}{2}\alpha \|\ell u\|^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\alpha \int_0^1 \|u(x,\tau)\|^2 dx,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\beta \int_{Q_\tau} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt = -\beta \int_{Q_\tau} \|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 dxdt, \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma \int_{Q_\tau} u\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt &= -\frac{1}{2}\gamma \int_0^1 \|\Im_x u(x,\tau)\|^2 dx + \frac{1}{2}\gamma \int_0^1 \|\Im_x \ell u\|^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\gamma \int_0^1 \|\Im_x u(x,\tau)\|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

La substitution de (2.38), (2.39), (2.40) et (2.41) dans (2.37) donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1 \|\Im_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2 dx + \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 \|u(x,\tau)\|^2 dx + \beta \int_{Q_\tau} \|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 dxdt \\
&+\frac{1}{2}\gamma \int_0^1 \|\Im_x u(x,\tau)\|^2 dx \le \int_{Q_\tau} (\int_0^t a(t-s) u(x,s) ds)\Big(-\Im_x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Par l'utilisation de l'inégalité de Cauchy avec ϵ, le côté droit de (2.42) est borné

$$\int_{Q_\tau}\Big(\int_0^t a(t-s)u(x,s)ds\Big)\Big(-\Im_x^2\frac{\partial u}{\partial t}\Big)dxdt \leq \frac{T^4 a_1\epsilon_1^2+a_1}{8\epsilon_1}\int_{Q_\tau}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2dxdt \tag{2.43}$$

En utilisant (2.43) dans (2.42), nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2dx+\Big(\beta-\frac{T^4 a_1\epsilon_1^2+a_1}{8\epsilon_1}\Big)\int_{Q_\tau}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\gamma\int_0^1\|\Im_x u(x,\tau)\|^2dx+\frac{1}{2}\alpha\int_0^1\|u(x,\tau)\|^2dx\leq 0,$$

si β satisfait $\beta\geq\frac{T^4 a_1\epsilon_1^2+a_1}{8\epsilon_1}+\frac{1}{8\epsilon_2}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2dx+\frac{1}{2}\gamma\int_0^1\|\Im_x u(x,\tau)\|^2dx+\frac{1}{2}\alpha\int_0^1\|u(x,\tau)\|^2dx\leq 0, \tag{2.44}$$

nous obtenons comme le membre droite de (2.44) est indépendant de τ, nous prenons le supermumpar rapport à τ de 0 à T dans le membre gauche nous obtenons :

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}\frac{1}{2}\int_0^1\|\Im_x\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\|^2dx+\frac{1}{2}\gamma\int_0^1\|\Im_x u(x,\tau)\|^2dx+\frac{1}{2}\alpha\int_0^1\|u(x,\tau)\|^2dx\leq 0,$$

où

$$u=0.$$

Nous mettons $u=0$ dans (2.36) qui donne $\omega\equiv 0$ dans $L^2(Q)$.

Maintenant passant à la démonstration du théorème 2.2. A cette fin, il suffit de prouver que $R(L)$ est dense dans F. On suppose que pour certain $W=(\omega,\omega_0,\omega_1)\in R(L)^\perp$ et pour tout $u\in D(L)\equiv B$, alors Wvérifie l'égalité :

$$\int_Q \mathcal{L}u.\omega dxdt+\int_0^1\ell u.\omega_0dx+\int_0^1 qu.\omega_1dx=0. \tag{2.45}$$

Il faut prouver que $W=(0,0,0)$. Mettons $u\in D(L_0)$ dans (2.45),on obtient

$$\int_{Q_\tau}\mathcal{L}u.\omega dxdt=0,\quad u\in D(L_0).$$

Alors la proposition 2.2 implique que $\omega\equiv 0$. Donc (2.45) prend la forme

$$\int_0^1 \ell u.\omega_0 dx + \int_0^1 qu.\omega_1 dx = 0.$$

Puisque les ensembles des valeurs des opérateurs ℓ et q sont indépendants et les ensembles des valeurs ℓ et q sont partout denses dans $L^2(Q)$, alors on trouve que $\omega_0 \equiv 0$ et $\omega_1 \equiv 0$. Donc $W \equiv (0,0,0)$, ce qui implique que $\overline{R(L_0)} = F$. Considérons maintenant le cas général. Du fait que $R(L_0)$ est dense dans F, on conclut qu'on peut prouver que $R(L)$ est dense dans F au moyen de la méthode de continuation le long du paramètre. Cela achève la démonstration du théorème 2.2. $\blacksquare$

Chapitre

Chapitre 3

Appliations de la méthode HPM

Dans ce chapitre, nous présentons l'application de la méthode de perturbation d'homotopie **(HPM)** aux problème intégro-différentielle pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales

3.1 Méthode de transformation de Laplace

Supposons que $v(x,t)$ est définit et est d'ordre exponentiel pour $t \geq 0$ c'est-à-dire qu'il existe $A, \gamma > 0$ et $t_0 > 0$ tels que $|v(t)| \leq Aexp(\gamma t)$ pour $t \geq t_0$. Supposons aussi que la transformée de Laplace $V(x,s)$, existe et est donnée par

$$\begin{aligned} V(x,s) &= \mathcal{L}\{v(x,t); t \longrightarrow s\} \\ &= \int_0^\infty v(x,t) exp(-st) dt \end{aligned}$$

où s un paramètre positif. Prenant la transformation de Laplace des deux côtés de (2.1), nous obtenons

$$-(\alpha + s\beta)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,s) + (s^2 + \gamma - A(s))V(x,s) = G(x,s) + \Psi(x) + s\Phi(x) - \beta\Phi''(x), \tag{3.1}$$

où $G(x,s)=\mathcal{L}\{g(x,t),t\longrightarrow s\}$. De même, nous avons

$$\int_0^1 V(x,s)dx = N(s), \quad \int_0^1 xV(x,s)dx = M(s), \tag{3.2}$$

où

$$N(s)=\mathcal{L}\{n(t),t\longrightarrow s\}, \quad M(s)=\mathcal{L}\{m(t),t\longrightarrow s\} \tag{3.3}$$

Ainsi, l'équation considérée est réduite à un problème de valeur limite gouverné par une équation différentielle ordinaire non homogène de second ordre.

3.1.1 Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT- HPM)

Après l'application de la transformation de Laplace et d'après la téchnique **HPM**, pour déterminer la solution approché de l'équation (3.1) nous construisons une homotopie proposée par Madani et al [45], sous la forme suivant :

$$V(x,s)=\frac{P}{s^2+\gamma-A(s)}\Big((\alpha+s\beta)\frac{\partial^2 V(x,s)}{\partial x^2}+G(x,s)\Big)+\frac{1}{s^2+\gamma-A(s)}\Big(\Psi(x)+s\Phi(x)-\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\Big), \quad n\geq 1. \tag{3.4}$$

La solution de L'équation (3.4) s'écrit sous la forme d'une série comme suit

$$V(x,s)=\sum_{i=0}^{\infty} P^i v_i(x,s), \tag{3.5}$$

où $v_i(x,s)$, $i=0,1,2,\dots$ sont des fonctions qui devraient être déterminées. En substituant (3.5) dans (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} P^i v_i(x,s) &= \frac{P}{s^2+\gamma-A(s)}\Big((\alpha+s\beta)\sum_{i=0}^{\infty} P^i\frac{\partial^2 v_i(x,s)(x,s)}{\partial x^2}+G(x,s)\Big) \\ &+ \frac{1}{s^2+\gamma-A(s)}\Big(\Psi(x)+s\Phi(x)-\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\Big), \quad n\geq 1.\end{aligned} \tag{3.6}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p dans (3.6), on trouve :

$$P^0: v_0(x,s)=\frac{1}{s^2+\gamma-A(s)}\Big(\Psi(x)+s\Phi(x)-\beta\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2}\Big).$$

$$P^1: v_(x,s)=\frac{(\alpha+s\beta)}{(s^2+\gamma-A(s))^2}\Big(s\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^4\Phi(x)}{\partial x^4}\Big)+\frac{1}{(s^2+\gamma-A(s))}G(x,s)$$

....

$$P^n : v_n(x,s) = \frac{(\alpha+s\beta)}{(s^2+\gamma-A(s))}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V_{n-1}(x,s), \quad n \geq 2.$$

Donc

$$P^0 : v_0(x,s) = \frac{1}{s^2+\gamma-A(s)}\Big(\Psi(x)+s\Phi(x)-\beta\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^2}\Big).$$

$$\begin{aligned} v_n(x,s) &= \Big(\frac{\alpha+s\beta}{(s^2+\gamma-A(s))^2}\Big(-\beta\Phi^{(2n+2)}(x)+\Psi^{(2n)}(x)+s\Phi^{(2n)}(x)\Big) \\ &+\frac{1}{(s^2+\gamma-A(s))}G^{(2n-2)}(x,s)\Big)\Big(\frac{\alpha+s\beta}{s^2+\gamma-A(s)}\Big)^{(n-1)}, \quad n\geq 1. \end{aligned}$$

lorsque $p \longrightarrow 1$ (3.5) devient la solution approximative de l'équation (3.1) c'est-à-dire

$$V(x,s) \cong H_n(x,s) = \sum_{i=0}^{n} v_i(x,s). \tag{3.7}$$

Exemple 3.1.

$$g(x,t) = (t^2+2t+2)x^2-4e^t, a(t) = t^2$$
$$0<x<1, 0<t\leq T, \alpha=\beta=\gamma=1,$$
$$\Phi(x) = x^2, \Psi(x) = x^2, 0<x<1,$$
$$n(t) = \frac{1}{3}e^t, m(t) = \frac{1}{4}e^t, 0<t\leq T.$$

la solution exacte est

$$v(x,t) = x^2e^t$$

Ainsi, on cherche la solution selon la métode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans (3.1)*, on obtient :*

$$v_0(x,s) = s^3\frac{sx^2+x^2-2}{s^5+s^3-2}$$

$$v_1(x,s) = -\frac{2}{(s^5+s^3-2)^2}\Big(-s^8-s^7x^2-s^6x^2+s^6-2s^5x^2+4s^5-s^4x^2+4s^4-s^3x^2+4s^3+2s^2x^2+2sx^2+2x^2\Big)$$

$$v_2(x,s) = s^3(s+1)\frac{4s^2+4s+4}{(s^5+s^3-2)^2}$$

$$v_n(x,s) = 0, \quad n\geq 3$$

$$V(x,s) = H_2(x,s) = \sum_{i=0}^{2} v_n(x,s) = \frac{x^2}{s-1}$$

Ce qui donne une solution exacte du problème $v(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_2(x,s)\} = x^2 e^t$.

Bibliographie

[1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, In : North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam : Elsevier Science, 2006.

[2] A. A. Samarskii, Some problems in differential equations theory, Differents. Uravn., V 16 (1980), 1925-1935.

[3] A. Bouziani, N.E. Benouar, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris t.321, Série I, 1177-1182. 1995.

[4] A.M. Nakhushev, On a certain approximate method for boundary-value problems for differential equations and their applications in ground waters dynamics, Differ. Uravn., V, 72â81. 1982

[5] A. M. Nakhushev, The equations of the mathematical biology (Moscow : Vysshaya Shkola (Russian), 1995.

[6] A. Bouziani. Solution forte d'un problème mixte avec condition intégral pour une classe d'équations paraboliques. Maghreb Mathematical Review, Vol. 6, No. 1, p. 1-17, 1997.

[7] A. Bouziani. Mixed problem with integral conditions for certain parabolic equations. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Vol. 9, No. 3, p. 323-330, 1996.

[8] A. Bouziani, N.E. Benouar. Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques. Compte Rendus de lâAcadémie des Sciences. Paris,

[9] A.Bouziani, N.E . Benouar. Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques. Bulletin de la Société Mathématiques de Belgique, Vol. 31, p. 125-133, 1996

[10] A.V. Kartynnik, Three-point boundary value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation, Differ. Eqns., V 26 (1990), 1160-1166.

[11] A. Bouziani, Weak solutions to linear and semilinear parabolic equations with a nonlocal condition, Engineering Simulation., V 18 (2001), 599-619.

[12] A. Bouziani, N. Merazga, Rothe time-discretization method applied to a quasilinear wave equation subject to integral conditions, Advances in Difference Equations., V 2004, Issue 3, Pages 211-235.

[13] A. A. Dezin, Existence and uniqueness theorems for solutions of boundary problems for partial differential equations in function spaces", Uspekhi Mat. Nauk, 14 :3 (87) (1959), 21â73.

[14] Dezin A. A., Théoremes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels, Usp. Math.Naouk, T. 14 (1987), No 3, 22-73.

[15] A. Bouziani, Solution forte d'un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d'équations hyperboliques, AcadÃmie Royale de Belgique., V 8 (1997), pp. 53â70

[16] A. Bouziani, Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition, Nonlinear Analysis : Theory, Methods Applications, V 55 (2003), Issues 7â8, Pages 883â904

[17] A Bouziani, A Merad. The Laplace transforms method for one dimensional hyperbolic equation with purely integral conditions. Romanian Journal of Mathematics and Computer Science 3 (2), 191-204. 2013.

[18] A Merad, A Bouziani. Numerical solutions of the hyperbolic equation with purely integral condition by using Laplace transform method. Palestine Journal of Mathematics. 2015.

[19] A.Necib, A.Merad. Laplace transform and Homotopy pertubation methods for solving the pseudo-hyperbolic integro-differential problems with purely integral conditions, Kragujevac Journal of Mathematics, accepted. 2018.

[20] B. Cahlon, D.M. Kulkarni and P. Shi, Stewise stability for the heat equation with a nonlocal constraint, SIAM l. Nurner. Anal., V 32 (1995), 571-593.

[21] B. Carbonaro, R. Rosso. Energy inequality and the domain of influence theorem in classical elastodynamics. J. Elasticity, Vol. 14, p. 163-174, 1984.

[22] B. Jumarhon, S. McKee, On the heat equation with nonlinear and nonlocal boundary conditions, J. Math. Anal. Appl., V 190 (1995), 806-820.

[23] D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, Solutions of nonlocal problems foronedimensional oscillations of the medium, Mat. Model., V 12, No 1, 94-103. 2000.

[24] E.A. Gasymov, Mixed problems on the conjugation of parabolic sytems of different order with non local boundary conditions, Differentsial'nye Uravnenya., V 26 (1991), N 8, p 1003-1012.

[25] F. Lakhal. Sur une classe de problèmes aux limites avec conditions aux bords de type integrales, thèse de Doctorat, Université Mentouri Constantine, 2011.

[26] H.Weimin k.Atkinson, Theoretical numerical analysis a functionnal analysis framework. Bysshaya Shkola, Moscow, 1993.

[27] H. Hassanzadeh and M. Pooladi-Darvish , Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications, Appl. Math. Comp. 189 1966-1981, 2007

[28] H. Cherif. Montassir, Résolution numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles non linéaire et d'ordre fractionnaire par la méthode HPM, thèse de Doctorat, Université d'oran1, Ahmed Ben Bella.

[29] I. A. Belavin, S. P. Kapitsa and S. P. Kurdyumov, A mathematical model of global demographic processes with regard for aspace distribution, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., V 38, No 6, 885â902. 1998.

[30] I. Podlubny, Fractional Differenrial Equations, San Diego : Academic Press, 1999.

[31] I. G. Petrovsky, Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partiallen differentialgeichungen in gebit der nichtanalystischen funktionen, Bull. Univ d'etat, Moscow., (1938), N 7, 1-74.

[32] J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, Quart. Appl. Math., V 21 (1963), 155â160.

[33] J.R. Cannon and J. Van der Hoek, An implicit finite difference scheme for the diffusion of mass in a portion of the domain, Numer. Solutions of PDEs (ed. by J. Noye), NorthHolland, Amsterdam., (1982), 527- 539.

[34] J.R. Cannon, S. Perez Esteva and J. Van Der Hoek, A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass, (1987), SIAM. J. Numer. Anal., V 24, 499-515.

[35] J.R. Cannon, J. Van der Hoek, The existence and the continuous dependence for the solution of the heat equation subject to the specification of energy, Boll. Uni. Math. Ital. Suppl., V 1 (1981), 253-282.

[36] Jr. Batten, Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of the mixed boundary problem for parabolic equations, Math. Comp., V 17 (1963), 405-413.

[37] J. Leray, Lecture on hyperbolic differential equations with variable coeffciens, Princeton,Justfor adv. Study, 1952.

[38] J. H. He : Homotopy perturbation technique. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.178 :257-262(1999).

[39] J.H. He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, Int. J. Nonlinear Mech. 35 (1)37-43 2000.

[40] J.H. He, Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems, Chaos Soliton. Fract.26 827-833. 2005.

[41] K. Friderichs, Symetric hyperbolic linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., V 7 (1954), N 2, 345-392.

[42] L. A. Muravei, A.V. Philinovskii, On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation, Mat. Zametki 54, 98â116. 1993.

[43] L.A. Muravei, A.V. Filinovskii, On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation, Mathematics of the USSR-Sbornik., V 74 (1993), No 1, 219-249.

[44] L. Garding, Cauchy's problem for hypebolic equations, University of Chicago, Lecture notes, 1957

[45] M. Madani, M. Fathizadeh, Y. Khan, A. YildrimâOn coupling the homotpy perturbation method ans Laplace transformation, Mathematical and Computer Modelling, 53, (2011), pp. 1937â1945, 1970.

[46] N.I. Ionkin. solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions. Difierentialânye. Urav, Vol. 13, No. 2, p. 294-304, 1977.

[47] N.I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, Th., Vychisl., Mat., Mat., Fiz., V 41 (1964), N 6, 1006-1024.

[48] N.E. Benouar, N.I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator, Differentsial'nye Uravneniya., V 27 (1991), 2094-2098.

[49] N.I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differentsial'nye Uravneniya., V 22 (1986), 2117-2126.

[50] N.I. Ionkin, Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition, Differential Equations., V 13 (1977), 204-211.

[51] N. Merazga, A. Bouziani Rothe method for a mixed problem with an integral condition for the two-dimensional diffusion equation, Abstract and Applied Analysis., V 2003 (2003), Issue 16, Pages 899-922.

[52] N. I. Yurchuk, A priori estimates of solutions of boundary value problems for certain differential equations, Differential Equations., V 12 (1976), N 4, 512-518.

[53] N. I. Yurchuk, Boundary value problems for differential equations whith operator valued coeffcients depending on parameter, Differential Equations., V 12 (1976), N 9, 1157-1168.

[54] N.I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differentsial'nye Uravneniya., V 22 (1986), 2117-2126.

[55] N. BOUSSETILA, Problème aux limites non locales pour une équation aux dérivées partielles opérationnelle, thèse de Magister, Département de Mathématiques, Université Badji-Mokhtar Annaba, Algeria, 1998.

[56] N. I. Ionkin, Stability of a problem in Heat-condition, Differentsial'nye Uravnenya., V 13 (1977), No 2, 294-304.

[57] N. Abdelhamid, Problèmes aux limites avec conditions non locales, thèse de Doctorat, Université Larbi Ben M'hidi Oum El Boughui, Algeria 2018.

[58] [69] O. A. Ladyzhenskaya, Mixed problem for hyperbolic equations, Edition Mir nauka, 1974.

[59] O. Taki Eddine, L'étude de la solution des problèmes pour une classe d'équations aux dérivées partielles avec une condition non locale de type intégrale, Thèse de Doctorat, Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi, Algeria 2015.

[60] P. Shi, M. Shillor, On design of contact patterns in one-dimensional thermoelasticity, Theoretical Aspects of Industrial Design (Wright-Patterson Air Force Base, OH, SIAM, Pennsylvania., 1992, pp. 76â82. 1990.

[61] P. Shi, Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, SIAM. J. Math.Anal., V 24 (1993), 46-58.

[62] S. Mesloub, A. Bouziani, On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition,"International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences., V 22 (1999), N 3, pp. 511â519.

[63] Mesloub, S. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order parabolic equation. J. Math. Anal. Appl 2006, 316, 189-209.

[64] V.A. Vodakhova, A boundary-value problem with Nakhushev nonlocal condition for a certain pseudoparabolic water transfer equation, Differ. Uravn., V 18, 280â285. 1982.

[65] W. Allegretto, Y. Lin and A. Zhou, Abox schememe for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems, Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems., V 5, 573-578. 1999

[66] Y.S. Choi, K.Y. Chan, A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry, Nonlinear Anal. 18, pp. 317â331. 1992.

[67] Y. LIN, Parabolic partial differential equation subject to nonlocal boundary conditions, Ph.D. thesis, Washington State University, Pullman, WA., 1988.

[68] Z. Suying, Z. Minzhen, D. Zichen and L.Wencheng, Solution of nonlinear dynamic differential equations based on numerical Laplace transform inversion, Appl. Math. Comp. 189, 79-86, 2007

[69] Z. Djelloul, Méthode combinée des perturbations HPM et VIM pour la résolution des équations différentielles ordinaires et EDP d'ordre fractionnaire, thèse de doctorat, université d'oran1 Ahmed Ben Bella, 2016.